ВИБІР СУПРОВІДНОГО ТРИГРАННИКА ДЛЯ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТРАЄКТОРІЇ ЧАСТИНКИ НА ПОВЕРХНІ

А. В. Несвідомін, кандидат технічних наук, старший викладач

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: a.nesvidomin@gmail.com

Анотація. У багатьох технологічних процесах сільськогосподарського виробництва має місце взаємодія рухомої частинки з шорсткою поверхнею. Визначення закономірностей руху частинки по площині довільного положення в тривимірному просторі дозволяє виконати розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів.

Комп'ютерне моделювання руху частинки дозволяє замінити громіздкі аналітичні перетворення і забезпечити діалоговий режим для проведення необхідних обчислювальних експериментів з аналізу руху частинки за різними вихідними умовами її кидання по будь-якій шорсткій поверхні, яка певним чином розташована в просторі.

Мета дослідження – визначення супровідного тригранника для комп'ютерного моделювання траєкторії частинки на поверхні..

Встановлено, що застосування супровідних тригранників траєкторії частинки дозволило звести закон руху частинки до системи із двох диференціальних рівнянь, шуканими якими є внутрішні u, v - координати поверхні траєкторії частинки. Траєкторія частинки r в декартовій системі координат $Oxyz$ отримується підстановкою знайдених u, v - координат до рівняння $R(u, v)$ поверхні.

Вибір системи відліку $OuvN$ або ж $OTPN$ при формуванні законів руху частинки по поверхні впливає на вигляд систем диференціальних рівнянь, але результати їх розв'язку при виборі конкретного незалежного параметра будуть однакові.

Ключові слова: супровідний тригранник, матеріальна точка, система відліку, траєкторія руху

Актуальність. Взаємодія рухомої частинки з шорсткою поверхнею має місце у багатьох технологічних процесах сільськогосподарського виробництва [1].

Встановлення закономірностей руху частинки по шорсткій поверхні дозволяє провести розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Складність аналітичного опису руху частинки по шорсткій поверхні приводить до застосування простих за формою поверхонь та їх частковими положеннями в просторі. Для спрощення аналітичних перетворень виведення закону руху частинки по шорсткій поверхні у вигляді системи диференціальних рівнянь 2-го порядку та їх розв'язку застосовують різні системи відліку – декартову прямокутну, циліндричну, сферичну тощо.

Комп'ютерні технології дозволяють вирішити завдання моделювання руху частинки по шорсткій поверхні, наприклад, наближено розв'язати систему диференціальних рівнянь будь-якої складності, графічно унаочнити траєкторно-кінематичні характеристики тощо [2].

Розвиток комп'ютерних технологій символьного обчислення дозволяє повністю виключити трудомісткі аналітичні перетворення для формування закону руху частинки по шорсткій поверхні, а залишити тільки інтерактивний обчислювальний експеримент [3].

Мета дослідження – визначення супровідного тригранника для комп'ютерного моделювання траєкторії частинки на поверхні.

Матеріали і методи дослідження. Виокремимо три локальних тригранники, які супроводжують частинку O вздовж її траєкторії r на поверхні R (рисунок):

1. Френе $Otnb$;
2. Дарбу $OTPN$;
3. $OuvN \equiv OR'_u R'_v N$.

Для цих супровідних тригранників маємо:

– орт t тригранника Френе і орт T тригранника Дарбу збігаються з вектором швидкості V частинки - обидва орти є дотичними до її траєкторії r і направлені в сторону її переміщення;

– орт n тригранника Френе збігається з напрямком головної нормалі n траєкторії r частинки, а площина Om є стичною у всіх точках траєкторії r ;

Рисунок. Супровідні тригранники траєкторії частинки:

а – на поверхні; б – площини OTP , $OPN \equiv Onb$ і Otn супровідних тригранників; в – кути між осями супровідних тригранників

- орт N обох тригранників $OuvN$ і $OTPN$ збігається з нормаллю N поверхні $R(u, v)$, яка направлена в сторону її вгнутості;
- площини OPN і Onb збігаються в одну η , яка є перпендикулярною до дотичної τ траєкторії r частинки;
- площини OTP і Ouv збігаються в одну μ , яка є дотичною до поверхні $R(u, v)$ у всіх точках траєкторії r ;

– тригранники Френе і Дарбу збігаються $\tau \equiv T, n \equiv P$ і $b \equiv N$, якщо поверхнею по якій рухається частинка, є площина;

– кут ε між векторами n і N дорівнює нулю для траєкторій r частинки вздовж ліній кривини поверхні $R(u, v)$;

для частинки, яка рухається вздовж u – або ж v – координатної лінії поверхні $R(u, v)$, супровідні тригранники $OuvN$ і $OTPN$ збігаються.

Вектор P тригранника Дарбу визначається із векторного добутку $\tau \times N$.

Таким чином, рівняння вихідної поверхні $R(u, v)$ та траєкторій $r(t)$, $r(u)$, $r(v)$, $r(\alpha)$ і $r(s)$ частинки дозволяє визначити відповідні орти (вектори) $\tau \equiv T$, n , P , $u \equiv R'_u$, $v \equiv R'_v$, N супровідних тригранників Onb , $OuvN$ і $OTPN$.

Результати досліджень та їх обговорення. Закон руху частинки по поверхні визначається із рівноваги діючих сил на неї в прийнятій системі відліку. Супровідні тригранники $OuvN$ і $OTPN$ є локальними системами відліку, на орти яких формується рівновага діючих сил на частинку в кожен момент її положення на поверхні.

Якщо частинка рухається по поверхні $R(u, v)$ не відриваючись від неї, то на орті нормалі N є вектор довжиною F_N - значення сили нормальної реакції:

$$ON := F_N = F_g \cos(\widehat{N, G}) \pm F_c \cos(\widehat{N, n}). \quad (4)$$

Знак "+" або "-" визначає по яку сторону спрямований вектор відцентрової сили $F_c \cos(\widehat{n, N})$ по відношенню до вектора N нормалі поверхні – притискає частинку до поверхні чи відриває від неї.

Звернемо увагу, що від'ємна величина F_N виразу (4) означатиме відрив частинки від поверхні.

Оскільки орт $\mathbf{N}$ є спільним для обох супровідних тригранників $\mathbf{OuvN}$ і $\mathbf{OTPN}$, то вираз (4) є однаковим при формуванні рівноваги діючих сил на частинку в проекціях на орти $\mathbf{u} \equiv \mathbf{R}'_u$ і $\mathbf{v} \equiv \mathbf{R}'_v$ тригранника $\mathbf{OuvN}$ та орти $\mathbf{T}$ і $\mathbf{P}$ тригранника Дарбу $\mathbf{OTPN}$.

Векторне рівняння руху частинки від часу t в проекціях на орти $\mathbf{u} \equiv \mathbf{R}'_u$ і $\mathbf{v} \equiv \mathbf{R}'_v$ тригранника $\mathbf{OuvN}$ буде мати вигляд:

$$\begin{cases} Ou := m W \cos(\widehat{\mathbf{R}'_u, \mathbf{w}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{R}'_u, \mathbf{G}}) - (f F_N + q F_V) \cos(\widehat{\mathbf{R}'_u, \boldsymbol{\tau}}) \\ Ov := m W \cos(\widehat{\mathbf{R}'_v, \mathbf{w}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{R}'_v, \mathbf{G}}) - (f F_N + q F_V) \cos(\widehat{\mathbf{R}'_v, \boldsymbol{\tau}}) \end{cases} \quad (5)$$

а в проекціях на орти $\mathbf{T}$ і $\mathbf{P}$ тригранника Дарбу $\mathbf{OTPN}$:

$$\begin{cases} OT := m W_\tau = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \boldsymbol{\tau}}) - f(F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{N}}) \pm F_c \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}})) - q F_V, \\ OP := m W_n \sin(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{P}}) \end{cases} \quad (6)$$

де: $W = |\mathbf{W}|$ - величина прискорення частинки; $F_g = mg$ - сила тяжіння; $F_V = mV^2 q$ - сила опору повітря (q - парусність); $F_c = mV^2 k$ - відцентрова сила; $W_\tau = \frac{d}{dt}V(t)$, $W_\tau = V \frac{d}{ds}V(s)$ і $W_\tau = V \frac{d}{d\alpha}V(\alpha) k$ - тангенціальне прискорення відповідно у функції незалежних параметрів часу t , дуги s траєкторії та кута α напрямку руху частинки; $W_n = V^2 k$ - нормальне прискорення частинки; k - кривина траєкторії частинки.

З урахуванням виразів W_τ тангенціального прискорення, закон (6) руху частинки можна переписати як у функції довжини дуги s траєкторії:

$$\begin{cases} OT := m V \frac{d}{ds}V(s) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \boldsymbol{\tau}}) - f(F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{N}}) \pm F_c \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}})) - q F_V, \\ OP := F_c \sin(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{P}}) \end{cases} \quad (7)$$

так і у функції кута α напрямку руху частинки:

$$\begin{cases} OT := m V \frac{d}{d\alpha}V(\alpha) k = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \boldsymbol{\tau}}) - f(F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{N}}) \pm F_c \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}})) - q F_V, \\ OP := F_c \sin(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{P}}) \end{cases} \quad (8)$$

Для рухомої частинки, як матеріальної точки, можна знехтувати опором повітря - прийняти значення коефіцієнта $q = 0$. В цьому випадку, закони (5) - (6) руху частинки від часу t відповідно матимуть вигляди:

$$\begin{cases} Ou := m W \cos(\widehat{\bar{R}'_u, \bar{w}}) = F_g \cos(\widehat{\bar{R}'_u, \bar{G}}) - f F_N \cos(\widehat{\bar{R}'_u, \bar{\tau}}) \\ Ov := m W \cos(\widehat{\bar{R}'_v, \bar{w}}) = F_g \cos(\widehat{\bar{R}'_v, \bar{G}}) - f F_N \cos(\widehat{\bar{R}'_v, \bar{\tau}}) \end{cases} \quad (9)$$

та

$$\begin{cases} OT := m W_\tau = F_g \cos(\widehat{\bar{G}, \bar{\tau}}) - f(F_g \cos(\widehat{\bar{G}, \bar{N}}) \pm F_C \cos(\widehat{\bar{n}, \bar{N}})) \\ OP := m W_n \sin(\widehat{\bar{n}, \bar{N}}) = F_g \cos(\widehat{\bar{G}, \bar{P}}) \end{cases} \quad (10)$$

Вибір системи відліку **OuvN** або ж **OTPN** при формуванні законів руху частинки по поверхні впливає на вигляд систем диференціальних рівнянь (5) - (10), але результати їх розв'язку при виборі конкретного незалежного параметра будуть однакові.

Висновки і перспективи. Показано, що орієнтований на комп'ютерну реалізацію метод моделювання руху частинки по вертикальній шорсткій поверхні у функції часу є загальним і результативним.

Застосування супровідних тригранників траєкторії частинки дозволило звести закон руху частинки до системи із двох диференціальних рівнянь, шуканими якими є внутрішні **u, v** - координати поверхні траєкторії частинки. Траєкторія частинки **r** в декартовій системі координат **Oxyz** отримується підстановкою знайдених **u, v** - координат до рівняння **R(u, v)** поверхні.

Список літератури

1. Адамчук В.В. Теория центробежных рабочих органов машин для внесения минеральных удобрений: монография / В.В. Адамчук. - К.: Аграрна наука, 2010. - 178 с.
2. Аладьев В.З. Системы компьютерной алгебры: Maple: Искусство программирования / В.З. Аладьев. - Гродно: Лаборатория Базовых Знаний. - 2006. - 792 с.
3. Пилипака С.Ф. Автоматизація моделювання руху частинки по гравітаційних поверхнях на прикладі похилої площини в системі Maple / С.Ф. Пилипака, А.В. Несвідомін // Прикл. геом. та інж. граф. - К.: КНУБА, 2011. - Вип.86. - С.64-69.

References

1. Adamchuk, V. V. (2010). Teoriya tsentrobezhnykh rabochikh organov mashin dlya vneseniya mineral'nykh udobreniy: monografiya [Theory of centrifugal working bodies of machines for the application of mineral fertilizers]. Kyiv: Agrarna nauka, 178.
2. Alad'yev, V. Z., Boyko, V. K., Rovba, E. A. (2007). Programmirovaniye i razrabotka prilozheniy v Maple [Programming and application development in Maple]. Grodno-Tallin, 458.
3. Pylypaka, S. F., Nesvidomin, A.V. (2011). Avtomatyzatsiia modeliuvannia rukhu chastynky po hravitatsiinykh poverkhniakh na prykladi pokhyloi ploshchyny v systemi Maple [Automation of modeling of particle motion on gravitational surfaces on the example of an inclined plane in the Maple system]. Prykl. heom. ta inzh. hraf., 86, 64-69.

ВЫБОР СОПРОВОДИТЕЛЬНОГО ТРЕХГРАННИКА ДЛЯ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ ЧАСТИЦЫ НА ПОВЕРХНОСТИ

А. В. Несвидомин

Аннотация. Во многих технологических процессах сельскохозяйственного производства имеет место взаимодействие подвижной частицы с шероховатой поверхностью. Определение закономерностей движения частицы по плоскости произвольного положения в трехмерном пространстве позволяет выполнить расчет конструктивно-кинематических параметров рабочих органов.

Компьютерное моделирование движения частицы позволяет заменить громоздкие аналитические преобразования и обеспечить диалоговый режим для проведения необходимых вычислительных экспериментов по анализу движения частицы с различными исходными условиями ее бросания по любой шероховатой поверхности, определенным образом расположенной в пространстве.

Цель исследования - определение сопроводительного трехгранника для компьютерного моделирования траектории частицы на поверхности.

Установлено, что применение сопроводительных трёхгранников траектории частицы позволило свести закон движения частицы к системе из двух дифференциальных уравнений, искомыми каковы являются внутренние u , v - координаты поверхности траектории частицы. Траектория частицы $\mathbf{r}$ в декартовой системе координат $Oxyz$ получается подстановкой найденных u , v - координат в уравнение $\mathbf{R}(u, v)$ поверхности.

Выбор системы отсчета $OuvN$ или $OTPN$ при формировании законов движения частицы по поверхности влияет на вид систем дифференциальных уравнений, но результаты их решению при выборе конкретного независимого параметра будут одинаковы.

Ключевые слова: сопроводительный трехгранник, материальная точка, система отсчета, траектория движения

SELECTION OF THE ACCOMPANYING TRIHEDRON FOR COMPUTER SIMULATION OF THE PARTICLE TRAJECTORY ON THE SURFACE

A. Nesvidomin

Abstract. *In many technological processes of agricultural production there is an interaction of a moving particle with a rough surface. Determining the patterns of motion of a particle in the plane of an arbitrary position in three-dimensional space allows the calculation of structural and kinematic parameters of the working bodies.*

Computer simulation of particle motion allows you to replace cumbersome analytical transformations and provide a dialog mode for the necessary computational experiments to analyze the motion of a particle under different initial conditions of its throwing on any rough surface, which is in some way located in space.

The purpose of the study is to determine the accompanying trihedron for computer modeling of the particle trajectory on the surface.

It is established that the application of the accompanying trihedron of the particle trajectory allowed to reduce the law of particle motion to a system of two differential equations, the sought ones of which are the internal u, v - coordinates of the particle trajectory surface. The trajectory of the particle $\mathbf{r}$ in the Cartesian coordinate system $Oxyz$ is obtained by substituting the found u, v - coordinates to the equation $\mathbf{R}(u, v)$ of the surface.

The choice of the reference system $OuvN$ or $OTPN$ in the formation of the laws of motion of the particle on the surface affects the appearance of systems of differential equations, but the results of their solution when choosing a specific independent parameter will be the same.

Key words: *accompanying trihedron, material point, frame of reference, trajectory*