MAPLE-МОДЕЛЬ РУХУ ЧАСТИНКИ У ВЕРТИКАЛЬНІЙ ПЛОЩИНІ В ФУНКЦІЇ ЧАСУ

А. В. Несвідомін, кандидат технічних наук, старший викладач

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: a.nesvidomin@gmail.com

Анотація. У багатьох технологічних процесах сільськогосподарського виробництва має місце взаємодія рухомої частинки з шорсткою поверхнею. Визначення закономірностей руху частинки по площині довільного положення в тривимірному просторі дозволяє виконати розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів.

Комп'ютерне моделювання руху частинки дозволяє замінити громіздкі аналітичні перетворення і забезпечити діалоговий режим для проведення необхідних обчислювальних експериментів з аналізу руху частинки за різними вихідними умовами її кидання по будь-якій шорсткій поверхні, яка певним чином розташована в просторі.

Мета дослідження – розробка Maple-моделі руху частинки у вертикальній площині в функції часу.

Застосування супровідного тригранника Дарбу дозволило звести закон руху частинки до системи із двох диференціальних рівнянь для визначення швидкості та кривизни траєкторії частинки.

Отриманий закон руху частинки по шорсткій вертикальній площині у функції часу в проекціях на орти **T** і **P** тригранника Дарбу **ОТРN**.

Отримані траєкторії **$r(u)$** та графіки швидкостей **$V(u)$** частинки по вертикальній площині для різного кута кидання, початкової швидкості та коефіцієнта тертя. Проаналізований рух частинки за відповідних початкових умов.

Моделювання руху частинки по вертикальній поверхні у функції часу дозволяє дослідити її траєкторно-кінематичні властивості на заданій ділянці поверхні.

Вибір супровідного тригранника траєкторії **ОuvN** чи **ОТРN** не впливає на одержані результати траєкторно-кінематичних властивостей руху частинки, хоча позначається в послідовності виведення її закону руху.

Ключові слова: супровідний тригранник, матеріальна точка, вертикальна площина, траєкторія руху

Актуальність. У багатьох технологічних процесах сільськогосподарського виробництва має місце взаємодія рухомої частинки з шорсткою поверхнею [1].

Встановлення закономірностей руху частинки (як матеріальної точки) по шорсткій поверхні дозволяє провести розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Складність аналітичного опису руху частинки по шорсткій поверхні приводить до застосування простих за формою поверхонь та їх частковими положеннями в просторі. Для спрощення аналітичних перетворень виведення закону руху частинки по шорсткій поверхні у вигляді системи диференціальних рівнянь 2-го порядку та їх розв'язку кожен науковець індивідуально приймав ту чи іншу систему віднесення - декартову прямокутну, циліндричну, сферичну тощо.

Комп'ютерні технології дозволяють ефективно вирішити певні етапи моделювання руху частинки по шорсткій поверхні, наприклад, наближено розв'язати систему диференціальних рівнянь будь-якої складності, графічно унаочнити траєкторно-кінематичні характеристики тощо [2].

Розвиток комп'ютерних технологій символьного обчислення дозволяє повністю виключити трудомісткі аналітичні перетворення для формування закону руху частинки по шорсткій поверхні, а залишити тільки інтерактивний обчислювальний експеримент [3].

Мета дослідження – розробка Maple-моделі руху частинки по вертикальній площині у функції часу.

Матеріали і методи дослідження. Якщо на шорстку площину Ω під деяким кутом ξ від вертикального положення кинути частинку, то вона опише певну криволінійну траєкторію, форма якої залежить від співвідношень значень: 1) початкової швидкості V_o ; 2) кута α_o напрямку кидання частинки; 3) положення $[u_o, v_o]$ частинки в площині $R(u, v)$ на початку її руху; 4) коефіцієнта f зовнішнього тертя; 4) коефіцієнта q опору повітря.

Системи диференціальних рівнянь законів руху частинки по похилій площині в проекціях на орти мають вигляд:

– u і v тригранника $OuvN$ (рис.1, а):

$$\begin{cases} Ou: = m \frac{d}{dt} u(t) = - \frac{\frac{d}{dt} u(t) \left(f mg \sin(\xi) + q \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right) \right)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}}; \\ Ov: = m \frac{d}{dt} v(t) = - \frac{f mg \sin(\xi) \frac{d}{dt} v(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} - mg \cos(\xi) - q \frac{d}{dt} v(t) \sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2} \end{cases} \quad (1)$$

– T і P тригранника $OTPN$ (рис.1, б):

$$\begin{cases} OT := \frac{m \left(\frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} = - \frac{mg \cos(\xi) \frac{d}{dt} v(t)}{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} - f mg \sin(\xi) - q \left(\left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2 \right) \\ OP: = m \left(\frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) - \frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) = - mg \cos(\xi) \frac{d}{dt} u(t) \end{cases} \quad (2)$$

Рис. 1. Формування закону руху частинки по похилій площині в проекціях на орти:

а – u і v локальної системи $OuvN$; б – T і P тригранника Дарбу $OTPN$

Системи диференціальних рівнянь (1) - (2) також дозволяють описати рух частинки у вертикальній площині. Для вертикальної площини ($\xi = 0^\circ$), тлму закони руху частинки в проекціях на орти $\mathbf{u}$ і $\mathbf{v}$ тригранника $\mathbf{OuvN}$ та $\mathbf{T}$ і $\mathbf{P}$ тригранника $\mathbf{OTPN}$ будуть мати відповідно вигляди:

$$\begin{cases} Ou: = m \frac{d}{dt^2} u(t) = 0 \\ Ov: = m \frac{d}{dt^2} v(t) = -mg \end{cases} \quad (3)$$

та:

$$\begin{cases} OT = m \left(\frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) = -m g \frac{d}{dt} v(t) \\ OP = m \left(\frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) - \frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right) = -m g \frac{d}{dt} u(t) \end{cases} \quad (4)$$

Звернемо увагу на відсутність коефіцієнта тертя f у системах рівнянь (3) і (4) - у вертикальній площині немає взаємодії частинки з поверхнею. В цьому випадку оператор *dsolve* знаходить шукані залежності $u(t)$ і $v(t)$ у явному вигляді:

$$u(t) = V_o t \sin(\alpha_o) + u_o, \quad (5)$$

$$v(t) = V_o t \cos(\alpha_o) - \frac{1}{2} g t^2 + v_o, \quad (6)$$

що приводить до загальновідомого рівняння траєкторії вільного руху матеріальної точки [68, 117]:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r} \left[V_o t \sin(\alpha_o) + u_o, 0, V_o t \cos(\alpha_o) - \frac{1}{2} g t^2 + v_o \right]. \quad (7)$$

На рис. 2 побудовано траєкторії частинки та графіки швидкості $V(t)$, пройденого шляху $S(t)$, тангенціального $W_\tau(t)$ та нормального $W_n(t)$ прискорень, кривини $k(t)$ траєкторії $\mathbf{r}(t)$ за різним кутом $\alpha_o = 15^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ (вимірюється від осі Oz) кидання частинки при початковій її швидкості $V_o = 4$ м/с на проміжку часу $t \in [0, 1]$. За цими зображеннями можна підтвердити зокрема, що для частинок кинутих під кутом $\alpha_o = 15^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ у верхній точці траєкторії $\mathbf{r}(t)$ її тангенціальне

прискорення рівняється $W_t = 0$, а нормальне - $W_n = g$, а при $t \rightarrow \infty$ - тангенціальне прискорення $W_t \rightarrow g$, а нормальне - $W_n \rightarrow 0$, що означає наближення траєкторії $r(t)$ до прямої лінії. Прискорення $W(t)$ частинки на всьому проміжку її переміщення є постійною величиною і дорівнює $W = g$. Точка перегину графіка $S(t)$ знаходиться в момент t положення частинки у найвищій точці її траєкторії $r(t)$, оскільки швидкість є найменшою і довжина дуги траєкторії $r(t)$ теж. Кривина $k(t)$ в цей момент є найбільшою, після чого буде зменшуватися до нуля.

Рис.2. Вільний рух частинки залежно від кута α_o її кидання:

а – траєкторія $r(t)$; б – швидкість $V(t)$; в – пройдений шлях $S(t)$;

г, д – тангенціальне $W_t(t)$ та нормальне $W_n(t)$ прискорення;

е – кривина $k(t)$ траєкторії $r(t)$

Висновки і перспективи.

1. Показано, що орієнтований на комп'ютерну реалізацію метод моделювання руху частинки по вертикальній шорсткій поверхні у функції часу є загальним і результативним.
2. Проведені обчислювальні експерименти з аналізу впливу вихідних умов на характер руху частинки по вертикальній площині.
3. Вибір супровідного тригранника траєкторії **OuvN** чи **OTPN** не впливає на одержані результати траєкторно-кінематичних властивостей руху частинки, хоча позначається в послідовності виведення її закону руху, але використання супровідного тригранника **OTPN** є більш природнім для опису руху частинки по поверхні у функції незалежного параметра α .

Список літератури

1. Адамчук В.В. Теория центробежных рабочих органов машин для внесения минеральных удобрений: монография / В.В. Адамчук. - К.: Аграрна наука, 2010. - 178 с.
2. Аладьев В.З. Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования / В.З. Аладьев. - Гродно: Лаборатория Базовых Знаний. - 2006. - 792 с.
3. Несвідомін А.В. Моделювання руху частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює прямолінійні коливальні переміщення / А.В. Несвідомін // Сучасні проблеми моделювання: зб. наук праць / МДПУ ім. Б. Хмельницького. - Мелітополь: МДПУ, 2015. - Вип.4. - С.100-104.
- 4.

References

1. Adamchuk, V. V. (2010). Teoriya tsentrobezhnykh rabochikh organov mashin dlya vneseniya mineral'nykh udobreniy: monografiya [Theory of centrifugal working bodies of machines for the application of mineral fertilizers]. Kyiv: Agrarna nauka, 178.
2. Alad'yev, V. Z., Boyko, V. K., Rovba, E. A. (2007). Programmirovaniye i razrabotka prilozheniy v Maple [Programming and application development in Maple]. Grodno-Tallin, 458.
3. Nesvidomin, A.V. (2015). Modeliuvannia rukhu chastynky po shorstkii horyzontalnii ploshchyni, yaka zdiisniuie priamoliniini kolyvalni peremishchennia [Simulation of particle motion along a rough horizontal plane that performs linear vibrational displacements]. Suchasni problemy modeliuvannia: zb. nauk prats MDPU im. B. Khmelnytskoho, 4, 100-104.

MAPLE-МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ В ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ В ФУНКЦИИ ВРЕМЕНИ

А. В. Несвидомин

Аннотация. Во многих технологических процессах сельскохозяйственного производства имеет место взаимодействие подвижной частицы с шероховатой поверхностью. Определение закономерностей движения частицы по плоскости произвольного положения в трехмерном пространстве позволяет выполнить расчет конструктивно-кинематических параметров рабочих органов.

Компьютерное моделирование движения частицы позволяет заменить громоздкие аналитические преобразования и обеспечить диалоговый режим для проведения необходимых вычислительных экспериментов по анализу движения частицы с различными исходными условиями ее бросание по любой шероховатой поверхности, определенным образом расположена в пространстве.

Цель исследования - разработка Maple-модели движения частицы в вертикальной плоскости в функции времени.

Применение сопроводительного трехгранника Дарбу позволило свести закон движения частицы в систему из двух дифференциальных уравнений для определения скорости и кривизны траектории частицы.

Полученный закон движения частицы по шероховатой вертикальной плоскости в функции времени в проекциях на орты **T** и **P** трехгранника Дарбу **OTPN**.

Полученные траектории $r(u)$ и графики скоростей $V(u)$ частицы по вертикальной плоскости для угла бросания, начальной скорости и коэффициента трения. Проанализировано движение частицы при соответствующих начальных условиях.

Моделирование движения частицы по вертикальной поверхности в функции времени позволяет исследовать ее траекторно-кинематические свойства на заданном участке поверхности.

Выбор сопроводительного трехгранника траектории **OuvN** или **OTPN** не влияет на полученные результаты траекторно-кинематических свойств движения частицы, хотя сказывается в последовательности вывода ее закона движения.

Ключевые слова: сопроводительное трехгранник, материальная точка, вертикальная плоскость, траектория движения

MAPLE-MODEL OF PARTICLE MOVEMENT IN VERTICAL PLANE IN TIME FUNCTION

A. Nesvidomin

Abstract. In many technological processes of agricultural production there is an interaction of the moving particle with the rough surface. Determination of the laws of motion of a particle on the plane of an arbitrary position in three-dimensional space allows to perform the calculation of structural-kinematic parameters of the working bodies.

Computer simulation of particle motion allows to replace cumbersome analytical transformations and provide a dialog mode for carrying out the necessary computational experiments to analyze the motion of a particle under different initial conditions of its throwing on any rough surface, which is in some way located in space.

The purpose of the study is to develop a Maple model of particle motion in the vertical plane as a function of time.

The use of the Darbu's accompanying triangular allowed to reduce the law of motion of a particle to a system of two differential equations to determine the velocity and curvature of the particle trajectory.

*The law of motion of a particle along a rough vertical plane as a function of time in the projections of the **T** and **P** orthogs of the Darbu **OTPN** is obtained.*

The trajectories $r(u)$ and velocity graphs $V(u)$ of the particle in the vertical plane were obtained for different tilt angle, initial velocity, and friction coefficient. The particle motion under appropriate initial conditions is analyzed.

Simulation of the motion of a particle on a vertical surface as a function of time allows to study its trajectory-kinematic properties on a given area of the surface.

*The choice of the accompanying triangular trajectory **OuvN** or **OTPN** does not affect the obtained results of the trajectory-kinematic properties of the motion of the particle, although it is indicated in the sequence of derivation of its motion law.*

Key words: *accompanying triangle, material point, vertical plane, trajectory of motion*