УДК 681.5.07

РОЗРАХУНОК ОБЛАСТЕЙ ЗОВНІШНЬОЇ ТА ВНУТРІШНЬОЇ СТІЙКОСТІ ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ

Л. А. ПАНТАЛІЄНКО, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет біоресурсів і природокористування України
*E-mail:*nubip.ea@gmail.com

Анотація. *Розглянуто загальні постановки задач практичної стійкості систем звичайних диференціальних рівнянь, залежних від параметрів, при постійно діючих збуреннях. У межах сформульованих задач досліджено лінійну систему за наявності відомих або обмежених за нормою збурень. Розроблено алгоритми чисельної побудови областей зовнішньої та внутрішньої стійкості у структурно заданому вигляді для лінійних та нелінійних динамічних обмежень на фазові координати. Окремо розглянуто випадок сумісних обмежень на вектори станів і параметрів системи.*

Ключові слова: практична стійкість, збурення, норма, параметрична система, динамічні обмеження

Актуальність. Подальша розробка конструктивних методів аналізу стійкості [1,2] та пов'язаних із цим задач проектування, керування, адаптації [3,4], у першу чергу, викликана потребами прикладного характеру, зокрема, що виникають у прискорювальній техніці [1,3]. При цьому, з практичної точки зору, важливо провести дослідження стійкості руху не тільки до змінювання початкових умов, а й по відношенню до зовнішніх збурень, що певною мірою впливають на поведінку реального об'єкта [1,2].

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Одним із напрямів розвинення теорії стійкості є чисельне розв'язання задач стійкості на скінченному проміжку часу [1 – 3]. На відміну від інших постановок [1], аналіз стійкості параметричних систем [2,3] дає змогу розширити коло досліджуваних задач, оскільки як параметри можна розглядати і початкові умови динамічної системи. Крім того, подібні задачі є важливою складовою частиною задач проектування малочутливих систем керування та гарантованої чутливості [3], безпосередньо пов'язаних із розрахунками для лінійних резонансних прискорювачів.

Мета дослідження – розробка чисельних методів розв'язання задач практичної стійкості для параметричних систем диференціальних рівнянь за наявності постійно діючих збурень.

Матеріали і методи дослідження. У роботі застосовуються методи теорії стійкості, диференціальних рівнянь та оптимізації.

Результати досліджень та їх обговорення. Припустимо, що динаміка об'єкта описується параметричною системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\alpha)\ ,\ (\ f(0,t,0) \equiv 0\ ), t \in [t_0, T], \tag{1}$$

де $x(t,\alpha)$, α − вектори станів і параметрів вимірності n та m відповідно;

$f(x,t,\alpha)$ − n-вимірна вектор-функція, що задовольняє умовам існування та єдиності розв'язків для будь-яких значень параметрів $\alpha \in G_\alpha$.

Означення 1. Незбурений розв'язок $x(t,0) = 0$ системи (1) називається $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$- стійким, якщо $x(t,\alpha) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$ для початкових умов $x(t_0,\alpha)$ з області G_0^x та довільних $\alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha$.

У випадку сумісних динамічних обмежень $\Phi_{t,\alpha}$, $t \in [t_0, T]$ на фазові координати і параметри оцінюють область $G_0^{x,\alpha}$ початкових умов і параметрів системи (1) у розумінні $\{G_0^{x,\alpha}, \Phi_{t,\alpha}, t_0, T\}$- стійкості її нульового руху.

Для дослідження практичної стійкості з урахуванням збурюючих факторів розглядається параметрична система вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\alpha) + R(x,t,\alpha),\ t \in [t_0, T], \tag{2}$$

де постійно діючі збурення $R(x,t,\alpha)$ вибираються з деякої області Ω_R.

Означення 2. Систему (2) назвемо внутрішньо $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T, \Omega_R\}$-стійкою, якщо $x(t,\alpha) \in \Phi_t, t \in [t_0, T]$ для довільних збурень, початкових умов та параметрів, що задовольняють співвідношення

$$R(x,t,\alpha) \in \Omega_R,\ x(t_0,\alpha) \in G_0^x, \alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha.$$

Означення 3. Система (2) називається зовнішньо $\{D_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$-стійкою, якщо існує хоча б один момент часу $t_1 \in [t_0, T]$, для якого $x(t_1,\alpha) \in \Phi_{t_1}$ для будь-яких $R(x,t,\alpha) \in \Omega_R$, $x(t_0,\alpha) \in D_0^x, D_0^x \supset \Phi_{t_0}, \alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha$.

За аналогією вводять відповідні означення стійкості для системи (2) у випадку сумісних обмежень на вектори станів і параметрів.

У межах наведених постановок задач розглянемо лінійну систему вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + G(t)\alpha + f(t),\ t \in [t_0, T] \tag{3}$$

за наявності відомих або обмежених за нормою збурень:

$$f(t) \in \Omega_R^{(1)} = \left\{ f(t) : \left(\int_{t_0}^{T} \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(\tau)|^q \right)^{\frac{q_1}{q}} d\tau \right)^{\frac{1}{q_1}} \le \overline{R},\ 1 \le q \le \infty,\ 1 \le q_1 \le \infty \right\}. \tag{4}$$

Для формулювання критеріїв оцінки областей початкових умов введемо наступні поняття стійкості.

Означення 4. Систему (2) назвемо внутрішньо $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$ - стійкою, якщо $x(t,\alpha) \in \Phi_t, t \in [t_0, T]$, лише тільки $f(t) \in \Omega_R^{(1)}$, $x(t_0,\alpha) \in \{x : x^* Bx \le c^2\}$, $\alpha \in G_0^\alpha = \{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\} \subset G_\alpha$.

Означення 5. Система (2) називається зовнішньо $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$- стійкою, якщо існує хоча б один момент часу $t_1 \in [t_0, T]$, для якого $x(t_1,\alpha) \in \Phi_{t_1}$ для будь-яких $f(t) \in \Omega_R^{(1)}$, $x(t_0,\alpha) \in \{x : x^* Bx \le c^2\} \supset \Phi_{t_0}$, $\alpha \in G_0^\alpha = \{\alpha : \alpha^* B_\alpha \alpha \le c_\alpha^2\} \subset G_\alpha$.

Для чисельного оцінювання множини початкових умов розглянемо лінійні та нелінійні фазові обмеження Φ_t, $t \in [t_0, T]$:

$$\Phi_t = \Gamma_t = \left\{ x : \left| l_s^*(t) x \right| \le 1, s = 1,2,...N \right\},\ t \in [t_0, T], \tag{5}$$

$$\Phi_t = \Psi_t = \{ x : \psi(x,t) \le 1 \},\ t \in [t_0, T]. \tag{6}$$

Тут $l_s(t)$, $s = 1,2,...,N$ − задані неперервні вектор-функції вимірності n;

$\psi(x,t)$ − скалярна функція, неперервна по t разом зі своїми частинними похідними по компонентах вектора x;

Ψ_t, − замкнена опукла множина для будь-якого t, що містить нульову точку.

Якщо динамічні обмеження на вектори станів і параметрів системи сумісного типу [2]:

$$\Phi_{t,\alpha} = \Gamma_{t,\alpha} = \left\{ x, \alpha : \left| l_s^*(t) x + m_s^* \alpha \right| \le 1, s = 1,2,...N \right\},\ t \in [t_0, T], \tag{7}$$

$$\Phi_{t,\alpha} = \Psi_{t,\alpha} = \{ x, \alpha : \psi(x,t,\alpha) \le 1 \}, t \in [t_0, T], \tag{8}$$

чисельно оцінюють множину початкових умов $G_0^{x,\alpha} = \{ x, \alpha : x^* Bx + \alpha^* B_\alpha \alpha \le c^2 \}$.

Критерій 1. Для того, щоб система (3) була внутрішньо $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Gamma_t, t_0, T\}$ - або $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Psi_t, t_0, T\}$ - стійкою за наявності відомих збурень, необхідно й достатньо, щоб виконувалася відповідно одна з нерівностей

$$c^2 \le \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s = 1,2,...,N} \min_{\alpha \in G_0^\alpha} \frac{\left(1 - \left| l_s^*(t) \left(a(t) + G_1(t) \alpha \right) \right| \right)^2}{l_s^*(t) Q^{-1}(t) l_s(t)},$$

$$\left| l_s^*(t)\left(a(t)+G_1(t)\alpha\right)\right|<1,\ s=1,2,...,N,\ \alpha\in G_0^\alpha,\ t\in[t_0,T]; \tag{9}$$

$$c^2\le\min_{t\in[t_0,T]}\ \min_{\bar{x}\in\Psi_t'}\ \min_{\alpha\in G_0^\alpha}\frac{\left(g^*(\bar{x},t)(\bar{x}-G_1(t)\alpha-a(t))\right)^2}{g^*(\bar{x},t)Q^{-1}(t)g(\bar{x},t)},$$

$$g^*(\bar{x},t)(\bar{x}-G_1(t)-a(t))>0,\ \bar{x}\in\Psi_t',\ \alpha\in G_0^\alpha,\quad t\in[t_0,T]. \tag{10}$$

Тут $g^*(x,t)=grad_x^*\psi(\bar{x},t)$, Ψ_t' − межа замкненої опуклої множини Ψ_t, $t\in[t_0,T]$, $G_1(t)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t,\tau)G(\tau)d\tau$, $a(t)=\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau$, $Q^{-1}(t)=\mathrm{X}(t,t_0)B^{-1}\mathrm{X}^*(t,t_0)$, $\mathrm{X}(t,t_0)$ – нормована фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи (3) при $\alpha=0$.

Доведення критерію 1 здійснюється шляхом подання загального розв'язку системи (3) у формі Коші та запису умов належності траєкторії системи динамічним обмеженням (5) та (6). При цьому замкнену опуклу множину Ψ_t, $t\in[t_0,T]$ необхідно апроксимувати дотичними гіперплощинами та розв'язати відповідну екстремальну задачу.

Визначаючи мінімум по вектору параметрів α, формули (9), (10) можна подати у більш зручному для розрахунку вигляді:

$$c^2\le\min_{t\in[t_0,T]}\ \min_{s=1,2,...,N}\frac{\left(1-\left|l_s^*(t)\pm c_\alpha\sqrt{l_s^*(t)G_1(t)B_\alpha^{-1}G_1^*(t)l_s(t)}\right|\right)^2}{l_s^*(t)Q^{-1}(t)l_s(t)},$$

$$c^2\le\min_{t\in[t_0,T]}\ \min_{\bar{x}\in\Psi_t'}\frac{\left(g^*(\bar{x},t)(\bar{x}-a(t))\pm c_\alpha\sqrt{g^*(\bar{x},t)G_1(t)B_\alpha^{-1}G_1^*(t)g(\bar{x},t)}\right)^2}{g^*(\bar{x},t)Q^{-1}(t)g(\bar{x},t)}.$$

Критерій 2. Для внутрішньої $\{c,B,c_\alpha,B_\alpha,\Gamma_t,t_0,T\}$ - або $\{c,B,c_\alpha,B_\alpha,\Psi_t,t_0,T\}$ - стійкості системи (3) при постійно діючих збуреннях (4), необхідно й достатньо, щоб відповідно

$$c^2\le\min_{t\in[t_0,T]}\ \min_{s=1,2,...,N}\ \min_{\alpha\in G_0^\alpha}\frac{\left(1-\left|l_s^*(t)G_1(t)\alpha\right|-a_s(t)\right)^2}{l_s^*(t)Q^{-1}(t)l_s(t)},$$

або

$$c^2\le\min_{t\in[t_0,T]}\ \min_{\bar{x}\in\Psi_t'}\ \min_{\alpha\in G_0^\alpha}\frac{\left(g^*(\bar{x},t)(\bar{x}-G_1(t)\alpha-a_{\bar{x}}(t))\right)^2}{g^*(\bar{x},t)Q^{-1}(t)g(\bar{x},t)}.$$

Тут $a_s(t)=\max_{\|f\|\le\bar{R}}\left|l_s^{(i)^*}\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau\right|=\bar{R}\left(\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}x_{ij}(t,\tau)l_{si}(t)\right|^p\right)^{p_1/p}d\tau\right)^{1/p_1}$,

$$a_{\bar{x}}(t)=\max_{\|f\|\le\bar{R}}\left|grad_x^*\psi(\bar{x},t)\int_{t_0}^{t}\mathrm{X}(t,\tau)f(\tau)d\tau\right|=\bar{R}\left(\int_{t_0}^{t}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}x_{ij}(t,\tau)\frac{\partial\psi(\bar{x},t)}{\partial x_i}\right|^{p}\right)^{p_1/p}d\tau\right)^{1/p_1},$$

$$\mathrm{X}(t,\tau)=\{x_{ij}(t,\tau)\}_n^n,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ \frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1.$$

Критерій 3. Для зовнішньої $\{c,B,c_\alpha,B_\alpha,\Gamma_t,t_0,T\}$ та $\{c,B,c_\alpha,B_\alpha,\Psi_t,t_0,T\}$-стійкості системи (3) при невідомих збуреннях (4) необхідно й достатньо, щоб справджувалися відповідно нерівності:

$$c^2\le\max_{t\in[t_0,T]}\min_{s=1,2,\dots,N}\min_{\alpha\in G_0^\alpha}\frac{\left(1-\left|l_s^*(t)G_1(t)\alpha\right|-a_s(t)\right)^2}{l_s^*(t)Q^{-1}(t)l_s(t)},$$

$$c^2\le\max_{t\in[t_0,T]}\min_{\bar{x}\in\Psi_t'}\min_{\alpha\in G_0^\alpha}\frac{\left(g^*(\bar{x},t)(\bar{x}-G_1(t)\alpha-a_{\bar{x}}(t))\right)^2}{g^*(\bar{x},t)Q^{-1}(t)g(\bar{x},t)}.$$

Аналогічні оціночні критерії можна дістати для випадку сумісних обмежень типу (7), (8). Так, наприклад, умови зовнішньої $\{c,B,c_\alpha,B_\alpha,\Gamma_t,t_0,T\}$ стійкості за наявності збурень (4) мають такий вигляд:

$$c^2\le\max_{t\in[t_0,T]}\min_{s=1,2,\dots,N}\frac{(1-a_s(t))^2}{l_s^*(t)Q_1(t)l_s(t)+m_s^*B_\alpha^{-1}m_s+2l_s^*(t)G_1(t)B_\alpha^{-1}m_s},$$

де $Q_1(t)=\mathrm{X}(t,t_0)B^{-1}\mathrm{X}^*(t,t_0)+G_1(t)B_\alpha^{-1}G_1^*(t)$.

Результати досліджень та їх обговорення. Для лінійних параметричних систем диференціальних рівнянь за наявності збурень здійснено чисельний розрахунок областей внутрішньої та зовнішньої стійкості. Розглянуто випадки відомих та обмежених за нормою збурень для лінійних і нелінійних динамічних обмежень.

Висновки і перспективи. Сформульовано постановки задач практичної стійкості параметричних систем звичайних диференціальних рівнянь за наявності постійно діючих збурень. Для лінійних неоднорідних систем зі збуреннями одержано оптимальні оцінки областей початкових умов у заданих структурах. Такий підхід можна запровадити для аналізу стійкості інших класів параметричних систем (систем зі змінною структурою та дискретних параметричних систем).

Список літератури

1. Бублик Б. Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б. Н. Бублик, Ф. Г. Гаращенко, Н. Ф. Кириченко. – К. : Наук. думка, 1985. – 304 с.

2. Гаращенко Ф. Г. Аналіз та оцінка параметричних систем : навч. посіб. / Ф. Г. Гаращенко, Л. А. Панталієнко. – К. : ІСДО, 1995. – 140 с.

3. Панталієнко Л. А. Дослідження задач обмеженої чутливості методами практичної стійкості / Л. А. Панталієнко // Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». – 2014. – Вип. 194, ч. 2. – С. 243−248.

4. Гаращенко Ф. Г. Адаптивные модели аппроксимации сигналов в структурно-параметрических классах функций / Ф. Г. Гаращенко, О. С. Дегтярь, О. Ф. Швець // Проблемы управления и информатики. – 2011. – № 2. – С. 69−77.

References

1. Bublyk, B. N., Harashchenko, F. H., Kyrychenko, N. F. (1985). Strukturno-parametrycheskaia optymyzatsyia y ustoichyvost dynamyky puchkov [Structural-parametric optimization and stability of beam dynamics]. Kyiv, Ukraine: Scientific thought, 304.

2. Harashchenko, F. H., Pantalienko, L. A. (1995). Analiz ta otsinka parametrychnykh system: Navch. posibnyk [Analysis and evaluation of parametric systems: Teach. Manual]. Kyiv, Ukraine: 140. / F. H. Harashchenko, L. A. Pantalienko. – K. : ISSE, 140.

3. Pantaliienko, L. A. (2014). Doslidzhennya zadach obmezhenoyi chutlyvosti metodamy praktychnoyi stiykosti [Investigation of the problems of limited sensitivity by methods of practical stability]. Scientific Journal NUBaN Ukraine. A series of «Technology and Energy AIC», 194 (2), 243−248.

4. Harashchenko, F. H. (2011). Adaptyvnyye modely approksymatsyy syhnalov v strukturno-parametrycheskykh klassakh funktsyi [Adaptive models of signal approximation in structure-parametric classes of functions]. Scientific Journal «Problems of management and informatics», № 2, 69−77.

РАСЧЕТ ОБЛАСТЕЙ ВНЕШНЕЙ И ВНУТРЕННЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Л. А. Панталиенко

Аннотация. *Рассмотрены общие постановки задач практической устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от параметров, при постоянно действующих возмущениях. В рамках сформулированных задач исследована линейная система при наличии известных или ограниченных по норме возмущений. Разработаны алгоритмы численного построения областей внешней и внутренней устойчивости в структурно заданном виде для линейных и нелинейных динамических ограничений на фазовые координаты. Отдельно рассмотрен случай совместных ограничений на векторы состояний и параметров системы.*

Ключевые слова: практическая устойчивость, возмущения, норма, параметрическая система, динамические ограничения

CALCULATION OF AREAS OF EXTERNAL AND INTERNAL STABILITY FOR PARAMETRIC SYSTEMS

L. A. Pantaliyenko

Abstract. *The general problems of the practical stability of systems of ordinary differential equations, depending on parameters, with continuous perturbations are considered. In the framework of the formulated problems, a linear system was studied in the presence of known or perturbation-bound perturbations. The algorithms of numerical construction of the regions of external and internal stability in the structurally determined form for linear and nonlinear dynamic constraints on phase coordinates are developed. Separately, the case of compatible restrictions on the state vectors and system parameters are considered.*

Keywords: practical stability, perturbation, norm, parametric system, dynamic constraints

УДК 515.164

ТОПОЛОГІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Т. Г. КРИВОРОТ, кандидат педагогічних наук, старший викладач
Національний університет біоресурсів і природокористування України
E-mail: tania.krivorot@gmail.com

Анотація. *Багато процесів, які виникають у природничих науках описуються гладкими та неперервними функціями. При створенні класифікації неперервних функцій виникає багато труднощів, оскільки поведінка функції в околі критичної точки може бути складною і не є аналогічною до гладкого випадку. Питання класифікації та дослідження умов топологічної еквівалентності функцій двох змінних на многовидах є важливим напрямом дослідження в топології.*

У статті розглянуто питання топологічної еквівалентності неперервних функцій двох змінних. Їх топологічна класифікація повністю проведена у випадку гладких функцій на многовидах. Доведено, що в околі ізольованої критичної точки функція топологічно еквівалентна Rezn, а в околі локального мінімуму (максимуму) еквівалентна x2 + y2. Проілюстровано один із класів неперервних функцій, що мають лише особливість типу сідло, а також розглянуто випадок функцій з ізольованим локальним мінімумом (максимумом). Охарактеризовано випадок неперервних функцій з точкою ізольованого локального мінімуму (максимуму) у внутрішності області, побудовані приклади, які окреслюють особливості, що можуть виникнути і стати перешкодою при топологічній класифікації функцій двох змінних.

Ключові слова: топологічна еквівалентність, функція, многовид, ізольований локальний екстремум