

Численное определение собственных чисел матриц большой размерности с комплексно сопряженными собственными числами

Математический аппарат матричных вычислений все более широко используется при формировании и расчете математических моделей в различных отраслях, в числе которых находятся инфокоммуникации, включая цифровую обработку сигналов, а также макроэкономика, биология (моделирование биологических объектов и систем) и др. При этом использование матричного представления является составляющей описания как статических состояний, так и динамических процессов исследуемого объекта или системы, в том числе на основе математического аппарата дифференциальных уравнений.

Характерной чертой анализируемых математических моделей является, как правило, их большая размерность. Рост размерности связан с повышением требований к точности математических моделей, более глубоким изучением исследуемых процессов, объектов и систем, а соответственно и более емким их описанием, повышением требований к точности (адекватности) математического описания, анализа и моделирования. В инфокоммуникациях, в компьютерной инженерии, ярким примером, поясняющим рост размерности используемых математических моделей, является, например, экспоненциальное на отдельных временных интервалах увеличение размерности сетей передачи трафика и числа элементов сети. Существенно возрастают также объемы передаваемого трафика, что связано как с потребностями потребителей, так и новыми возможностями и все более широким распространением последних технологий передачи сигналов. При этом задача управления сетью, задача маршрутизации, управления динамикой трафика становится все более сложной.

Нейронную сеть биологического объекта, как известно, можно рассматривать как совокупность элементов обменивающихся электрическими импульсами. Данный подход позволяет использовать аппарат дифференциальных уравнений для описания динамики нейронной сети. Одним из наиболее интересных примеров многосвязной нейронной сети со сложным трафиком и многовариантной маршрутизацией сигналов является мозг человека. Даже оставляя за рамками математического моделирования попытки сформировать математическую модель процесса мышления (в простейшем случае - процесс выбора решения из некоторого множества вариантов) и описывая мозг как совокупность элементов - систему с передачей электрических сигналов, приходим к математической модели сверх большой размерности.

Отдельного рассмотрения заслуживают системы искусственного интеллекта [5,6]. Одним из важных направлений в создании систем искусственного интеллекта является разработка управляющих комплексов сложными динамическими системами, когда принятие решений представляет собой непростую многовариантную задачу. Сложность решения такой задача может быть связана с необходимостью учета (выбора значений) ряда факторов, таких, например, как выбор оптимальной стратегии при неопределенном интервале времени функционирования (времени исследования динамики системы), выбора параметров имеющих существенно случайный характер и т.д. В отдельную группу можно выделить факторы, математическое описание которых связано с определенными трудностями их математической формализации - в частности, выбор и использование математического аппарата (нечеткие множества, асимптотические системы с малыми параметрами и т.д.). Примером является моделирование принятия решений индивидуумом с учетом эмоциональных, социально-мотивированных, психологических влияний.

Во всех вышеперечисленных случаях решение задач моделирования связано с анализом и расчетом математических моделей большой и сверхбольшой размерности, что требует технологически высокого уровня используемых средств вычислительной техники и соответствующего программного обеспечения.

Именно большая размерность математических моделей в сочетании с их жесткостью делает невозможным не только нахождение аналитического решения, но и зачастую численный расчет даже с использованием самых современных вычислительных комплексов большой производительности. Следует отметить, что свойство жесткости (т.е. когда математическая модель для достижение определенной степени адекватности вынуждена описывать в одном блоке физические процессы, динамика которых содержит как быстрые, так и медленные флуктуации) является характерным для систем большой и сверх большой размерности, анализ которых проводится на значительных временных интервалах. В этом случае естественное протекание процессов в системах, естественная природа (динамика) поведения систем в целом допускают минимальную корреляцию локальных флуктуаций отдельных фрагментов системы в микро временных интервалах и динамику системы (объекта) как единого целого на макро временном интервале. Для численного расчета соответствующей математической модели такая ситуация может создать неразрешимую проблему даже для вычислительных комплексов произвольно большой производительности, поскольку накопление вычислительной погрешности, погрешности связанной с ограниченностью разрядной сетки вычислительного устройства, приведет к неверному решению [1].

Основной вычислительной задачей при работе с матричными математическими моделями является, как правило, вычисление собственных чисел заданных матриц. Как известно, определять аналитически решение данной задачи для матриц $A = \|a_{ik}\|_{1^n}$ большой размерности ($n \gg 1$) не представляется возможным. Численные же методы в основном характеризуются резким, часто экспоненциальным, ростом объема вычислений при увеличении n . Ряд численных алгоритмов не всегда работоспособны в случае, если собственные числа матрицы существенно различны по модулю.

В [2] была сформулирована теорема на основе которой можно вычислять собственные числа матриц произвольно большой размерности с помощью итерационного численного алгоритма. При этом следует отметить две особенности найденного подхода. Первая заключается в том, что объем вычислений не растет экспоненциально при увеличении размерности исходной матрицы. Второй особенностью является «устойчивость» алгоритма к свойству жесткости матрицы, т.е. для жесткой матрицы (матрицы, для которой соответствующая ей система обыкновенных дифференциальных уравнений является жесткой) сходимость итерационного ряда не только не уменьшается с увеличением степени жесткости, но и в большинстве контрольных примеров существенно возрастала.

Ряд последующих работ - [2] и др. были сосредоточены на изучении матриц с действительными элементами и определении действительных собственных чисел.

Разработка совокупности прикладных вычислительных алгоритмов реализующих теорему 2 [2] представляет собой отдельный самостоятельный этап исследований, учитывая ряд отдельных факторов под которые может быть оптимизирован алгоритм. В частности, к таким факторам могут относиться следующие:

- имеет ли исследователь дело с математической моделью, матрица которой имеет только действительные собственные числа или же ряд собственных чисел являются комплексно-сопряженными или комплексными,
- является исходная матрица жесткой или нет,
- какие требования заданы к точности вычислений и т.д.

Разработке задач, относящихся к кругу вопросов указанных выше были посвящены работы [3, 4] и др.

Одним из аспектов, важных для инженерного использования подхода, вытекающего из теоремы 2 [2] является определение мнимых частей собственных чисел.

В настоящем сообщении приводится обоснование следующей аналитической формулы вычисления мнимых частей собственных чисел матриц (на примере матрицы второго порядка) когда действительные части собственных чисел матриц известны (были

определены на основании вышеприведенной теоремы 2 [2] или определены каким-либо иным способом):

$$\operatorname{Im} \lambda_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{Sp} (A^2) - (\operatorname{Re} \lambda_1)^2} \quad (1)$$

Справедливость формулы (1) нетрудно доказать для матрицы второго порядка, обобщив затем результат для матриц произвольной размерности. Приведем доказательство формулы (1) для матрицы второго порядка.

1. Из теоремы 3 [5] которая утверждает, что «Если $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ - все характеристические числа (с учетом кратностей) матрицы A , а $g(\mu)$ - некоторый скалярный многочлен, то $g(\lambda_1), g(\lambda_2), \dots, g(\lambda_n)$ - все характеристические числа матрицы $g(A)$. » следует, что «если матрица A имеет характеристические числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, то матрица A^k имеет характеристические собственные числа $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k$ ($k = 0, 1, 2, 3, \dots$).».
2. Известно [5], что

$$\operatorname{Sp} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (2)$$

3. Из вышеприведенного следствия теоремы 3 [5] и формулы (2) следует, что если $\lambda_1 = a + b \cdot j$ и $\lambda_2 = a - b \cdot j$ (где $j = \sqrt{-1}$) представляют собой собственные числа матрицы второго порядка A , то

$$\operatorname{Sp} (A^2) = (\operatorname{Re} \lambda_1)^2 + (\operatorname{Im} \lambda_1)^2 \quad (3)$$

Очевидно, что формула (1) следует из формулы (3).

Из формулы (1) следует, что при определении собственных чисел матриц, в случае, когда они являются комплексно-сопряженными, на основании теоремы 2 [2] точность определения действительных и мнимых частей собственных чисел будет строго коррелирована: мнимые части собственных чисел будут определяться с некоторой погрешностью ε , величина которой будет зависеть от точности определения действительных частей собственных чисел, т.е.

$$\varepsilon (\operatorname{Im} \lambda_i) = f(\varepsilon (\operatorname{Re} \lambda_i)). \quad (4)$$

Формула (4) отражает следующую особенность данного метода определения собственных чисел матриц: погрешность при нахождении мнимой части λ_i не зависит от погрешности вычисления действительных частей других собственных чисел матрицы.

Данная особенность метода важна при работе с матрицами большой и произвольно большой размерности, поскольку позволяет избежать проблемы накопления «аналитической составляющей» погрешности при последовательном определении собственных чисел.

Отмеченный аспект необходимо учитывать в прикладных алгоритмах, реализующих теорему 2 [2], особенно, если формула (1) используется для определения типа (или проверки уже определенного типа) собственного числа – является оно действительным или же комплексно-сопряженным. Важность вопроса определения типа собственного числа (собственных чисел) при рассматриваемом подходе очевидна, учитывая, что в зависимости от типа собственного числа, прикладные алгоритмы могут изменять величину итерационного понижения размерности исходной матрицы: на единицу или на два.

Использование вышеприведенных формул позволит расширить применение изложенного в [2] численного алгоритма определения собственных чисел для матриц большой размерности с действительными собственными числами на класс матриц с комплексно-сопряженными собственными числами.

В заключение отметим, что формирование и расчет полных моделей инфокоммуникационных сетей и систем с учетом всех звеньев, зачастую описывающих процессы протекающие с существенно разной скоростью, само по себе представляет достаточно трудоемкую задачу. В частности, в телекоммуникациях это, например, объединение в одной математической модели описание функционирования высокоскоростных магистралей и низкоскоростных «последних миль», включающих различные уровни моделирования элементов и фрагментов сети (канальный, системный и др.). Размерность таких моделей, как уже отмечалось, может быть крайне велика, так же как и степень их жесткости. Однако, такие модели позволят не только обеспечить решение задач управления и оптимизации сети, но и могут быть полезны при оценке эффективности использования различных технологий передачи. При этом анализ и расчет таких моделей требует не только мощных средств вычислительной техники обеспечивающих распараллеливание процессов вычислений, но и применения специализированного математического обеспечения эффективного при расчете математических моделей с вышеуказанными особенностями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуа Л.О., Пен-Мин-Лин. Машинный анализ электронных схем. Алгоритмы и вычислительные методы., 1980, 640 с.
2. Хиленко В.В. Сходимость метода понижения порядка при решении жестких систем линейных дифференциальных уравнений.- ДАН УССР, 1987, № 8, с. 76-79.
3. Грищенко А.З., Хиленко В.В. Определение числа быстрых и медленных движений при декомпозиции линейных динамических моделей произвольно большой размерности. – Кибернетика и системный анализ, 1991, № 6, с. 3-9.
4. Титаренко Ю.И. Нахождение комплексно-сопряженных наибольших по модулю собственных значений матриц произвольно большой размерности. – Кибернетика и системный анализ, 2006, № 2, с. 104-110.
5. Schroeder H. High Performance Computing for Visualisation and Image Analysis – Conf. Paper: Visual Informatics: Bridging Research and Practice, Kuala Lumpur, 2009.
6. Палагин А.В., Кургаев А.Ф., Шевченко А.И. Ноосферная парадигма развития науки и искусственный интеллект. – Кибернетика и системный анализ, 2017, № 4, с. 12-21.
7. Ганмахер Ф.Р. Теория матриц. – М., Из-во «Наука», 1967, 575 с.