УДК 51-72 DOI 10.31548/energiya2019.05.180

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ДЕФОРМАЦІЇ В'ЯЗКОГО ТІЛА ПІД ДІЕЮ СИЛ ПОВЕРХНЕВОГО НАТЯГУ

О. П. Зінькевич, кандидат фізико-математичних наук, доцент

В. М. Сафонов, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Національний університет харчових технологій

О. М. Нещадим, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: om.neshchchadym@gmail.com

Анотація. *Серед крайових задач гідродинаміки в'язкої рідини виокремлюється важливий з практичної точки зору клас задач в області із вільною (наперед невідомою) границею, яка визначається в процесі безпосереднього розв'язування. Одним із можливих підходів до розв'язання таких задач в такій області є метод гідродинамічних потенціалів, який переводить основні складності досліджень і числових розрахунків на деякі граничні інтегральні рівняння, які відносяться лише до границі заданої області і враховують граничні умови безпосередньо. Такий підхід надає можливість відразу визначити невідомі величини на самій границі, не обчислюючи їх у всій області. Це вигідно відрізняє метод граничних інтегральних рівнянь від інших методів.*

Метою досліджень була розробка методу чисельного розв'язання задач про рух в'язкої рідини з наперед невідомою границею.

У статті сформульована і розв'язана задача деформації в'язкого еліптичного циліндра під дією сил поверхневого натягу. Використовуються граничні інтегральні рівняння, які розглядаються в сукупності з кінематичною контурною умовою.

Реалізовано алгоритм кроків за часом чисельного розв'язання системи граничних інтегральних рівнянь для задачі в'язкої рідини з наперед невідомою границею і проаналізовано обчислювальні особливості.

На основі проведених досліджень встановлено закономірності процесу деформації в'язкого еліптичного циліндра під дією сил поверхневого натягу в залежності від в'язкості рідини μ і коефіцієнта поверхневого натягу α. Опуклий контур з неперервною кривизною деформується в коло, здійснюючи затухаючі коливання навколо положення рівноваги. Зони стійких синхронних коливань точок контуру навколо положення рівноваги спостерігаються, якщо $0,2<\alpha<3$ при $\mu=0,5$ і $0,1<\alpha<1,6$ при $\mu=0,25$; в обох випадках густина рідини приймалась рівною одиниці.

Рідке тіло досягає положення рівноваги без коливань, якщо $\mu>\alpha$.

Ключові слова: ***ядро, інтервал дискретизації контуру, кривизна, значення інтегралу по Коші, сили поверхневого натягу, еліптичний циліндр***

Актуальність. Широке коло проблем гідромеханіки приводить до постановки задач про відшукання руху в'язкої рідини в області, обмеженою рухомою (вільною) границею. Форма вільної границі заздалегідь невідома, її потрібно визначити за додатковими граничними умовами [1]. Такі задачі виникають в різноманітних практичних застосуваннях, зокрема, в хімічних технологія при виробництві волокнистих світловодів.

Одним із ефективних методів чисельного розв'язання задач про рух в'язкої рідини є метод граничних інтегральних рівнянь. Він дає можливість визначити

швидкість рідини на межі області і координати точок границі в конкретний момент часу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Відомо дуже мало випадків наявності точних аналітичних розв'язків крайових задач для рівнянь Нав'є-Стокса, які описують рух в'язкої рідини. Тому в цій ситуації може йти мова про використання чисельних методів. Для чисельного розв'язання задач про рух в'язкої рідини традиційно застосовують різницеві методи та методи скінченних елементів [2,3]. Проте, ці методи далеко не завжди дають можливість з'ясувати якісні особливості розв'язків. Крім того, часто для отримання наближених розв'язків з високою точністю використовують сітки з великою кількістю вузлів, що суттєво збільшує час розрахунків.

Метод граничних інтегральних рівнянь успішно застосовується в теоретичних дослідженнях і при практичному розв'язуванні плоских крайових задач для рівнянь Нав'є-Стокса [1].

Нині для областей з вільною границею результатів опубліковано мало і такий розділ теорії руху в'язкої рідини вважається далеким до завершення.

Мета дослідження - розробка методів чисельного розв'язання задач про рух в'язкої рідини з наперед невідомою границею.

Матеріали і методи дослідження. Розглядається в'язке циліндричне тіло, яка не піддається стисненню, поперечний переріз якого в момент часу $t \le 0$ заповнює область $D(0) \subset E_2$, обмеженої контуром $L(0)$ з координатами $x_1 = x_1(\sigma, 0)$, $x_2 = x_2(\sigma, 0)$, $0 \le \sigma < a$. Швидкості $\vec{v}$ частинок рідини при $t \le 0$ вважаються нульовими.

Починаючи з моменту часу $t = 0$ до границі рідини $L(0)$ прикладені нормальні сили напруги $\vec{p}_n(\vec{x}, t) = -\alpha\ \kappa(\sigma, t)\vec{n}(\sigma, t)$,

де α – коефіцієнт поверхневого натягу; $\kappa(\sigma, t)$ – кривизна кривої $L(t)$; $\vec{n}(\sigma, t)$ – зовнішня нормаль до $L(t)$.

Масові сили в області D і дотичні напруги на контурі L вважаються рівними нулю.

Під дією сил поверхневого натягу частинки рідини приходять в рух, утворюючи рухливий контур $L(t)$, який описується рівняннями $x_k = x_k(\sigma, t)$, $k = 1, 2$.

Необхідно визначити границю $L(t)$ рідкого тіла, а також швидкість $\vec{v}(\vec{y}, t)$ частинок рідкого тіла і гідродинамічний тиск $p(\vec{y}, t)$, що задовольняють в $D(t)$ системі рівнянь Нав'є-Стокса

$$\begin{cases} \mu\ \Delta\vec{v}(\vec{y}, t) - \gamma \dfrac{\partial \vec{v}(\vec{y}, t)}{\partial t} - \operatorname{grad} p(\vec{y}, t) = 0, \\ \operatorname{div} \vec{v}(\vec{y}, t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Тут $\mu = \text{const} > 0$ і $\gamma = \text{const} > 0$ – відповідно в'язкість і густина рідини.

Функції $x_1 = x_1(\sigma, t)$, $x_2 = x_2(\sigma, t)$ зв'язані з розв'язком системи (1) кінематичним співвідношенням

$$\vec{v}(\vec{x}(\sigma, t), t) = \frac{\partial \vec{x}(\sigma, t)}{\partial t} \equiv \vec{v}_0(\sigma, t),$$

де $\vec{v}(\vec{x}, t)$ – вектор швидкості частинок рідини контуру $L(t)$; $\vec{v}_0(\sigma, t)$ – вектор

швидкості точок контуру $L(t)$; $L(t)$ – вільний контур, і на ньому діють сили поверхневого натягу, які утримують на контурі одні і ті ж самі частинки рідини.

Враховуючи властивості гідродинамічних потенціалів $[1]$, задача зводиться до системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\theta_1(\sigma_0,t)+\int\limits_{L(t)}\theta_1(\sigma,t)\frac{\cos\omega_0(t)}{2\pi r(t)}ds+F_1(\sigma_0,t)=0;\\ &-\frac{1}{2}\theta_2(\sigma_0,t)+\int\limits_{L(t)}\theta_1(\sigma,t)\frac{\sin\omega_0(t)}{2\pi r(t)}ds+F_2(\sigma_0,t)=0;\end{aligned} \tag{2}$$

$$\frac{\partial x_1(\sigma,t)}{\partial t}=\theta_1(\sigma,t)n_1(\sigma,t)+\theta_2(\sigma,t)n_2(\sigma,t);\ \frac{\partial x_2}{\partial t}=-\theta_1 n_2+\theta_2 n_1,$$

при початкових умовах $\theta_1(\sigma,0)=\theta_2(\sigma,0)=0,\ \vec{x}(\sigma,0)=\vec{x}_0(\sigma).$ Тут

$$F_i(\sigma_0,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{L(\tau)}\left[\theta_2(\sigma,\tau)H_{i2}+\left(\theta_1(\sigma,\tau)-\frac{\alpha}{2\mu}\right)H_{i1}+\gamma\sum_{k=1}^{2}\theta_1(\sigma,\tau)\theta_k(\sigma,\tau)G_{ik}\right]ds;$$

ядра $H_{ij},\ G_{ij},\ (i,j=1,2)$ представлені в роботі [4].

Результати досліджень та їх обговорення. Ядро другого доданку першого із інтегральних рівнянь (2) має вигляд:

$$\frac{\cos\omega_0(t)}{r}=\frac{r_1\ x_2'(\sigma_0,t)-r_2\ x_1'(\sigma_0,t)}{\left(\left(x_1'(\sigma_0,t)\right)^2+\left(x_2'(\sigma_0,t)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{3}$$

де $r_i=x_i(\sigma,t)-x_i(\sigma_0,t),\ \ i=1,2.$

Якщо $\sigma\neq\sigma_0$, то вираз (3) є неперервною функцією відносно σ і σ_0. Нехай σ і σ_0 прямують до спільної границі σ_1. Припускаючи неперервність кривизни контуру і застосовуючи формулу Тейлора маємо:

$$\lim_{\substack{\sigma\to\sigma_1\\ \sigma_0\to\sigma_1}}\frac{\cos\omega_0(t)}{r}=\frac{1}{2}\frac{x_1'(\sigma_1,t)x_2'(\sigma_1,t)\left[x_2''(\sigma_1,t)x_1'(\sigma_1,t)-x_2'(\sigma_1,t)x_1''(\sigma_1,t)\right]}{\left(\left(x_1'(\sigma_1,t)\right)^2+\left(x_2'(\sigma_1,t)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \tag{4}$$

тобто, $\lim\limits_{\substack{\sigma\to\sigma_1\\ \sigma_0\to\sigma_1}} \dfrac{\cos\omega_0(t)}{r} = \dfrac{1}{2}\kappa(\sigma_1,t)$, $\kappa(\sigma_1,t)$ – кривизна контуру $L(t)$.

Далі, проаналізуємо ядра $H_{ij}^k(\sigma_0,\sigma)$ і $G_{ij}^k(\sigma_0,\sigma)$ $(i,j=1,2)$, наведених в $[4]$.

Виконуючи тригонометричні перетворення, H_{11}^k представимо у вигляді

$$H_{11}^k = \tilde{q}_1 \frac{\left(2\cos^2\omega - 1\right)\cos\omega_0}{2\pi r} - \left(\tilde{q}_1 - e^{-z_k}\right)\frac{2\sin\omega\cos\omega\sin\omega_0}{2\pi r}.$$

Враховуючи (4), а також те, що при

$$r = \sqrt{\left(x_1(\sigma,t) - x_1(\sigma_0,t)\right)^2 + \left(x_2(\sigma,t) - x_2(\sigma_0,t)\right)^2} \to 0$$

$$\lim_{\sigma\to\sigma_0}\omega = \lim_{\sigma\to\sigma_0}\omega_0 = \frac{\pi}{2}\operatorname*{sgn}\lim_{\sigma\to\sigma_0}(\sigma-\sigma_0), \quad \lim_{r\to 0} z_k = \lim_{r\to 0}\frac{\gamma\, r^2}{4\mu(t_k - t_{k-1})} = 0,$$

$$\lim_{z_k\to 0}\tilde{q}_1 = \lim_{z_k\to 0}\frac{1-e^{-z_k}}{z_k} = \lim_{z_k\to 0}\left(\frac{1}{z_k} - \frac{1}{z_k}\left(1 - \frac{z_k}{1!} + \frac{z_k^2}{2!} - \ldots\right)\right) = 1, \ \lim_{z_k\to 0}\mathring{a}^{-z_k} = 1,$$

граничний вираз функції H_{11}^k набуває вигляду

$$\lim_{r\to 0} H_{11}^k = -\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0}\frac{\cos\omega_0}{r} = -\frac{\kappa}{4\pi}.$$

Аналогічно і для інших H_{ij}^k:

$$\lim_{r\to 0} H_{12}^k = \lim_{r\to 0} H_{21}^k = 0, \quad \lim_{r\to 0} H_{22}^k = \frac{\kappa}{2\pi}.$$

При $r \neq 0$ визначений інтеграл $\int\limits_0^{e^{-z_k}} \dfrac{dt}{\ln t}$, який входить в G_{ij}^k, збіжний, тому що $z_k > 0$, $0 \le t \le e^{-z_k} < 1$.

Якщо $r \to 0$, то $0 \le t \le e^{-z_k} \le 1$, тому інтеграл $\int\limits_0^{e^{-z_k}} \dfrac{dt}{\ln t}$ розбіжний в точці $t = 0$; в цьому випадку під інтегралом розуміють його головне значення (V.p.) за Коші.

Отже, ядра G_{ij}^k при $r \to 0$ мають вигляд:

$$\lim_{r\to 0} G_{11}^{k} = \frac{1}{8\pi\mu}\left(1 - \text{V.p.}\int_0^1 \frac{dt}{\ln t}\right), \ \lim_{r\to 0} G_{12}^{k} = 0,$$

$$\lim_{r\to 0} G_{22}^{k} = \frac{1}{8\pi\mu}\left(1 - 3\text{V.p.}\int_0^1 \frac{dt}{\ln t}\right), \ \lim_{r\to 0} G_{21}^{k} = 0.$$

Далі, використовуючи алгоритм викладений в $[4]$, проведемо розрахунок вільного контуру $L(t)$. На ньому діють сили поверхневого натягу, які утримують на контурі одні і ті ж самі частинки рідини.

Вхідними величинами розрахунків є: α – коефіцієнт поверхневого натягу; γ – щільність; μ – в'язкість рідини; h – малий крок в часі (приріст переходу з одного часового проміжку на інший); початковий $x_i(\sigma, t_0)$, $i = 1,2$ розрахунковий контур, заданий табличним або аналітичним способом.

При чисельному аналізі нестаціонарних процесів необхідно зберігати усю "історію" його розвитку.

Інтегральне рівняння розв'язується, шляхом переходу до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} R(\sigma_1,\sigma_1,t) & \dots & R(\sigma_1,\sigma_n,t) \\ \vdots & & \vdots \\ R(\sigma_n,\sigma_1,t) & \dots & R(\sigma_n,\sigma_n,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(\sigma_1,t) \\ \vdots \\ \theta_1(\sigma_n,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(\sigma_1,t) \\ \vdots \\ F_1(\sigma_n,t) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Система (5) будується на кожному часовому проміжку $t = t_k$.

Кількість алгебраїчних рівнянь відповідає числу точок дискретизації границі заданої області. Вибір довжини інтервалу дискретизації контуру заданої області обчислюється за формулою $\Delta\sigma = 2\pi/n$, де n число точок дискретизації контуру.

При формуванні лівої частини співвідношення (5) необхідно розрізняти два випадки: $i = j$ (формування діагональних елементів) і $i \neq j$ (формування поза діагональних елементів) . Тут i – номер рядка; j – номер стовпця матриці.

У першому випадку коефіцієнти матриці мають вид:

$$R(\sigma_i,\sigma_i,t)=-\frac{1}{2}+\frac{x_1'\cdot x_2'\left[x_1'\cdot x_2''-x_1''\cdot x_2'\right]}{n\left[\left(x_1'\right)^2+\left(x_2'\right)^2\right]^{1/2}},$$

де $\tilde{o}_k'(\sigma_i,t)\equiv\frac{\partial x_k}{\partial\sigma}$; $\tilde{o}_k''(\sigma_i,t)\equiv\frac{\partial^2 x_k}{\partial\sigma^2}$; $(k=1,2)$;

в другому випадку маємо

$$R(\sigma_i,\sigma_j,t)=\frac{r_1\ x_2'(\sigma_i,t)-r_2\ x_1'(\sigma_i,t)}{n\cdot\sum_{k=1}^{2}\left[x_k(\sigma_j,t)-x_k(\sigma_i,t)\right]^2}\cdot\left(\frac{\left[x_1'(\sigma_j,t)\right]^2+\left[x_2'(\sigma_j,t)\right]^2}{\left[x_1'(\sigma_i,t)\right]^2+\left[x_2'(\sigma_i,t)\right]^2}\right)^{1/2},$$

де $r_k=x_k(\sigma_j,t)-x_k(\sigma_i,t)$, $(k=1,2)$.

На початковому етапі розрахунків, зважаючи на малу величину $h=t_1-t_0=t_1$ припустимо, що початковий контур $L(0)$ не зазнав великих змін, тобто $L(1)\cong L(0)$.

Обчислення стовпця вільних членів $F_1(\sigma_i,t)$ системи (5) виконується за формулою

$$F_1(\sigma_i,t_1)=\frac{\alpha}{2\mu}\int_{L(t_1)}H_{11}^k(\sigma_i,\sigma)ds.$$

Розв'язком системи (5) є $\theta_1(\sigma_i,t_1)$ – нормальна складова вектора швидкості точок контуру $\left(i=\overline{1,n}\right)$.

Для визначення $\theta_2(\sigma_i,t_1)$ (дотичної складової вектора швидкості точок контуру) скористаємося формулою

$$\theta_2(\sigma_i,t_1)=\int_{L(t_1)}\theta_1(\sigma,t_1)\frac{\sin\omega_0(t_1)}{\pi r(t_1)}ds+2F_2(\sigma_i,t_1),$$

$$F_2(\sigma_i,t_1)=\int_{L(t_1)}\left(\theta_1(\sigma,t_1)-\frac{\alpha}{2\mu}\right)H_{21}^k(\sigma_i,\sigma)ds.$$

Далі, після визначення $\theta_i(\sigma_i,t_1)$ і $\tilde{o}_i(\sigma,t_2)$, обчислення $F_1(\sigma_i,t_k)$, $F_2(\sigma_i,t_k)$ для часу $t_k > t_1$ виконується за формулами, які наведено в $[4]$, а координати контуру знаходяться так:

$$\tilde{o}_1(\sigma_i,t_{k+1}) \approx \tilde{o}_1(\sigma_i,t_k) + \frac{h\left(\theta_1(\sigma_i,t_k)x_2'(\sigma_i,t_k) + \theta_2(\sigma_i,t_k)x_1'(\sigma_i,t_k)\right)}{\sqrt{\left[x_1'(\sigma_i,t_k)\right]^2 + \left[x_2'(\sigma_i,t_k)\right]^2}},$$

$$\tilde{o}_2(\sigma_i,t_{k+1}) \approx \tilde{o}_2(\sigma_i,t_k) + \frac{h\left(-\theta_1(\sigma_i,t_k)x_1'(\sigma_i,t_k) + \theta_2(\sigma_i,t_k)x_2'(\sigma_i,t_k)\right)}{\sqrt{\left[x_1'(\sigma_i,t_k)\right]^2 + \left[x_2'(\sigma_i,t_k)\right]^2}}.$$

Розрахунок завершується , якщо $\left|x_i(\sigma,t_{k+1}) - x_i(\sigma,t_k)\right| \le \varepsilon$.

Числовий приклад. Розглянемо еліптичний циліндр. Його перерізом площиною, перпендикулярною осі циліндра, є еліпс. Нехай він описується в момент часу $t=0$ рівняннями $\tilde{o}_1 = \tilde{o}_1(\sigma,0) = 2\cos\sigma$, $\tilde{o}_2 = \tilde{o}_2(\sigma,0) = \sin\sigma$ $(0 \le \sigma < 2\pi)$. Вивчимо деформацію еліпса під дією сил поверхневого натягу при $t > 0$.

На рис.1 зображена форма контуру $L(t)$ в різні моменти часу при $\alpha = 1$; $\mu = 0{,}5$; $\gamma = 1$ (табл. 1.). Крива 1 – початкове положення $(t=0)$; крива 2 – положення контуру $L(t)$ у момент часу $t = 2{,}6$; крива 3 – $t = 4{,}8$; крива 4 – положення рівноваги (коло радіусу $\sqrt{2}$).

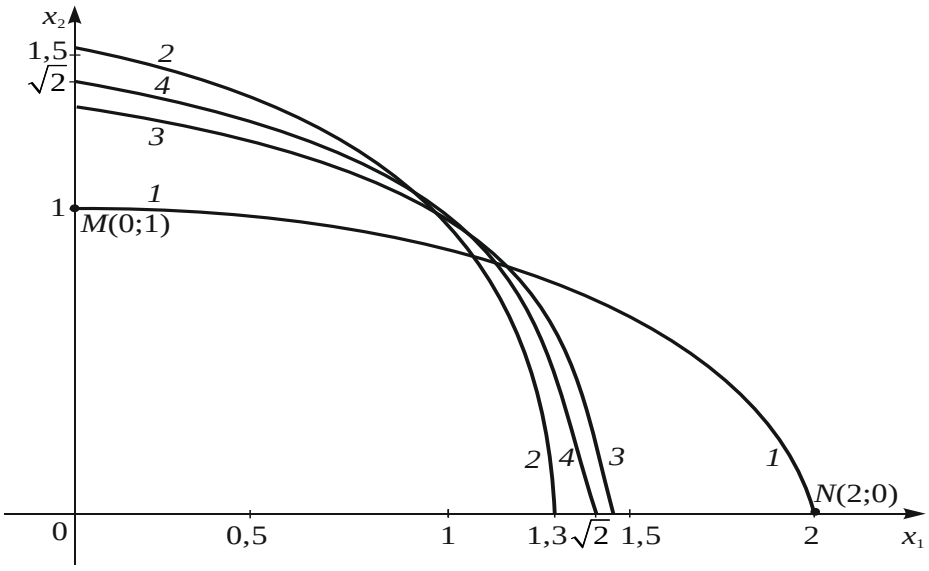

Рис. 1. Форма вільної границі в різні моменти часу

Простежимо рух контуру на прикладі точок M і N. Як видно із рис. 1, в момент $t=0$ кривизна κ кривої в точці N більша, ніж в точці M. При $t \geq 0$ точка N починає свій рух у бік зменшення більшої осі еліпса, точка M в бік зростання малої осі. При цьому кривизна кривої в околі точки $\kappa(\mathrm{N})$ зменшується, а $\kappa(\grave{\mathrm{I}})$ збільшується.

У момент часу $t=2{,}6$ $\kappa(M)$ стає переважаючою, тобто $\kappa(M)>\kappa(\mathrm{N})$ і точка M починає свій рух у бік зменшення вісі $\tilde{o}_2$ рідкого тіла, N у бік зростання вісі $\tilde{o}_1$ рідкого тіла. Цей процес повторюється, поки контур не займе положення рівноваги. В цьому випадку κ в усіх точках контуру однакова.

На рис. 2 зображено траєкторії даних точок M і N біля положення рівноваги $\left(\tilde{o}_1^2+\tilde{o}_2^2=2\right)$ для $\alpha=1{,}6$; $\mu=0{,}5$; $\gamma=1$. Бачимо, що відхилення точок M і N від положення рівноваги з часом зменшується, тобто коливання затухаючі. Спостерігаємо синхронність проходження точками M і N положення рівноваги в розглянуті моменти часу. Період затухаючих коливань з часом зменшується.

1. Деформація еліпса під дією сил поверхневого натягу

Час	$\sigma=0$		$\sigma=\pi/10$		$\sigma=\pi/5$	
	$\tilde{o}_1=x_1(\sigma,t)$	$\tilde{o}_2=x_2(\sigma,t)$	$\tilde{o}_1=x_1(\sigma,t)$	$\tilde{o}_2=x_2(\sigma,t)$	$\tilde{o}_1=x_1(\sigma,t)$	$\tilde{o}_2=x_2(\sigma,t)$
0	2,0	0,0	1,9021	0,3090	1,6180	0,5878
0,5	1,8906	0,0	1,8313	0,2856	1,5934	0,6030
1,5	1,4764	0,0	1,4530	0,2431	1,3229	0,6141
2,0	1,3458	0,0	1,3278	0,2412	1,2245	0,6215
2,6	1,2999	0,0	1,2841	0,2403	1,1895	0,6277
3,5	1,3677	0,0	1,3495	0,2370	1,2375	0,6254
4,0	1,4136	0,0	1,3936	0,2345	1,2695	0,6233
4,5	1,4390	0,0	1,4184	0,2310	1,2869	0,6223
4,8	1,4431	0,0	1,4228	0,2285	1,2896	0,6223
5,5	1,4315	0,0	1,4125	0,2222	1,2808	0,6242
6,0	1,4175	0,0	1,3997	0,2175	1,2700	0,6272
6,5	1,4073	0,0	1,3905	0,2129	1,2614	0,6306
7,2	1,4029	0,0	1,3871	0,2058	1,2556	0,6365
8,0	1,4061	0,0	1,3913	0,1962	1,2531	0,6449
8,7	1,4101	0,0	1,3942	0,1898	1,2479	0,6545

Продовження табл. 1.

Час	$\sigma = 3\pi/10$		$\sigma = 2\pi/5$		$\sigma = \pi/2$	
	$\tilde{o}_1 = x_1(\sigma,t)$	$\tilde{o}_2 = x_2(\sigma,t)$	$\tilde{o}_1 = x_1(\sigma,t)$	$\tilde{o}_2 = x_2(\sigma,t)$	$\tilde{o}_1 = x_1(\sigma,t)$	$\tilde{o}_2 = x_2(\sigma,t)$
0	1,1756	0,8090	0,6180	0,9511	0,0	1,0
0,5	1,1616	0,8470	0,6094	0,9831	0,0	1,0268
1,5	1,0229	0,9868	0,5537	1,2497	0,0	1,3385
2,0	0,9761	1,0271	0,5496	1,3244	0,0	1,4799
2,6	0,9758	1,0451	0,5463	1,3941	0,0	1,5321
3,5	0,9781	1,0233	0,5435	1,3406	0,0	1,4596
4,0	0,9929	1,0070	0,5441	1,3405	0,0	1,4131
4,5	1,0023	0,9970	0,5450	1,2852	0,0	1,3883
4,8	1,0048	0,9944	0,5453	1,2821	0,0	1,3845
5,5	1,0042	0,9953	0,5448	1,2911	0,0	1,3961
6,0	1,0019	0,9976	0,5437	1,3021	0,0	1,4099
6,5	1,0008	0,9985	0,5421	1,3105	0,0	1,4200
7,2	1,0030	0,9957	0,5390	1,3147	0,0	1,4239
8,0	1,0096	0,9880	0,5337	1,3135	0,0	1,4197
8,7	1,0165	0,9793	0,5266	1,3132	0,0	1,4162

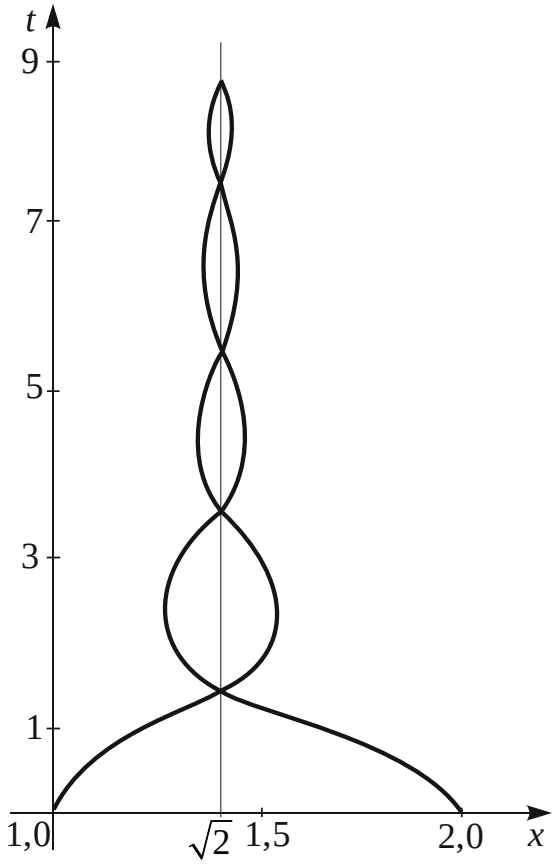

Рис. 2. Траєкторії точок M і N біля положення рівноваги

У табл. 2 $(\mu = 0,5;\ \gamma = 1)$ і табл. 3 $(\mu = 0,25;\ \gamma = 1)$ наведено інтервали зміни α, при яких спостерігається синхронне число проходжень точками контуру положення рівноваги. При $\mu = 0,5$ коливання спостерігаються, якщо $0,2 < \alpha < 3$; при $\mu = 0,25$, якщо $0,1 < \alpha < 1,6$.

Порівняння результатів табл. 2 і 3 показує істотний вплив в'язкості на кількість проходжень положення рівноваги. Із збільшенням в'язкості коливання спостерігаються і при значно більших значеннях коефіцієнта поверхневого натягу.

2. Вплив в'язкості на кількість проходжень положення рівноваги				3. Вплив в'язкості на кількість проходжень положення рівноваги		
$\mu = 0,5$	$\gamma = 1,0$	$0 \le t$		$\mu = 0,25$	$\gamma = 1,0$	$0 \le t$
Інтервал зміни α	Кількість синхронних проходжень точками M і N положення рівноваги $\left(\tilde{o}_1^2 + \tilde{o}_2^2 = 2\right)$	Інтервал зміни α		Інтервал зміни α	Кількість синхронних проходжень точками M і N положення рівноваги $\left(\tilde{o}_1^2 + \tilde{o}_2^2 = 2\right)$	Інтервал зміни α
0 – 0,2	0	3,0–∞		0 – 0,1	0	1,6–∞
0,2–0,4	1	2,5–3,0		0,1–0,25	1	1,4–1,6
0,4–0,6	2	2,2–2,5		0,25–0,41	2	0,8–1,4
0,6–1,0	3	1,75–2,2		0,41–0,8	3	0,41–0,8
1,0-1,1	4	1,7–1,75				
1,1-1,7	5	1,1–1,7				

Висновки і перспективи. На основі чисельних розрахунків проведено аналіз руху рідини залежно від μ і α.

Встановлено: 1) опуклий контур з неперервною кривизною деформується в коло, здійснюючи затухаючі коливання навколо положення рівноваги;

2) зони стійких синхронних коливань точок контуру навколо положення рівноваги спостерігаються, якщо $0,2 < \alpha < 3$ при $\mu = 0,5$ і $0,1 < \alpha < 1,6$ при $\mu = 0,25$; у обох випадках $\gamma = 1$;

3) рідке тіло досягає положення рівноваги без коливань, якщо $\mu > \alpha$.

Список літератури

1. Белоносов С. М. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса / С.М. Белоносов, К.А. Черноус – М. Наука, 1985. – 312 с.

2. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.

3. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.1 / К. Флетчер. – М.: Мир, 1991. – 418 с.

4. Зінькевич О.П. Математичне моделювання деформації границі в'язкого тіла методом гідродинамічних потенціалів / О.П. Зінькевич, В.М. Сафонов, О.М. Нещадим // Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». – 2017. – Вип. 261. – С. .263-272.

References

1. Belonosov, S. M., Chernous, K. A. (1985). Krayeviye zadachi dlia uravnenii Navie-Stoksa [Boundary value problems for the Navier-Stokes equations]. Moskow: Nauka, 312.

2. Rouch, P. (1980). Vychislitelnaya hidrodynamica [Computational fluid dynamics]. Moskow: Mir, 616.

3. Fletcher, K (1991). Vychislitel'nyye metody v dinamike zhidkostey. [Computational methods in fluid dynamics] Vol. 1. Moskow: Mir, 418.

4. Zinkevich, O. P., Safonov, V. M., Neshchadym, O. M. (2017). Matematychne modeliuvannia deformatsii granytsi viazkogo tila metodom hidrodynamichnykh potentsialiv [Mathematical modeling of the deformation of the boundary of a viscous body by the method of hydrodynamic potentials]. Naukovyi visnyk NUBiP Ukrainy. Seriia "Tekhnika ta enerhetyka APK", 261, 263-272.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМАЦИИ ВЯЗКОГО ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

А. П. Зинькевич, В. М. Сафонов, А. М. Нещадим

Аннотация. *Среди краевых задач гидродинамики вязкой жидкости выделяется важный с практической точки зрения класс задач в области со свободной (заранее неизвестной) границей, которая определяется в процессе непосредственного решения. Одним из возможных подходов к решению таких задач в такой области является метод гидродинамических потенциалов, который переводит основные сложности исследований и численных расчетов на некоторые граничные интегральные уравнения, относящиеся только к границе заданной области и учитывающие краевые условия непосредственно. Такой подход позволяет сразу определить неизвестные величины на самой границе, не вычисляя их по всей области. Это выгодно отличает метод граничных интегральных уравнений от других методов.*

Целью исследований была разработка метода численного решения задач о движении вязкой жидкости с заранее неизвестной границей.

В статье сформулирована и решена задача о деформации вязкого эллиптического цилиндра под действием сил поверхностного натяжения.

Используются граничные интегральные уравнения, которые рассматриваются в совокупности с кинематическим контурным условием.

Реализован алгоритм шагов по времени численного решения системы граничных интегральных уравнений для задачи движения вязкой жидкости с заранее неизвестной границей и проанализированы вычислительные особенности.

На основании проведенных исследований установлены закономерности процесса деформирования вязкого эллиптического цилиндра под действием сил поверхностного натяжения в зависимости от вязкости жидкости μ *и коэффициента поверхностного натяжения* α. *Выпуклый контур с непрерывной кривизной деформируется в круг, совершая затухающие колебания вокруг положения равновесия. Зоны устойчивых синхронных колебаний точек контура вокруг положения равновесия наблюдаются, если* $0,2<\alpha<3$ *при* $\mu=0,5$ *и* $0,1<\alpha<1,6$ *при* $\mu=0,25$.

в обоих случаях плотность жидкости принималась равной единице.

Жидкое тело достигает положения равновесия без колебаний, если $\mu>\alpha$.

Ключевые слова: ***ядро, интервал дискретизации контура, кривизна, значение интеграла по Коши, силы поверхностного натяжения, эллиптический цилиндр***

NUMERICAL ANALYSIS OF DEFORMATION OF A VISCOUS BODY UNDER THE INFLUENCE OF FORCES OF SURFACE TENSION

O. Zinkevych, V. Safonov, O. Neshchadym

Abstract. *Among the boundary value problems of hydrodynamics of viscous fluid, an important from a practical point of view the class of tasks in the region with a free (previously unknown) boundary, which is determined in the process of direct solving, is distinguished. One of the possible approaches to solving such problems in such an area is a method of hydrodynamic potentials, which translates the basic complexity of research and numerical calculations into certain boundary integral equations, which relate only to the boundary of a given region and take into account the boundary conditions directly. This approach allows you to immediately identify unknown values at the boundary without calculating them in the entire area. This advantage distinguishes the method of boundary integral equations from other methods.*

The aim of the research was to develop a method for numerical solution of the problems of the viscous fluid movement with a previously unknown boundary.

The problem of deformation of a viscous elliptical cylinder under the action of forces of surface tension is formulated and solved in the article. The boundary integral equations are used, which are considered together with the kinematic contour condition.

An algorithm for the steps of the numerical solution of the system of boundary integral equations for the problem of viscous fluid with a previously unknown boundary was implemented and computational features were analyzed.

On the basis of the conducted research the regularities of the deformation process of the viscous elliptical cylinder under the influence of the forces of surface tension,

depending on the viscosity of the liquid μ *and the coefficient of surface tension* α*, were established. A convex contour with continuous curvature deforms into a circle, carrying out fading oscillations around the equilibrium position. Zones of stable synchronous oscillations of points of the contour around the equilibrium position are observed, if* $0,2<\alpha<3$, $\mu=0,5$ *and when* $0,1<\alpha<1,6$, $\mu=0,25$*; in both cases, the density of the liquid was taken equal to one.*

The liquid body reaches the equilibrium position without oscillation, if $\mu>\alpha$.

Key words: ***nucleus, contour discretization interval, curvature, value of the Cauchy integral, surface tension forces, elliptic cylinder***