Мейш Ю. А., Арнаута Н. В.

UDC 539.3

DYNAMIC PROBLEM OF AXISYMMETRIC OSCILLATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS OF VARIABLE THICKNESS UNDER THE ACTION NON-STATIONARY LOAD

Yu. A. MEISH, Doctorof Techical Science, Professor
N. V. ARNAUTA, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor
National University of Live and Environmental Sciences of Ukraine
E-mail: arnauta_nata@nubip.edu.ua

https://doi.org/10.31548/dopovidi6(106).2023.025

Abstract. *Analyzing the publications in which the dynamic problems of cylindrical shells of non-uniform thickness under the action of various types of loading are considered, a conclusion can be drawn. that there are practically no works devoted to the dynamic behavior of heterogeneous cylindrical shells under non-stationary loads.*

In this work, the formulation of the dynamic problem of axisymmetric oscillations of a cylindrical shell of variable thickness under the action of non-stationary loading and the algorithm for solving the given problem are considered. In particular, the resulting system of differential equations is based on the theory of Tymoshenko-type shells, while constructing a numerical algorithm, the integro-interpolation method of constructing finite-difference schemes for spatial coordinates is used using Richardson approximations and an explicit difference scheme for time. An example of calculating the dynamic behavior of a variable thickness under non-stationary loading is considered and an analysis of numerous results is given.

Keywords : *cylindrical shells, change in thickness, theory of Tymoshenko-type shells, forced oscillations, numerical methods*

Problem statement . In this work, the formulation of the problem of the dynamic behavior of cylindrical shells of variable thickness under the action of a non-stationary load is considered. It is assumed that the cylindrical shell, which is not uniform in thickness, is located under due to the internal distributed load, where and are the spatial and temporal coordinates**.**

When constructing a mathematical model of the process of dynamic deformation of a cylindrical shell of variable thickness, a geometrically and physically linear variant of the theory of shells of the type Tymoshenko [1,2, 4, 6].

The equations of the oscillating cylindrical shell have the following form:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \rho h(x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x}-k_2T_{22}+P_3(x,t)=\rho h(x)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};\qquad (1)$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x}-T_{13}=\rho\frac{h^3(x)}{12}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}.$$

The ratio of forces - moments with the corresponding magnitudes of deformations have the form :

$$T_{11}=B_{11}(x)(\varepsilon_{11}+\nu_2\varepsilon_{22}),\ T_{22}=B_{22}(x)(\varepsilon_{22}+\nu_1\varepsilon_{11}),\ T_{13}=B_{13}(x)\varepsilon_{13};$$
$$M_{11}=D_{11}(x)(\kappa_{11}+\nu_2\kappa_{22}),\ M_{22}=D_{22}(x)(\kappa_{22}+\nu_1\kappa_{11});$$
$$B_{11}(x)=\frac{E_1h(x)}{r\nu_1\nu_2},\ B_{22}(x)=\frac{E_2h(x)}{r\nu_1\nu_2},\ B_{13}(x)=G_{13}(x)h(x);\qquad (2)$$
$$D_{11}(x)=\frac{E_1h^3(x)}{12(1-\nu_1\nu_2)},\ D_{22}(x)=\frac{E_2h^3(x)}{12(1-\nu_1\nu_2)}.$$

Deformation relations are represented by the following formulas :

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x},\ \varepsilon_{22}=k_2u_3,\ \varepsilon_{13}=\varphi_1+\frac{\partial u_3}{\partial x},\quad \kappa_{11}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}.\qquad (3)$$

In formulas (1)–(3) $u_1(x,t),\ u_3(x,t),\ \varphi_1(x,t)$ – components of the generalized vector moved to the middle surface of the shell ; $h(x)$ – variable shell thickness ; ρ – density of the shell material ; $E_1, E_2, G_{13}, \nu_1, \nu_2$ – physical and mechanical parameters of the shell material.

To calculate the stiffness characteristics of the shell thickness h is defined as a linear function of coordinates x:

$$h(x)=h(x_0)+[h(x_N)-h(x_0)]\frac{x}{L},\qquad (4)$$
$$x_N-x_0=L,\ x_0\le x\le x_N.$$

Oscillating equations (1)–(3) are supplemented by the corresponding boundary and initial conditions. In the case of severe pinching of the ends shells at $x=x_0$ and $x=x_N$ boundary conditions have the form

$$u_1=u_3=\varphi_1=0.\qquad (5)$$

nitial conditions at $t=0$ have the form

$$u_1=u_3=\varphi_1=0,\quad \frac{\partial u_1}{\partial t}=\frac{\partial u_3}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=0.\qquad (6)$$

Numerical algorithm for solving the problem . Numerical algorithm for solving the initial-boundary problem (1)–(6) based on the application of the integro-interpolation method of constructing difference relations along the spatial coordinate and explicit approximation along the time coordinate t [5].

To build more efficient algorithms, an approach based on finding approximate Richardson solutions is used

[3, 4, 6]. To build more efficient algorithms, an approach based on finding approximate Richardson solutions is used

$$\tilde{\overline{U}}^{n}_{l(\Delta s)} = \frac{4}{3}\overline{U}^{n}_{l(\Delta s/2)} - \frac{1}{3}\overline{U}^{n}_{l(\Delta s)}, \qquad (7)$$

where $\overline{U}^{n}_{l(\Delta s/2)}$ i $\overline{U}^{n}_{l(\Delta s)}$ - numerical solutions of vibration equations, respectively, with discrete steps along the spatial coordinate $\Delta s/2$ i Δs, $s = A_1\alpha_1$.

It is not difficult to show that the difference equations (4) approximate the original oscillation equations (2) in a smooth region with the fourth order of accuracy in the coordinate x.

Numerical results. As an example, the problem of the dynamic behavior of a cylindrical shell of variable thickness with rigidly clamped ends under the action of a normal distributed load was considered $P_3(x,t)$. Boundary and initial conditions were adopted according to formulas (5), (6). The law of thickness change was adopted according to (4). The isotropic cylindrical shell was considered with the following parameters**:**

$R_0 = 0{,}3\,м$; $L = 0{,}4\,м$; $h(x_0) = 10^{-2}\,м$; $h(x_N) = 2\cdot 10^{-2}\,м$; $E = 7\cdot 10^{11}\,Па$; $\nu = 0{,}3$.

Non-stationary impulse loading was set in the form

$$P_3(x,t) = A\cdot \sin\frac{\pi t}{T}\left[\eta(t) - \eta(t-T)\right],$$

where A – loading amplitude ; T – load duration. It was supposed in the calculations $A = 10^6\,Па$; $T = 50\cdot 10^{-6}\,c$.

Calculations of the dynamic behavior of a cylindrical shell of constant thickness, the mass of which coincides with the mass of the initial cylindrical shell of variable thickness with the above parameters.

Numerical calculations were carried out on a time interval $0 \le t \le 40T$. In fig .1 the dependences of movement are given u_3 by spatial coordinate x at the moment of time $t = 8{,}5T$ (time to reach the maximum value of the value u_3 on the investigated time interval). The curve with an index of 1 corresponds to the case of a cylindrical shell of variable thickness, with an index of 2 – a cylindrical shell of constant thickness. In the future, we will adhere to the indicated designations.

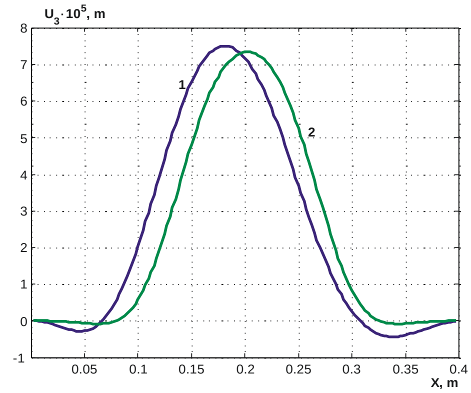

Fig.1 – Dependence of movement u_3 spatially coordinates x at a moment in time $t = 8{,}5T$

In fig. 2 shows the dependence of the magnitude ε_{22} by spatial coordinate x at a moment in time $t = 8{,}5T$.

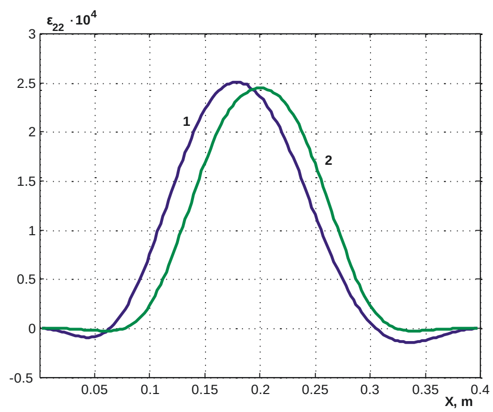

Fig. 2 – Dependence of deformation ε_{22} spatially coordinates x at a moment in time $t = 8{,}5T$

Based on the first two figures, it is possible to divide the studied area by spatial coordinate x into three subregions:

$$0 \le x \le \frac{3}{8}L\,,\ \frac{3}{8}L \le x \le \frac{5}{8}L \ \text{и}\ \frac{5}{8}L \le x \le L\,.$$

In the first subregion $0 \le x \le \frac{3}{8}L$ (the thickness of the non-uniform cylindrical shell is less than the thickness of the shell with a constant thickness) an increase in the values of the investigated values is observed u_3, ε_{22}, σ_{22} shells with a variable thickness compared to the corresponding values of the shell with a constant thickness by 10% - 30%. In the third subregion $\frac{5}{8}L \le x \le L$ the opposite pattern is observed (the thickness of the non-uniform cylindrical shell is greater than the thickness of the shell with constant thickness) - the values of the investigated values u_3, ε_{22}, σ_{22} shells with a constant thickness prevail over the corresponding values of the values of the inhomogeneous cylindrical shell.

Conclusions. The paper presents the formulation of the problem of forced axisymmetric oscillations of cylindrical shells of variable thickness under the action of a non-stationary load. A numerical algorithm for solving this class of problems has been developed. The results are presented and a quantitative and qualitative analysis of the obtained data is carried out.

References

1. Meish V. F., Meish Yu. A., and Kornienko V. F. (2021). Dynamics of three-layer shells of different geometry with piecewise-homogeneous core under distributed loads. International Applied Mechanics. Vol. 57, №. 6,
2. Lugovoi P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A., Orlenko S.P. (2020). Dynamic Design of Compound Shell Structures of Revolution under Nonstationary Loads. International Applied Mechanics. Vol 56, № 1.
3. Meysh V. F., Meish Y. A., Arnauta N.V. (2019) Numerical Analysis of Nonstationary Vibrations of Discretely Reinforced Multilayer Shells of Different Geometry .International Applied Mechanics. 2019. Vol. 55. - №4.
4. Arnauta, N., & Roman, R. (2018). Use of numerical high-exactly algorithms for modeling dynamic demeanour of disretely substantiated five-layered cylindrical shells. Biological Resources and Nature Management, 10(5-6), 217-222. doi:http://dx.doi.org/10.31548/bio2018.05.027
5. Samarsky A. A. (1977). Theory of difference schemes. 656.
6. Arnauta, N. (2021). A problem of non – linear deformation of five–layer conical shells with allowance for discrete ribs. *Scientific reports of NULES of Ukraine,* 6(94). http://dx.doi.org/10.31548/dopovidi2021.06.016

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА АСИМЕТРИЧНИХ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Ю. А. Мейш, Н. В. Арнаута

Анотація. *В цій роботі розглядається постановка динамічної задачі осесиметричних коливань циліндричної оболонки змінної товщини під дією нестаціонарного навантаження та алгоритм розв'язання поставленої задачі.*

Нехай неоднорідна за товщиною циліндрична оболонка знаходиться під дією внутрішнього розподіленого навантаження $P_3(x,t)$, *де* x *і* t *– просторова і часова координати.*

При побудові математичної моделі динамічної поведінки циліндричної оболонки змінної товщини використовується теорія оболонок типу Тимошенка.

Рівняння коливань циліндричної оболонки мають наступний вигляд.

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x} = \rho h(x)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial T_{13}}{\partial x} - k_2 T_{22} + P_3(x,t) = \rho h(x)\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x} - T_{13} = \rho\frac{h^3(x)}{12}\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}.$$

Співвідношення зусилля - моменти з відповідними величинами деформацій мають вигляд:

$$T_{11} = B_{11}(x)(\varepsilon_{11} + \nu_2\varepsilon_{22}),\ T_{22} = B_{22}(x)(\varepsilon_{22} + \nu_1\varepsilon_{11}),\ T_{13} = B_{13}(x)\varepsilon_{13};$$

$$M_{11} = D_{11}(x)(\kappa_{11} + \nu_2\kappa_{22}),\ M_{22} = D_{22}(x)(\kappa_{22} + \nu_1\kappa_{11});$$

$$B_{11}(x) = \frac{E_1 h(x)}{r\nu_1\nu_2},\ B_{22}(x) = \frac{E_2 h(x)}{r\nu_1\nu_2},\ B_{13}(x) = G_{13}(x)h(x);$$

$$D_{11}(x) = \frac{E_1 h^3(x)}{12(1-\nu_1\nu_2)},\ D_{22}(x) = \frac{E_2 h^3(x)}{12(1-\nu_1\nu_2)}.$$

Деформаційні співвідношення будуть мати наступний вигляд:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x},\ \varepsilon_{22} = k_2 u_3,\ \varepsilon_{13} = \varphi_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x},\quad \kappa_{11} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}.$$

В цих формулах $u_1(x,t),\ u_3(x,t),\ \varphi_1(x,t)$ *– компоненти узагальненого вектору переміщення компоненты обобщенного вектора переміщення усередненої поверхні оболонки;* $h(x)$ *– змінна товщина оболонки;* ρ *– щільність матеріалу оболонки;* $E_1, E_2, G_{13}, \nu_1, \nu_2$ *– фізично – механічні параметри матеріалу оболонки.*

Для того, щоб обчислити характеристики оболонки товщина h *визначається як лінійна функція координати* x*:*

$$h(x) = h(x_0) + [h(x_N) - h(x_0)]\frac{x}{L},$$

$$x_N - x_0 = L,\ x_0 \le x \le x_N.$$

Рівняння коливань доповнюються відповідними граничними та початковими умовами. У випадку жорсткого защемлення торців оболонки оболочки при $x = x_0$ *і* $x = x_N$ *граничні умови мають вигляд:*

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0.$$

Початкові умови при $t = 0$ *мають вигляд*

$$u_1 = u_3 = \varphi_1 = 0,\quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial u_3}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = 0.$$

Чисельний алгоритм розв'язування нестаціонарних задач теорії неоднорідних багатошарових оболонок грунтується на застосуванні інтегро – інтерполяційного методу побудови скінченно – різницевих схем по просторовій координаті та явній скінченно–різницевій схемі типу "хрест" по часовій координаті. Для побудови більш ефективних алгоритмів застосовується підхід, що базується на знаходженні наближених розв'язків по Річардсону. Причому, при фіксованому різницевому кроку по часовій координаті, використовується послідовність наближених апроксимацій по просторовій координаті. При цьому, процедура екстраполяції формується згідно формул

$$\tilde{\overline{\mathrm{U}}}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{l}(\Delta \mathrm{s})} = \frac{4}{3}\overline{\mathrm{U}}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{l}(\Delta \mathrm{s}/2)} - \frac{1}{3}\overline{\mathrm{U}}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{l}(\Delta \mathrm{s})},$$

де $\overline{U}^{n}_{l(\Delta s/2)}$ *і* $\overline{U}^{n}_{l(\Delta s)}$ - *чисельні розв'язки рівнянь коливань відповідно з дискретними кроками по просторовій координаті* $\Delta s/2$ *і* Δs, $s = A_1\alpha_1$.

Розглянуто приклад розрахунку динамічної поведінки циліндричної оболонки змінної товщини при нестаціонарному навантаженні та приведено аналіз численних результатів.

Ключові слова: *цилиндричні оболонкт оболочки, зміна товщина, теорія оболонок типу Тимошенка, вимушені колиання, чисельні методи*