Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2020, Vol. 11, No 3, 31-39
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

http://dx.doi.org/10.31548/machenergy2020.03.031

УДК 631.313.022.2

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ДЕФОРМАЦІЇ ПРУЖНОЇ СТІЙКИ ДИСКАТОРА

О. В. Козаченко[1], К. В. Сєдих[2]

[1]Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка, Україна.
[2]Харківський національний аграрний університет імені В. В. Докучаєва, Україна.

Стаття з спеціальності: 133 – галузеве машинобудування.

Кореспонденція авторів: o.v.kozachenko21@gmail.com.

Історія статті: отримано – квітень 2020, акцептовано – серпень 2020.
Бібл. 18, рис. 8, табл. 0.

Анотація. У статті представлено результати теоретичних досліджень динамічної моделі процесу деформації пружної стійки дискового знаряддя довільної форми, складено систему диференційних рівнянь в загальному вигляді і розроблено відповідний програмний код в програмному пакеті Mathematica, який дозволяє визначити напруження, відносні і абсолютні деформації в кожній точці пружної стійки дискатора. Приймаючи форму пружної стійки дискатора за спіраль Архімеда, коли функції її границь задані у полярних координатах $f_1(\theta)=\frac{a\theta}{2\pi}+b$, $f_2(\theta)=\frac{a\theta}{2\pi}+b+h$, де $\theta_s \le \theta \le \theta_f$, де параметри геометричної форми a (крок спіралі), b (зміщення спіралі вздовж радіальної координати), h (товщина пружної стійки), визначено її еквівалентну фізико-математичну модель у вигляді жорсткого математичного маятника довжиною l, до вантажу якого закріплено дві пружини вздовж осей Ox і Oz із коефіцієнтами жорсткості k_x і k_z, відповідно, які відхиляють його на кут φ. Встановлені залежності коефіцієнтів жорсткості k_x і k_z, довжини l і кута φ еквівалентної фізико-математичної моделі пружної стійки дискатора із параметрами геометричної форми a = 0,8 м, b = 0 м, h = 0,01 м від значень сил F_{ex} і F_{ez}, що діють на вільний кінець стійки вздовж осей Ox і Oz.

Ключові слова: диск, пружна стійка дискатора, дискове знаряддя, дискатор, деформація пружної стійки.

Постановка проблеми

Одною з головних задач обробітку ґрунту є створення сприятливих умов для накопичення поживних речовин і, особливо, вологи для нормального розвитку сільськогосподарських культур. Запорукою успішного протікання даних процесів, за твердженням науковців агрономів і ґрунтознавців, є однорідний агрегатний склад ґрунту по всій глибині обробітку. Відповідно до цього необхідно вдосконалювати сільськогосподарські машини і знаряддя з метою забезпечення оптимальних режимів їх роботи при зменшенні енергетичних витрат на виконання процесу.

Особливого значення набуває вирішення цих завдань для ґрунтообробної техніки, в тому числі з дисковими робочими органами, оскільки вони забезпечують 60–80 % попереднього та основного обробітку ґрунту при зменшенні до 20 % енерговитрат на виконання технологічного процесу.

Перспективним напрямком підвищення якості обробітку ґрунту при зменшенні енергоємності процесу є застосування дискових знарядь із індивідуальним кріпленням робочих органів на пружних стійках. Це зумовлює їх коливання внаслідок нерівномірності сил опору ґрунту та його руйнування при менших витратах енергії та кращій пристосованості до рельєфу поля, що підвищує можливість забезпечення заданої якості обробітку.

З метою підвищення ефективності дискових знарядь важливим є встановлення закономірностей впливу параметрів пружної стійки дискового знаряддя від її геометричних розмірів і значень зовнішніх сил, що діють на стійку при виконанні процесу.

Аналіз останніх досліджень

Аналіз досліджень в напрямку підвищення ефективності ґрунтообробних знарядь з дисковими робочими органами вказують на доцільність застосування їх індивідуального кріплення на пружних стійках [1, 2, 3]. В [4] розроблено математичну модель руху пружного стояка зі сферичним диском, встановлено його конструктивні параметри і динамічні характеристики та їх вплив на коливання стояка з причин нестаціонарності технологічного процесу і зміни сили опору під час функціонування агрегату. Автором встановлено, що застосування пружних стояків з визначеними параметрами, у порівнянні із типовим пружним стояком, параметри якого обґрунтовано лише за функціональною необхідністю захисту робочого органу від перевантаження, дає можливість зменшити енергоємність процесу обробітку на 7 % при дотриманні агротехнічних вимог обробітку ґрунту.

Розглядаючи характеристики відновної сили пружної стійки будь-якої конфігурації на основі теорії нелінійних задач статики тонких стержнів в [5, 6] розроблено аналітичний метод її визначення, коли проектований стояк розбивають на певний ряд відрізків, прямих і дуг з певним радіусом.

Кушнарьовим розроблено аналітичний метод визначення характеристики відновної сили стояка будь-якої конфігурації на основі теорії нелінійних задач статики тонких стержнів [5, 6]. Для аналітичного визначення відновної сили проектований стояк будь-якої конфігурації розбивають на ряд відрізків, прямих і дуг з певним радіусом.

Автором [7] досліджено характер автоколивань, що виникають в пружних стійках в процесі взаємодії робочого органу знаряддя з ґрунтом. В роботі розвинена методика розрахунку основних характеристик та параметрів коливної системи на основі відомого в нелінійній механіці апроксимуючого методу гармонічного балансу.

За результатами дослідження виконано чисельне розв'язання диференціальних рівнянь, що описують математичну модель системи, коли різні фази коливань за час періоду описуються різними диференціальними рівняннями.

В роботі І. А. Шевченко [8] розглянута неавтономна задача дії ґрунту на робочий орган, коли в першому наближенні робочий орган знаряддя з S-подібним стояком представлений як матеріальна точка з накладеними на неї пружно-в'язкими зв'язками, що співпадають з напрямами узагальнених координат.

В дослідженнях [8] з аналізу спектральної щільності тягового опору дійшли висновку, що випадкову функцію опору руху робочого органу в ґрунтовому середовищі можна замінити гармонічною функцією чи сумою двох, трьох гармонічних функцій $P(t) = q_1 \cos w_1 t + q_2 \cos w_2 t + q_3 \cos w_3 t$. При цьому жорсткість S-подібних стояків апроксимується кубічною параболою вигляду: $F = aq + bq^3$, де a — коефіцієнт жорсткості, що пов'язує лінійну деформацію з прикладеною силою; b — коефіцієнт жорсткості, що відображає не лінійність зв'язку відновлювальної сили з переміщенням.

Розгляд відомих моделей функціонування робочих органів ґрунтообробних знарядь [9], у тому числі й на пружному стояку, вказує на доцільність врахування емпіричних характеристик та конструктивних параметрів об'єкту дослідження з матрицями коефіцієнтів, зокрема в [8].

Застосування при проведенні досліджень більш складних моделей [6, 7] зумовлює практично неможливим аналітичне розв'язання поставленої задачі.

Це зумовлює доцільність проведення подальших теоретичних досліджень означеного наукового напрямку.

Мета досліджень

Метою є теоретичне дослідження процесу деформації пружної стійки дискатора будь-якої форми під дією зовнішніх сил, що виникають в процесі взаємодії робочого органу знаряддя з ґрунтом.

Для реалізації поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

- дослідити динамічну модель процесу деформації пружної стійки дискатора будь-якої форми під дією зовнішніх сил;
- скласти систему диференційних рівнянь в загальному вигляді і розробити відповідний програмний код, який дозволяє визначити напруження, відносні і абсолютні деформації в кожній точці пружної стійки дискатора;
- визначити залежності параметрів еквівалентної фізико-математичної моделі пружної стійки дискатора від її геометричних розмірів і значень зовнішніх сил, що діють на вільний кінець стійки.

Результати досліджень

Дослідження процесу деформації пружної стійки дискатора будемо розглядати з урахуванням наступних припущень і спрощень:

- пружна стійка є абсолютно пружною, тобто її стан можна описати рівнянням рівноваги, рівняннями закону Гука і залежністю між компонентами тензора деформацій і компонентами вектора переміщення;
- процес деформації відбувається в двох напрямках, тому будемо розглядати плоску систему координат;
- пружна стійка має форму спіралі і може бути описана функцією в полярній системі координат.

Розрахункова схема процесу деформації пружної стійки представлено на рис. 1. Центр координат знаходиться в точці О. Функцію, що описує границі пружної стійки запишемо у вигляді:

– в полярній системі координат (r, θ):

границя A\`B\`: $r_1 = f_1(\theta_1)$, де $\theta_s \le \theta_1 \le \theta_f$, (1)

границя AB: $r_2 = f_2(\theta_2)$, де $\theta_s \le \theta_2 \le \theta_f$, (2)

границя AA\`: $\theta \approx \theta_s = \text{const}$, (3)

границя BB\`: $\theta \approx \theta_f = \text{const}$, (4)

де r – радіальна координата точки в полярній системі координат, м; θ – кутова координата точки в полярній системі координат, рад; індекси «1» і «2» відповідають внутрішній і зовнішній границі пружної стійки; індекси «s» і «f» відповідають початковому і кінцевому кутам границі пружної стійки; враховуючи, що відстань між границями A\`B\` і AB (товщина) пружної стійки значно менше за її інші геометричні розміри, для границі AA\` і BB\` тотожний знак «≈»;

– в декартовій системі координат (x, z):

границя A\`B\`: $$\begin{cases} x_1 = r_1 \cos\theta_1 = f_1(\theta_1)\cos\theta_1, \\ z_1 = r_1 \sin\theta_1 = f_1(\theta_1)\sin\theta_1, \\ \theta_s \le \theta_1 \le \theta_f, \end{cases} \quad (5)$$

границя AB: $$\begin{cases} x_2 = r_2\cos\theta_2 = f_2(\theta_2)\cos\theta_2, \\ z_2 = r_2\sin\theta_2 = f_2(\theta_2)\sin\theta_2, \\ \theta_s \le \theta_2 \le \theta_f, \end{cases} \quad (6)$$

границя AA\`: $z = \mathrm{const}$, (7)

границя BB\`: $x = \mathrm{const}$, (8)

де x, z – координата точки в декартовій системі координат, м.

Окрім зазначеного опису границь пружної стійки, її можна представити у вигляді еквівалентної фізико-математичної моделі: жорсткий математичний маятник довжиною l, до вантажу якого закріплено дві пружини вздовж осей Ox і Oz із коефіцієнтами жорсткості k_x і k_z відповідно, які відхиляють його на кут φ. Тобто на вантаж математичного маятника діють додатково дві сили пружності вздовж вісі Ox і Oz: F_{ex} і F_{ez} відповідно, які можна представити за законом Гука для пружини у вигляді [10]:

$$F_{ex} = k_x \Delta x_B, \quad (9)$$

$$F_{ez} = k_z \Delta z_B, \quad (10)$$

де Δx_B, Δz_B – абсолютні переміщення точки B (або B') в декартовій системі координат в результаті деформації пружної стійки, м.

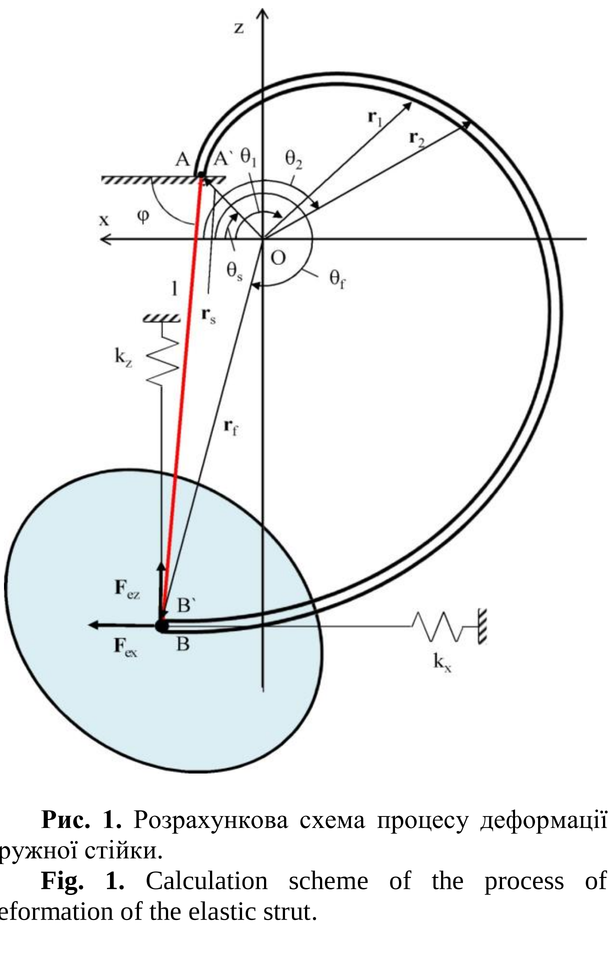

Рис. 1. Розрахункова схема процесу деформації пружної стійки.

Fig. 1. Calculation scheme of the process of deformation of the elastic strut.

Для переходу від реальної до еквівалентної фізико-математичної моделі необхідно визначити залежності абсолютних переміщень Δx_B, Δz_B і коефіцієнтів жорсткості k_x і k_z від геометричних параметрів пружної стійки і пружних властивостей матеріалу. А також встановити залежність довжини l від кута φ.

Приймаючі масові сили рівними нулю рівняння рівноваги точок пружної стійки в полярних координатах має вигляд [11]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial\theta} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \\ \dfrac{\partial\sigma_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial\theta} + 2\dfrac{\sigma_{rr}}{r} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

де σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ – нормальні напруження, Па; $\sigma_{r\theta}$ – дотичне напруження, Па.

Залежності між компонентами тензора деформацій і компонентами вектора переміщення в полярних координатах можна представити у вигляді [12]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \dfrac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial\theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right), \end{cases} \quad (12)$$

де $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{\theta\theta}, \varepsilon_{r\theta}$, – відносні деформації; u_r, u_θ – абсолютні деформації.

Рівняння закону Гука в полярних координатах має вигляд [13]:

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{1}{E}\left(\left(1-\nu^2\right)\sigma_{rr} - (1+\nu)\nu\sigma_{\theta\theta}\right), \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{E}\left(\left(1-\nu^2\right)\sigma_{\theta\theta} - (1+\nu)\nu\sigma_{rr}\right), \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{E}(1+\nu)\sigma_{r\theta}, \end{cases} \quad (13)$$

де E – модуль пружності Юнга матеріалу пружної стійки, кПа; ν – коефіцієнт Пуассона матеріалу пружної стійки.

Для вирішення спільно рівнянь (11)-(13) введемо функцію Ері в полярних координатах Φ(r, θ). При цьому напруження можна визначити наступним чином [14]:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}, \\ \sigma_{\theta\theta} = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}, \\ \sigma_{r\theta} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right). \end{cases} \quad (14)$$

Щоб функції σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\sigma_{r\theta}$ відповідали виразам (14) функція Ері в полярних координатах Φ(r, θ) повинна підпорядковуватися бігармонічному рівнянню [15]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}\right) = 0. \quad (15)$$

Згідно досліджень [16-18]: для кругового кільця або його частини напруження пропорційні cosθ або sinθ, тобто функцію Ері можна представити у вигляді:

$$\Phi(r,\theta) = \left(R_1(\theta)\cos\theta + B_1 r\theta\sin\theta\right) + \left(R_2(\theta)\sin\theta + B_2 r\theta\cos\theta\right) \quad (16)$$

де $R_1(\theta)$, $R_2(\theta)$ – вільні функції; B_1, B_2 – вільні константи.

Підставляючи (16) в (15) і вирішуючи отримане рівняння в програмному пакеті Mathematica отримуємо значення вільних функцій:

$$
\begin{aligned}
&R_1(\theta)=\frac{A_{11}}{r}+A_{21}r+A_{31}r^3+A_{41}r\ln(r),\\
&R_2(\theta)=\frac{A_{12}}{r}+A_{22}r+A_{32}r^3+A_{42}r\ln(r),
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

де A_{11}, A_{21}, A_{31}, A_{41}, A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42} – вільні константи.

Підставляючи (17) в (16) отримуємо функцію Ері для пружної стійки:

$$
\begin{aligned}
&\Phi(r,\theta)=\left(\frac{A_{11}}{r}+A_{21}r+A_{31}r^3+A_{41}r\ln(r)\right)\cos\theta+\\
&B_1 r\theta\sin\theta+\left(\frac{A_{12}}{r}+A_{22}r+A_{32}r^3+A_{42}r\ln(r)\right)\times\\
&\times\sin\theta+B_2 r\theta\cos\theta.
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

З системи рівнянь (14) і отриманої функції Ері (18) знаходимо функції всіх напружень, що виникають в пружній стійці:

$$
\begin{cases}
\begin{aligned}
&\sigma_{rr}=\frac{1}{r^3}\big(-2A_{11}\cos\theta-2A_{12}\sin\theta+\\
&+r^2\big(2A_{31}r^2\cos\theta+2A_{32}r^2\sin\theta+\\
&+A_{41}\cos\theta+A_{42}\sin\theta+2B_1\cos\theta-2B_2\sin\theta\big)\big),\\
&\sigma_{\theta\theta}=2B_1 r\cos\theta-B_1 r\theta\sin\theta-B_2 r\theta\cos\theta-\\
&-2B_2 r\sin\theta-\cos\theta\times\\
&\times\left(\frac{A_{11}}{r}+r\left(A_{21}+A_{31}r^2+A_{41}\ln r\right)\right)-\\
&-\sin\theta\left(\frac{A_{12}}{r}+r\left(A_{22}+A_{32}r^2+A_{42}\ln r\right)\right),\\
&\sigma_{r\theta}=\frac{1}{r^3}\big(-2A_{11}\sin\theta-2A_{12}\cos\theta+\\
&+r^2\big(2A_{31}r^2\sin\theta-2A_{32}r^2\cos\theta+\\
&+A_{41}\sin\theta-A_{42}\cos\theta\big)\big).
\end{aligned}
\end{cases}
\qquad (19)
$$

Наступним етапом є визначення констант A_{11}, A_{21}, A_{31}, A_{41}, A_{12}, A_{22}, A_{32}, A_{42}, B_1, B_2 враховуючи наступні граничні умови пружної стійки:

$$
\begin{cases}
\sigma_{rr}\big|_{r=f_1(\theta)}=\sigma_{rr}\big|_{r=f_2(\theta)}=0,\\
\sigma_{r\theta}\big|_{r=f_1(\theta)}=\sigma_{r\theta}\big|_{r=f_2(\theta)}=0,\\
\int\limits_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)}\sigma_{r\theta}\big|_{\theta=\theta_s}=0,\\
\int\limits_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)}\sigma_{\theta\theta}\big|_{\theta=\theta_s}=0,\\
\int\limits_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)}\sigma_{r\theta}\big|_{\theta=\theta_f}=F_{ex},\\
\int\limits_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)}\sigma_{\theta\theta}\big|_{\theta=\theta_f}=F_{ez}.
\end{cases}
\qquad (20)
$$

Підставляючи (19) у рівняння закону Гука (13) і залежностей (12) отримуємо систему диференційних рівнянь відносно абсолютних деформацій $u_r(r, \theta)$ і $u_\theta(r, \theta)$:

$$
\begin{cases}
\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial r}=\frac{1}{E}\bigg(\left(1-\nu^2\right)\frac{1}{r^3}\big(-2A_{11}\cos\theta-2A_{12}\sin\theta+\\
&+r^2\big(2A_{31}r^2\cos\theta+2A_{32}r^2\sin\theta+\\
&+A_{41}\cos\theta+A_{42}\sin\theta+2B_1\cos\theta-2B_2\sin\theta\big)\big)-\\
&-(1+\nu)\nu\big(2B_1 r\cos\theta-B_1 r\theta\sin\theta-\\
&-B_2 r\theta\cos\theta-2B_2 r\sin\theta-\\
&-\cos\theta\left(\frac{A_{11}}{r}+r\left(A_{21}+A_{31}r^2+A_{41}\ln r\right)\right)-\\
&-\sin\theta\left(\frac{A_{12}}{r}+r\left(A_{22}+A_{32}r^2+A_{42}\ln r\right)\right)\big)\bigg),\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}=\frac{1}{E}\bigg(\left(1-\nu^2\right)\big(2B_1 r\cos\theta-\\
&-B_1 r\theta\sin\theta-B_2 r\theta\cos\theta-2B_2 r\sin\theta-\\
&-\cos\theta\left(\frac{A_{11}}{r}+r\left(A_{21}+A_{31}r^2+A_{41}\ln r\right)\right)\\
&-\sin\theta\left(\frac{A_{12}}{r}+r\left(A_{22}+A_{32}r^2+A_{42}\ln r\right)\right)\big)-\\
&-(1+\nu)\nu\frac{1}{r^3}\big(-2A_{11}\cos\theta-2A_{12}\sin\theta+\\
&+r^2\big(2A_{31}r^2\cos\theta+2A_{32}r^2\sin\theta+\\
&+A_{41}\cos\theta+A_{42}\sin\theta+2B_1\cos\theta-2B_2\sin\theta\big)\big)\bigg),\\
&\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right)=\frac{1}{E}(1+\nu)\frac{1}{r^3}\big(-2A_{11}\sin\theta-\\
&-2A_{12}\cos\theta+r^2\big(2A_{31}r^2\sin\theta-2A_{32}r^2\cos\theta+\\
&+A_{41}\sin\theta-A_{42}\cos\theta\big)\big).
\end{aligned}
\end{cases}
\qquad (21)
$$

Вирішуючи отриману систему рівнянь в програмному пакеті Mathematica отримуємо функції абсолютних деформацій $u_r(r, \theta)$ і $u_\theta(r, \theta)$:

$$
\begin{cases}
\begin{aligned}
&u_r(r,\theta)=\frac{1+\nu}{4E}\bigg(-A_{11}\,\frac{4(\nu-1)}{r^2}+A_{31}\nu r^4+\\
&+2A_{41}\nu r^2\ln r+4\ln r\times\\
&\times\left(\nu A_{11}-(\nu-1)\left(A_{41}+2B_1\right)\right)+\\
&+r^2\left(2\nu A_{21}-4A_{31}(\nu-1)-\nu\left(A_{41}+4B_1\right)\right)\bigg),\\
&u_\theta(r,\theta)=\frac{1+\nu}{Er^2}\Big(\theta\Big(-\left(-2+\left(2+r^2\right)n\right)A_{11}+\\
&+r^2\left(r^2\left(-\nu A_{21}-\left(2+\left(r^2-2\right)\nu\right)A_{31}\right)+\right.\\
&+\left(\nu-1-r^2\nu\ln r\right)A_{41}+2\left(\nu-1+r^2\nu\right)B_1\Big)\Big)+\\
&+\cos\theta\,(4(\nu-1)A_{12}-2r^4(\nu-1)A_{22}+\\
&+4r^4A_{32}+4r^6A_{32}+4r^4\nu A_{32}-\\
&-4r^6\nu A_{32}+2r^2A_{42}+r^4A_{42}-r^4\nu A_4)^2+
\end{aligned}
\end{cases}
\qquad (22)
$$

$$
\begin{aligned}
&+2\,r^4 \ln r\, A_{42} - 2\,r^4\, \nu \ln r\, A_{42} + 2\,r^4\, \theta\, B_1 - \\
&-2\,r^4\, \theta \nu\, B_1 + 2\,r^4\, B_2 - 2\,r^4\, \nu\, B_2 \Big) + \\
&+\sin\theta \Big(-4(\nu-1) A_{11} + r^2 \big(-2\,A_{41} + \\
&+ r^2 \big(2\,(\nu-1)\, A_{21} + 4\big(-1 + r^2(\nu-1) - \nu \big) A_{31} + \\
&+ (\nu-1)\big((1+2\ln r)\, A_{41} - 2\,B_1 + 2\,\theta\, B_2 \big)\big)\big)\Big).
\end{aligned} \tag{22}
$$

Враховуючи отримані абсолютні деформації (21) отримуємо нові координати положення точок B після деформації пружної стійки

$$
\begin{cases}
x_B = \left(f_2(\theta_f) + u_r\left(f_2(\theta_f), \theta_f\right)\right)\cos\theta_f, \\
z_B = \left(f_2(\theta_f) + u_r\left(f_2(\theta_f), \theta_f\right)\right)\sin\theta_f.
\end{cases} \tag{23}
$$

Тоді довжина l_k і кут φ згідно рис. 1 представимо у вигляді виразу:

$$
\begin{aligned}
l_k &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \\
&= \Big(\big(\left(f_2(\theta_f) + u_r\left(f_2(\theta_f), \theta_f\right)\right)\cos\theta_f - f_2(\theta_s)\cos\theta_s \big)^2 + \\
&+ \big(\left(f_2(\theta_f) + u_r\left(f_2(\theta_f), \theta_f\right)\right)\sin\theta_f - f_2(\theta_s)\sin\theta_s \big)^2 \Big)^{1/2},
\end{aligned} \tag{24}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \operatorname{arctg}\frac{z_B - z_A}{x_B - x_A} = \\
&= \operatorname{arctg}\frac{\left(f_2(\theta_f) + u_r(f_2(\theta_f), \theta_f)\right)\sin\theta_f - f_2(\theta_s)\sin\theta_s}{\left(f_2(\theta_f) + u_r(f_2(\theta_f), \theta_f)\right)\cos\theta_f - f_2(\theta_s)\cos\theta_s}.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Абсолютні переміщення точки B в декартовій системі координат в результаті деформації пружної стійки є наступними:

$$
\Delta x_B = u_r\left(f_2(\theta_f), \theta_f\right)\cos\theta_f, \tag{26}
$$

$$
\Delta z_B = u_r\left(f_2(\theta_f), \theta_f\right)\sin\theta_f. \tag{27}
$$

Враховуючи (9), (10), (26), (27) отримуємо коефіцієнти жорсткості k_x і k_z

$$
k_x = \frac{F_{ex}}{u_r\left(f_2(\theta_f), \theta_f\right)\cos\theta_f}, \tag{28}
$$

$$
k_z = \frac{F_{ez}}{u_r\left(f_2(\theta_f), \theta_f\right)\sin\theta_f}. \tag{29}
$$

Спільне рішення отриманих систем рівнянь (19)-(29) в загальному вигляді аналітичними методами є дуже складним процесом, тому перейдемо до рішення конкретної задачі.

Проведений аналіз пружних стійок для дискаторів дозволяє в першому наближені апроксимувати їх форму до функції спіралі Архімеда, тобто

$$
f_1(\theta) = \frac{a\theta}{2\pi} + b, \text{ де } \theta_s \le \theta \le \theta_f, \tag{30}
$$

$$
f_2(\theta) = f_1(\theta) + h = \frac{a\theta}{2\pi} + b + h, \text{ де } \theta_s \le \theta \le \theta_f, \tag{31}
$$

де a – шаг спіралі, м; b – зміщення спіралі вздовж радіальної координати, м; h – товщина пружної стійки, м.

Для визначення початкового θ_s і кінцевого θ_f кутів скористаємося умовами горизонтальної і вертикальної дотичної до функції спіралі Архімеда:

$$
\frac{dx}{dz}(\theta_s) = 0, \text{ де } 0 \le \theta_s \le \frac{\pi}{2}, \tag{32}
$$

$$
\frac{dz}{dx}(\theta_f) = 0, \text{ де } \frac{3\pi}{2} \le \theta_f \le 2\pi, \tag{33}
$$

В результаті перетворення (32), (33) отримуємо рівняння:

$$
\operatorname{ctg}\theta_s = \theta_s + 2\pi\frac{b}{a}, \text{ де } 0 \le \theta_s \le \frac{\pi}{2}, \tag{34}
$$

$$
\operatorname{tg}\theta_f = -\left(\theta_f + 2\pi\frac{b}{a}\right), \text{ де } \frac{3\pi}{2} \le \theta_f \le 2\pi, \tag{35}
$$

Так, наприклад, при a = 0,8 м, b = 0, h = 0,01 м вирішуючи рівняння (34), (35) в програмному пакеті Mathematica отримуємо наступну форму пружної стійки (рис. 2):

$$
\begin{cases}
f_1(\theta) = \dfrac{0{,}8\theta}{2\pi}, \\
f_2(\theta) = \dfrac{0{,}8\theta}{2\pi} + 0{,}01, \\
0{,}8482 \le \theta \le 4{,}9126.
\end{cases} \tag{36}
$$

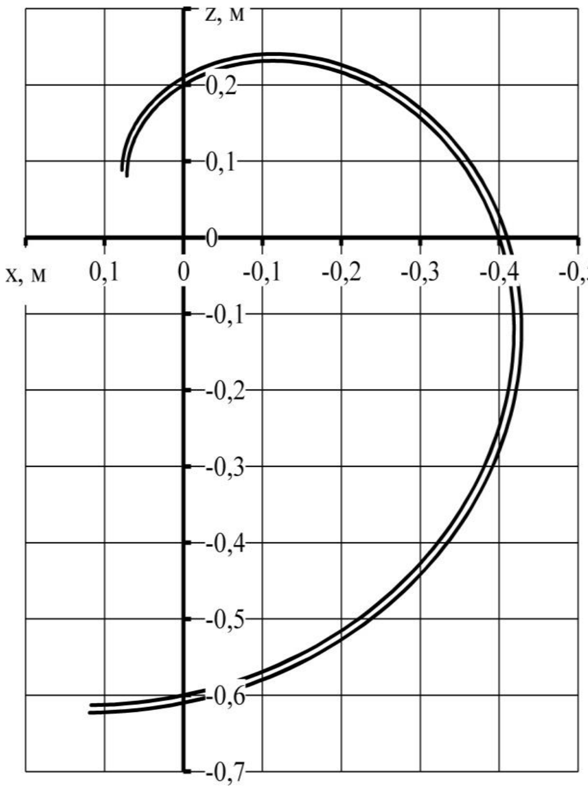

Рис. 2. Форма пружної стійки (36).
Fig. 2. The shape of the elastic rack (36).

Приймаючи пружні властивості матеріалу пружної стійки (сталь 60С2А: модуль пружності E = 212000 МПа, коефіцієнт Пуассона ν = 0,28) і параметри геометричної форми a = 0,8 м, b = 0 м, h = 0,01 м проведемо розрахунок в програмному пакеті Mathematica рівнянь (19)-(29) під дією різних сил F_{ex} і F_{ez}.

Окрім цього, для візуалізації процесу деформації пружної стійки проведемо паралельне моделювання в програмному пакеті SolidWorks з використанням Simulation. Максимальне навантаження вибиралася з урахуванням питомої опору ґрунту, глибини ходу і ширини захвату робочого органу на розглянутій пружній стійці і була прийнята за 2000 Н. Інтервал зміни навантаження – 250 Н. Схема розміщення сил и кріплення пружної стійки представлено на рис. 3.

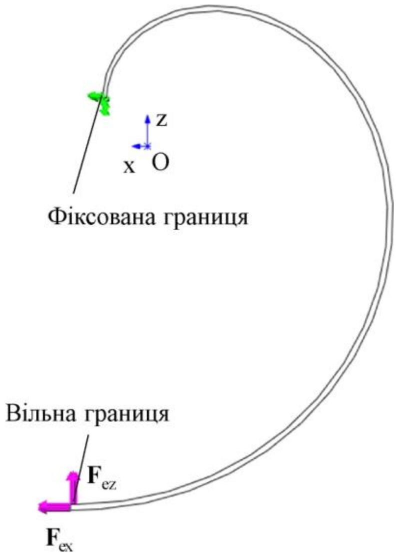

Рис. 3. Схема сил и кріплення стійки.

Fig. 3. The scheme of forces and fastening of a rack.

Результати розрахунку деформації пружною стійки в програмному пакеті Mathematica та приклад візуалізації в програмному пакеті SolidWorks представлені на рис. 4

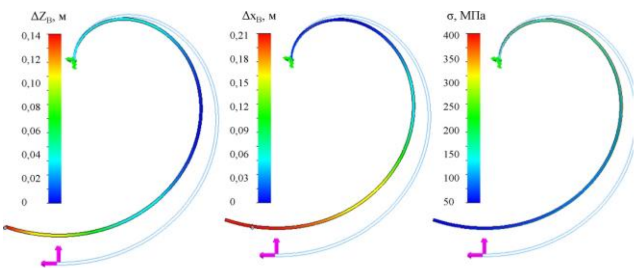

Рис. 4. Розподіл напруження σ і абсолютних переміщень Δx_B, Δz_B при деформації пружною стійки із параметри геометричної форми a = 0,8 м, b = 0 м, h = 0,01 м при F_{ex} = 500 Н, F_{ez} = 250 Н.

Fig. 4. Distribution of stress σ and absolute displacements Δx_B, Δz_B at deformation of an elastic rack with parameters of a geometrical form a = 0.8 m, b = 0 m, h = 0.01 m at F_{ex} = 500 Н, F_{ez} = 250 Н.

Апроксимуємо отримані дані у вигляді рівнянь для коефіцієнтів жорсткості k_x і k_z, довжини l і кута φ еквівалентного маятника пружної стійки із параметрами геометричної форми a = 0,8 м, b = 0 м, h = 0,01 м від значень сил F_{ex} і F_{ez}:

$k_x = 3457{,}45 + 5{,}16807\, F_{ex} – 0{,}000617126\, F_{ex}^2 –$
$– 3{,}32741\, F_{ez} + 0{,}000073511\, F_{ex} F_{ez} +$
$+ 0{,}000723372\, F_{ez}^2$ (рис. 5), (37)

$k_z = 5525{,}65 – 4{,}40952\, F_{ex} + 0{,}000854536\, F_{ex}^2 +$
$+ 3{,}92764\, F_{ez} + 0{,}00114218\, F_{ex} F_{ez} –$
$– 0{,}00134798\, F_{ez}^2$ (рис. 6), (38)

$l = 0{,}681292 + 0{,}00011208\, F_{ex} – 1{,}4104\cdot 10^{-8}\, F_{ex}^2 +$
$+ 0{,}000152196\, F_{ez} – 3{,}16275\cdot 10^{-8}\, F_{ex} F_{ez} +$
$+ 3{,}4585\cdot 10^{-11}\, F_{ez}^2$ (рис. 7), (39)

$\varphi = 1{,}47517 – 0{,}000129246\, F_{ex} + 1{,}85543\cdot 10^{-8}\, F_{ex}^2 –$
$– 0{,}000115739\, F_{ez} + 3{,}89549\cdot 10^{-8}\, F_{ex} F_{ez} +$
$+ 1{,}71867\cdot 10^{-8}\, F_{ez}^2$ (рис. 8). (40)

Коефіцієнт кореляції для рівнянь (37)-(40) складає R = 0,99.

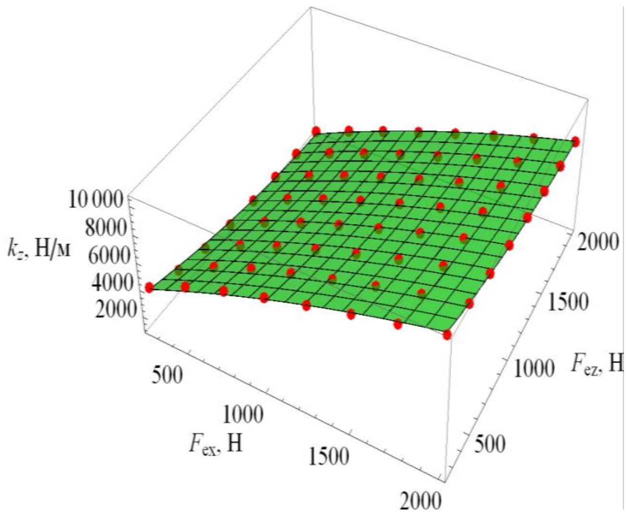

Рис. 5. Залежність коефіцієнта жорсткості k_x при деформації пружної стійки із параметри геометричної форми a = 0,8 м, b = 0 м, h = 0,01 м від сил F_{ex} і F_{ez}.

Fig. 5. Dependence of the stiffness coefficient k_x at deformation of an elastic rack from parameters of a geometrical form a = 0.8 m, b = 0 m, h = 0.01 m from the forces F_{ex} and F_{ez}.

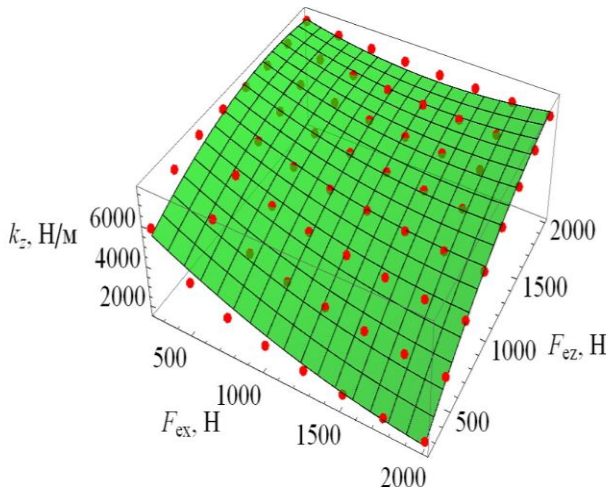

Рис. 6. Залежність коефіцієнта жорсткості k_z при деформації пружної стійки із параметри геометричної форми a = 0,8 м, b = 0 м, h = 0,01 м від сил F_{ex} і F_{ez}.

Fig. 6. Dependence of the stiffness coefficient k_z at deformation of an elastic rack from parameters of a geometrical form a = 0.8 m, b = 0 m, h = 0.01 m from the forces F_{ex} and F_{ez}.

Таким чином, за результатами виконаних теоретичних досліджень динамічної моделі процесу деформації пружної стійки довільної форми дискового ґрунтообробного знаряддя одержано систему диференційних рівнянь в загальному вигляді і розроблено відповідний програмний код в програмному пакеті Mathematica, який дозволяє визначити напруження, відносні і абсолютні деформації в кожній точці пружної стійки. Розглянуті приклади для обраних конструктивних параметрів пружної стійки дискатора підтверджують адекватність отриманих теоретичних залежностей і доцільність їх застосування в прикладному аспекті при створенні дискових робочих органів.

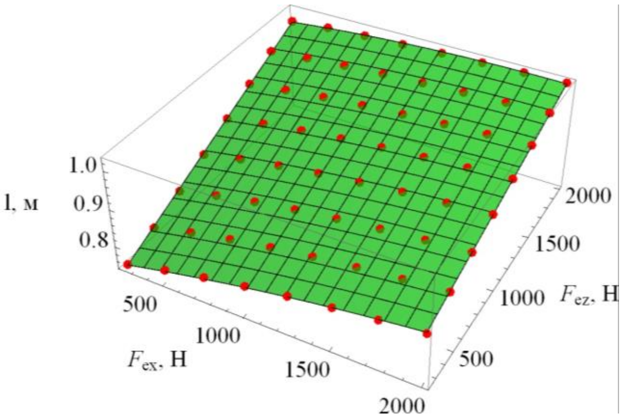

Рис. 7. Залежність довжини l еквівалентного маятника пружної стійки із параметри геометричної форми a = 0,8 м, b = 0 м, h = 0,01 м при її деформації від сил F_{ex} і F_{ez}

Fig. 7. Dependence of the length l of the equivalent pendulum of an elastic rack on the parameters of the geometric shape a = 0.8 m, b = 0 m, h = 0.01 m during its deformation from the forces F_{ex} and F_{ez}.

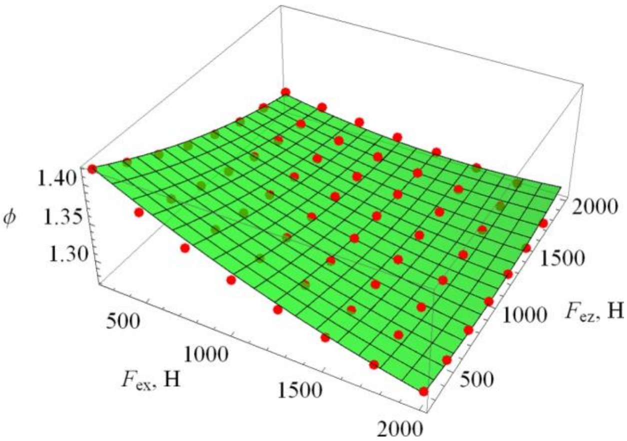

Рис. 8. Залежність кута повороту φ еквівалентного маятника пружної стійки із параметри геометричної форми a = 0,8 м, b = 0 м, h = 0,01 м при її деформації від сил F_{ex} і F_{ez}.

Fig. 8. Dependence of the angle of rotation φ of the equivalent pendulum elastic rack with the parameters of the geometric shape a = 0.8 m, b = 0 m, h = 0.01 m during its deformation from the forces F_{ex} and F_{ez}.

Висновки

1. В результаті аналітичних досліджень динамічної моделі процесу деформації пружної стійки дискатора будь-якої форми складено систему диференційних рівнянь в загальному вигляді та розроблено відповідний програмний код в програмному пакеті Mathematica, який дозволяє визначити напруження, відносні і абсолютні деформації в кожній точці пружної стійки.

2. Приймаючи форму пружної стійки дискатора за спіраль Архімеда, тобто функції її границь задані у полярних координатах $f_1(\theta) = \frac{a\theta}{2\pi} + b$, $f_2(\theta) = \frac{a\theta}{2\pi} + b + h$, де $\theta_s \le \theta \le \theta_f$, із параметри геометричної форми a (шаг спіралі), b (зміщення спіралі вздовж радіальної координати), h (товщина пружної стійки), визначено її еквівалентну фізико-математичну модель у вигляді жорсткого математичного маятника довжиною l, до вантажу якого закріплено дві пружини вздовж осей Ox і Oz із коефіцієнтами жорсткості k_x і k_z відповідно, які відхиляють його на кут φ.

3. Встановлені залежності коефіцієнтів жорсткості k_x і k_z, довжини l і кута φ еквівалентної фізико-математичної моделі пружної стійки дискатора із параметри геометричної форми a = 0,8 м, b = 0 м, h = 0,01 м від значень сил F_{ex} і F_{ez}, що діють на вільний кінець стійки вздовж осей Ox і Oz.

Список літератури

1. *Гайденко О., Кернасюк Ю.* Оцінка дискових агрегатів. The Ukrainian Farmer. 2013. №10, (47) жовтень. С. 94-95.

2. *Гриненко О., Маринін С.* Доцільність використання ґрунтообробних агрегатів з гнучким кріпленням робочих органів. Техніка і технології АПК. 2011. №2, (17). С. 32-33.

3. *Шевченко І. А.* Керування агрофізичним станом ґрунтового середовища. Київ. Видавничий дім «Вініченко», 2016. 320 с.

4. *Гапоненко О. І.* Обґрунтування параметрів пружних стояків дискових ґрунтообробних агрегатів: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.05.11. Нац. університету біоресурсів і природокористування України. Київ, 2017. 23 с.

5. *Кушнарев А., Шевченко И., Дюжаев В., Кушнарев С.* Механика взаимодействия рабочих органов на упругой подвеске с почвой. Техника АПК. 2008. №8. С. 22-25.

6. *Кушнарьов С. А.* Обґрунтування енергозберігаючого технологічного процесу обробітку ґрунту та параметрів пружинних робочих органів для умов південної степової зони України: дис. … канд. техн. наук.: 05.20.01. Ін-т механізації та електрифікації сіл. госп-ва УААН. Глеваха, 1999. 189 с.

7. *Донченко М. А.* Влияние автоколебаний и релаксационных колебаний на эффективность применения упругих стоек при культивации почвы: автореф. дис. … канд. техн. наук: спец. 05.20.01. Северо-Западный научно- исследовательский институт механизации и электрификации сельского хозяйства. Санкт-Петербург-Павловск, 2004. 18 с.

8. *Шевченко И. А.* Экспериментально-теоретическое обоснование параметров рабочих органов с упругими стойками культиваторов для предпосевной обработки почвы: автореф. дис. … канд. техн. наук: 05.20.01. Москва, 1988. 19 с.

9. *Лабатюк Ю. М., Алієв Е. Б.* Математичне моделювання процесу взаємодії робочого органу глибокорозпушувача з грунтом. Науковий вісник Таврійського державного агротехнологічного університету. 2015. Вип. 5. Т. 2. С. 133-140.

10. *Безухов Н. И.* Теория упругости и пластичности. Москва. ГИТТЛ, 1953. 420 с.

11. *Демидов С. П.* Теория упругости. Москва. Высшая школа, 1979. 431 с.

12. *Саусвелл Р. В.* Введение в теорию упругости для инженеров и физиков. Москва. Иностранная литература, 1948. 667 с.

13. *Тимошенко С. П., Гудьер Дж.* Теория упругости. Москва. Наука, 1973. 576 с.

14. *Шемякин Е. И.* Динамические задачи теории упругости и пластичности. Новосибирск: НГУ. 1968. 338 с.

15. *Биргер И. А., Мавлютов Р. Р.* Сопротивление материалов. Москва. Наука. 1986. 560 с.

16. *Тимошенко С. П.* Курс теории упругости. Киев: Наукова думка, 1972. 508 с.

17. *Rogovskii I. L., Titova L. L., Trokhaniak V. I., Haponenko O. I., Ohiienko M. M., Kulik V. P.* Engineering management of tillage equipment with concave disk spring shanks. INMATEH. Agricultural Engineering. 2020. Bucharest. Vol. 60. No 1. P. 45-52. doi: 10.35633/INMATEH-60-05.

18. *Rogovskii I. L., Titova L. L., Trokhaniak V. I., Rosamaha Yu. O., Blesnyuk O. V., Ohiienko M. M. Ohiienko A. V.* Engineering management of two-phase coulter systems of seeding machines for implementing precision farming technologies. INMATEH. Agricultural Engineering. 2019. Bucharest. Vol. 58. No 2. P. 137-146. doi: 10.35633/INMATEH-58-15.

References

1. *Haidenko O., Kernasiuk Yu.* (2013). Evaluation of disk aggregates. The Ukrainian Farmer. 10(47). 94-95.

2. *Hrynenko O., Marynin S.* (2011). Expediency of use of tillage units with flexible fastening of working tools. Tekhnika i tekhnolohii APK. 2(17). 32-33.

3. *Shevchenko I. A.* (2016). Management of agro-physical condition of the soil environment. Kyiv. Vydavnychyi dim «Vinichenko». 320.

4. *Haponenko O. I.* (2017). Substantiation of parameters of elastic risers of disk tillage tools: avtoref. dys. … kand. tekhn. nauk: 05.05.11. Nat. universytetu bioresursiv i pryrodokorystuvannia Ukrainy. Kyiv, 23.

5. *Kushnarev A., Shevchenko Y., Diuzhaev V., Kushnarev S.* (2008). Mechanics of interaction of working tools on elastic suspension with soil. Tekhnyka APK. 8. 22-25.

6. *Kushnarov S. A.* (1999). Substantiation of energy-saving technological process of tillage and parameters of spring working tools for the conditions of the southern steppe zone of Ukraine: dys. … kand. tekhn. nauk.: 05.20.01. In-t mekhanizatsii ta elektryfikatsii sil. hosp-va UAAN. Hlevakha, 189.

7. *Donchenko M. A.* (2004). Influence of self-oscillations and relaxation oscillations on efficiency of application of elastic racks at soil cultivation: avtoref. dys. … kand. tekhn. nauk: spets. 05.20.01. Severo-Zapadnыі nauchno- yssledovatelskyi ynstytut mekhanyzatsyy y эlektryfykatsyy selskoho khoziaistva. Sankt-Peterburh-Pavlovsk, 18.

8. *Shevchenko Y. A.* (1988). Experimental and theoretical substantiation of the parameters of working tools with elastic tines of cultivators for presowing soil cultivation: avtoref. dys. … kand. tekhn. nauk: 05.20.01. Moscow, 19.

9. *Labatyuk Yu. M., Aliyev E. B.* (2015). Mathematical modeling of the process of interaction of the working tools of the deep cultivator with the soil. Naukovij visnik Tavrijskogo derzhavnogo agrotekhnologichnogo universitetu. 5(2). 133-140.

10. *Bezukhov N. Y.* (1953). The theory of elasticity and plasticity. Moscow. HYTTL, 420.

11. *Demydov S. P.* (1979). Elasticity theory: uchebnyk. Moscow. Vysshaia shkola, 431.

12. *Sausvell R. V.* (1948). An introduction to elasticity theory for engineers and physicists. Moscow. Ynostrannaia lyteratura, 667.

13. *Tymoshenko S. P., Huder D.* (1973). Elasticity theory. Moscow. Nauka, 576.

14. *Shemiakyn E. Y.* (1968). Dynamic problems of the theory of elasticity and plasticity. Novosybyrsk: NHU, 338.

15. *Byrher Y. A., Mavliutov R. R.* (1986). Strength of materials: Uchebnoe posobye. Moscow. Nauka, 560.

16. *Tymoshenko S. P.* (1972). Elasticity theory course. Kyiv: Naukova dumka, 508.

17. *Rogovskii I. L., Titova L. L., Trokhaniak V. I., Haponenko O. I., Ohiienko M. M., Kulik V. P.* (2020). Engineering management of tillage equipment with concave disk spring shanks. INMATEH. Agricultural Engineering. 60(1). 45-52. doi: 10.35633/INMATEH-60-05.

18. *Rogovskii I. L., Titova L. L., Trokhaniak V. I., Rosamaha Yu. O., Blesnyuk O. V., Ohiienko M. M. Ohiienko A. V.* (2019). Engineering management of two-phase coulter systems of seeding machines for implementing precision farming technologies. INMATEH. Agricultural Engineering. 2019. 58(2). 137-146. doi: 10.35633/INMATEH-58-15.

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ СТОЙКИ ДИСКАТОРА

А. В. Козаченко, К. В. Седых

Аннотация. В статье представлены результаты теоретических исследований динамической модели процесса деформации упругой стойки дискового орудия произвольной формы, составлена система дифференциальных уравнений в общем виде и разработан соответствующий программный код в программном пакете Mathematica, который позволяет определить напряжение, относительные и абсолютные деформации в каждой точке упругой стойки дискатора. Принимая форму упругой стойки дискатора за спираль Архимеда, когда функции ее границ заданные в полярных координатах $f_1(\theta)=\dfrac{a\theta}{2\pi}+b$, $f_2(\theta)=\dfrac{a\theta}{2\pi}+b+h$, де $\theta_s \le \theta \le \theta_f$,где и параметры геометрической формы a (шаг спирали), b (смещение спирали вдоль радиальной координаты), h (толщина упругой стойки), определены ее эквивалентная физико-математическая модель в виде жесткого математического маятника длиной l, к грузу которого закреплены две пружины вдоль осей Ox и Oz с коэффициентами жесткости k_x и k_z, соответственно, которые отклоняют его на угол φ. Установлены зависимости коэффициентов жесткости k_x и k_z, длины l и угла φ эквивалентной физико-математической модели упругой стойки дискатора с параметрами геометрической формы a=0,8 м, b=0 м, h=0,01 м от значений сил F_{ex} и F_{ez}, действующих на свободный конец стойки вдоль осей Ox і Oz.

Ключевые слова: диск, упругая стойка дискатора, дисковое орудие, дискатор, деформация упругой стойки.

DYNAMIC MODEL OF PROCESS OF DEFORMATION OF ELASTIC RACK OF DISK CULTIVATOR

O. V. Kozachenko, K. V. Siedykh

Abstract. The article presents the results of theoretical studies of the dynamic model of the process of deformation of the elastic rack of a disk tool of arbitrary shape, a system of differential equations in general and developed the corresponding program code in Mathematica software package. Taking the form of an elastic discus disk for an Archimedean spiral, when the functions of its boundaries are given in polar coordinates $f_1(\theta)=\frac{a\theta}{2\pi}+b$, $f_2(\theta)=\frac{a\theta}{2\pi}+b+h$, where $\theta_s \le \theta \le \theta_f$, where the parameters of the geometric shape a (spiral pitch), b (spiral displacement along the radial coordinate), h (elastic column thickness) are determined by its equivalent physical a mathematical model in the form of a rigid mathematical pendulum of length l, to the load of which are attached two springs along the axes Ox and Oz with stiffness coefficients k_x and k_z, respectively, which deflect it by an angle φ. The dependences of the stiffness coefficients k_x and k_z, the length l and the angle φ of the equivalent physico-mathematical model of the elastic stand of the disc with the parameters of the geometric shape a=0.8 m, b=0 m, h=0.01 m on the values of F_{ex} and F_{ez}, acting on the free end of the rack along the axes Ox and Oz.

Key words: disk, elastic disk rack, disk tool, disk, deformation of elastic rack.

О. В. Козаченко ORCID 0000-0001-5139-6138.
К. В. Сєдих ORCID 0000-0002-5720-8430.