УДК 514.18

КОНСТРУЮВАННЯ СФЕРИЧНИХ КРИВИХ У ФУНКЦІЇ НАТУРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

С.Ф. Пилипака, *доктор технічних наук*
Т.М. Захарова, *аспірант**
Національний університет біоресурсів і природокористування України

Розроблено три підходи до конструювання кривих, описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра, на поверхні сфери. Наведено рівняння знайдених кривих та здійснено візуалізацію отриманих результатів.

Вступ. Параметричні рівняння кривих у функції натурального параметра (довжини власної дуги) мають особливе значення для розв'язання багатьох задач, особливо у диференціальній геометрії. Для кривих, представлених у такій формі, завжди можна знайти натуральне рівняння. Окрім того, це дає можливість застосовувати до них формули Френе. Інтерес викликають криві, розташовані на заданій поверхні обертання, зокрема на сфері, адже сферичні криві представляють собою особливий клас кривих.

Параметричні рівняння кривих у функції натурального параметра широко застосовуються в теорії згинання листового матеріалу (довжина ліній є сталою). Окрім того, з їх допомогою зручно описувати кінематичні характеристики руху матеріальної частинки по заданій траєкторії [1]. З огляду на це у деяких наукових працях розробляються підходи до конструювання кривих за їх натуральними рівняннями [2, 3].

Завданням даної публіккації є розробка підходів до конструювання просторових кривих, розташованих на поверхні сфери і описаних параметричними рівняннями у функції натурального параметра.

Методика досліджень. Параметричні рівняння сфери одиничного радіуса мають вигляд:

$$X = \sin u \cdot \cos v;\ Y = \sin u \cdot \sin v;\ Z = \cos u, \tag{1}$$

де u і v — незалежні змінні.

Довжину лінії на поверхні сфери можна визначити за допомогою першої квадратичної форми, для знаходження якої знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \cos u \cdot \cos v;\quad \frac{\partial Y}{\partial u} = \cos u \cdot \sin v;\quad \frac{\partial Z}{\partial u} = -\sin u;$$
$$\frac{\partial X}{\partial v} = -\sin u \cdot \sin v;\quad \frac{\partial Y}{\partial v} = \sin u \cdot \cos v;\quad \frac{\partial Z}{\partial v} = 0. \tag{2}$$

Тоді перша квадратична форма сфери одиничного радіуса запишеться наступним чином:

$$dS^2 = du^2 + \sin^2 u \cdot dv^2. \tag{3}$$

Результати досліджень та їх обговорення. *Перший підхід.* Для того, щоб задати лінію на поверхні сфери (1), необхідно певним чином зв'язати між собою незалежні змінні u і v. Розглянемо констру-

*Науковий керівник - професор С.Ф. Пилипака.

ювання кривих за допомогою інтегрування квадратичної форми (3).

Нехай незалежною змінною є u, тобто функціональна залежність має вигляд: $v=v(u)$. Розділимо ліву і праву частини рівняння (3) на du^2:

$$(ds/du)^2 = (du/du)^2 + \sin^2 u \cdot (dv/du)^2, \qquad (4)$$

звідки $ds/du = \sqrt{1+\sin^2 u \cdot (dv/du)^2}$. Перепоною в отриманні аналітичного виразу довжини дуги є інтегрування підкореневого виразу. Уникнути цього можна шляхом прирівнювання лівої частини рівняння (4) до такої функції $f(u)$, щоб її можна було проінтегрувати, а після цього знайти залежність $u=u(s)$. Нехай $f=1/\sin^2 u$, тобто:

$$(ds/du)^2 = 1/\sin^2 u. \qquad (5)$$

Тоді диференціальне рівняння (4) набуває вигляду:

$$1+v'^2 \sin^2 u = 1/\sin^2 u. \qquad (6)$$

Розв'язком диференціального рівняння (6) є вираз:

$$v = \mathrm{cosec}\, u. \qquad (7)$$

Інтегрування виразу (5) дає:

$$s = \ln(\mathrm{tg}\, u/2). \qquad (8)$$

Перейдемо до функціональної залежності між змінними u і v через третій параметр — довжину дуги. Для цього з отриманої залежності (8) знаходимо:

$$u = 2 \cdot \mathrm{arctg}(e^s). \qquad (9)$$

Підстановкою (9) у (7) отримаємо залежність $v=v(u)$.

$$v = \cosh s. \qquad (10)$$

Таким чином, вирази (9) і (10) є внутрішніми рівняннями кривої на сфері у функції натурального параметра s.

Підстановка (9) і (10) у рівняння сфери (1) дасть параметричні рівняння кривої на її поверхні у функції натурального параметра s:

$$x = \mathrm{sech}\, s \cdot \cos(\cosh s);\ y = \mathrm{sech}\, s \cdot \sin(\cosh s);\ z = -\mathrm{tgh}\, s. \qquad (11)$$

Для рівнянь (11) виконується рівність $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, , що свідчить про правильність отриманих результатів. На рис.1 крива побудована за рівняннями (11) у проекціях та в аксонометрії на поверхні сфери.

Іншу криву можна отримати, прирівнявши ліву частину рівняння (4) до функції $f = 1/\cos^2 u$. У такому випадку внутрішні рівняння отриманої кривої будуть мати вигляд:

$$u = 2 \cdot \arccos\sqrt{(1+\mathrm{sech}\, s)/2};$$

$$v = \ln\left(\frac{\sqrt{1-\mathrm{sech}\, s} + \sqrt{1+\mathrm{sech}\, s}}{\sqrt{1+\mathrm{sech}\, s} - \sqrt{1-\mathrm{sech}\, s}}\right), \qquad (12)$$

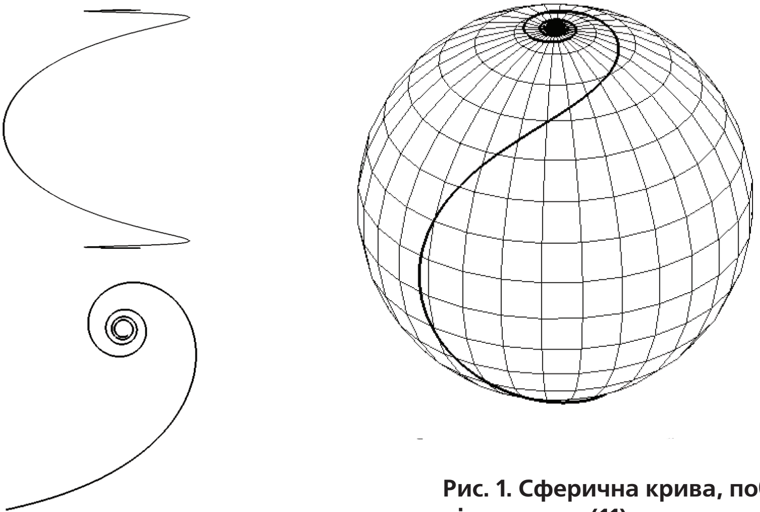


Рис. 1. Сферична крива, побудована за рівняннями (11)

а її натуральне рівняння матиме досить компактний вигляд: $k=\sqrt{1+4\cdot\operatorname{sech}^2 s}$.

Конструйована крива зображена на рис. 2,а. Особливістю даної кривої є те, що при нескінченному прирості довжини дуги *s* утворена просторова крива переходить у пласку (коло).

За допомогою запропонованого підходу можна знаходити інші криві на поверхні сфери, що описуються параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги.

Наприклад, розглянемо випадок, прийнявши залежності *u* і *v* функціями довжини дуги *s*: *u*=*u*(*s*) і *v*=*v*(*s*). Тоді незалежною змінною є дуга s і диференціальна форма (3) після ділення на *ds* приймає вигляд:

$$1=u'^2+v'^2\cdot\sin^2 u. \tag{13}$$

Розв'язавши (13) відносно *v*=*v*(*s*), отримуємо інтеграл:

$$dv/ds=\sqrt{1-u'^2}\big/\sin u\,. \tag{14}$$

Для інтегрування виразу (14) необхідно задати функцію *v*=*v*(*s*) таким чином, щоб вона могла бути проінтегрована. Наприклад, при *u*=*as*, де *a* – постійна, інтегрування виразу (14) дає:

$$v=\frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\ln\operatorname{tg}\frac{as}{2}\,. \tag{15}$$

Отримані внутрішні рівняння *u*=*as* і (15) повністю збігаються із результатом, отриманим в [4] іншим способом. Натуральне рівняння даної кривої має вигляд: $k=\sqrt{a^2-(a^2-1)\cdot\operatorname{cosec}^2(as)}$. Крива на аксонометрії сфери представлена на рис. 2,б.

Другий підхід. Інший підхід до конструювання кривих на поверхні сфери у функції натурального параметра можна сформулювати, якщо віднести її поверхню до ізометричної системи координат. Параметричні рівняння сфери одиничного радіуса у такому випадку запишуться:

$$X=\operatorname{sech}u\cdot\cos v;\ Y=\operatorname{sech}u\cdot\sin v;\ Z=\operatorname{tgh}u. \tag{16}$$

Перша квадратична форма сфери буде мати вигляд:

$$dS^2=\operatorname{sech}^2 u(du^2+dv^2), \tag{17}$$

що свідчить про те, що вона віднесена до ізометричної сітки координатних ліній. Розглянемо приклади конструювання кривих у функції натурального параметра на поверхні сфери за допомогою наведеного підходу.

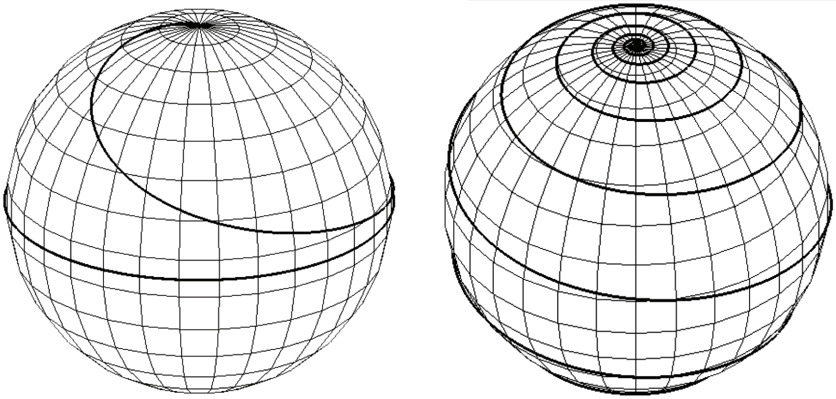


Рис. 2. Криві на сфері (1), задані внутрішніми рівняннями у функції натурального параметра:

а) $u=2\cdot\arccos\sqrt{(1+\operatorname{sech}s)/2};\quad v=\ln\left(\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{sech}s}+\sqrt{1+\operatorname{sech}s}}{\sqrt{1+\operatorname{sech}s}-\sqrt{1-\operatorname{sech}s}}\right)$;

б) $u=as,\ v=\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}\ln\operatorname{tg}\dfrac{as}{2}$

Зв'яжемо між собою незалежні змінні u і v за допомогою третьої змінної t:

$$u = t, \quad v = at, \tag{18}$$

де a – довільна стала.

Тоді перша квадратична форма поверхні матиме вигляд:

$$ds/dt = \operatorname{sech} t \cdot \sqrt{1+a^2}\,. \tag{19}$$

Інтегруванням виразу (19) знаходимо:

$$s = 2 \cdot \sqrt{1+a^2} \cdot \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tgh}\left(t/2\right)\right), \text{ звідки} \tag{20}$$

$$t = 2 \cdot \operatorname{arctgh}\left(\operatorname{tg}\left(s \Big/ 2 \cdot \sqrt{1+a^2}\right)\right). \tag{21}$$

Заміною змінної t на вираз (21) у рівняннях (18) отримаємо рівняння утвореної кривої у внутрішніх координатах:

$$u = 2 \cdot \operatorname{arctgh}\left(\operatorname{tg}\left(s \Big/ 2 \cdot \sqrt{1+a^2}\right)\right);$$

$$v = 2 \cdot a \cdot \operatorname{arctgh}\left(\operatorname{tg}\left(s \Big/ 2 \cdot \sqrt{1+a^2}\right)\right). \tag{22}$$

Відповідно підстановка виразів (22) у параметричні рівняння сфери (16) дають змогу отримати параметричні рівняння кривої у функції довжини власної дуги:

$$x = \operatorname{sech} A \cdot \cos(A \cdot a);$$

$$y = \operatorname{sech} A \cdot \sin(A \cdot a);$$

$$z = \operatorname{tgh} A, \tag{23}$$

де $A = 2 \cdot \operatorname{arctgh}\left(\operatorname{tg}\left(s \Big/ 2 \cdot \sqrt{1+a^2}\right)\right)$.

Натуральне рівняння даної кривої має вигляд:

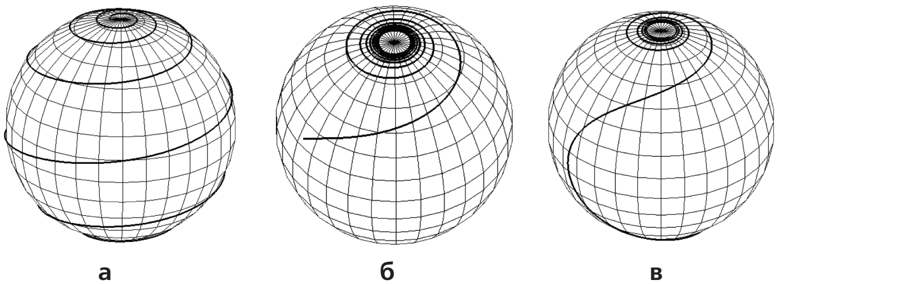
$$k = \left(1+a^2\right)^{-1/2} \cdot \sqrt{1 + a^2 \cdot \sec^2\left(s \Big/ \sqrt{1+a^2}\right)}\,. \tag{24}$$

Дана крива зображена на рис. 3,а.

За допомогою запропонованого підходу можна знайти також деякі криві, які були знайдені за допомогою попереднього підходу. Наприклад, задання залежності $v = cosh(u)$ дає змогу отримати криву, наведену на рис.1. Якщо ж за змінну прийняти v і y виразі (17) дужки $(du^2 + dv^2)$ прирівняти до виразу $ctgh^2 u$, можна отримати криву, зображену на рис. 2,а.

Окрім того, за запропонованим підходом нами було знайдено ще дві криві на поверхні сфери, описані параметричними рівняннями у функції натурального параметра: прирівнявши ліву частину першої квадратичної форми (17) до виразу $e^2 u$, ми отримали криву, наведену на рис. 3,б, а до виразу $cosh^2 u$ – відповідно криву, зображену на рис. 3,в.

Третій підхід до конструювання кривих на поверхні сфери, описаних пара-



а б в

Рис. 3. Криві на сфері (16), задані внутрішніми рівняннями у функції натурального параметра:

а) **а)** $u = 2 \cdot \operatorname{arctgh}\left(\operatorname{tg}\left(s \Big/ 2 \cdot \sqrt{1+a^2}\right)\right)$; $v = 2 \cdot a \cdot \operatorname{arctgh}\left(\operatorname{tg}\left(s \Big/ 2 \cdot \sqrt{1+a^2}\right)\right)$;

б) **б)** $u = \ln s; \quad v = \left(A - \sqrt{3} \cdot arctg\dfrac{s^2-3}{\sqrt{3}A} + \lg\left(2 \cdot (s^2 + A + 1)\right)\right)/4,$ де $A = \sqrt{s^4 - 2s^2 - 3}$;

в) **в)** $u = \operatorname{arcsinh} s; \quad v = \left(\sqrt{s^4 + 3s^2 + 2} + \operatorname{arcsinh}\sqrt{1+s^2}\right)/2.$

метричними рівняннями у функції натурального параметра здійснимо на основі відомих рівнянь поверхні обертання [5]:

$$X = f\cdot\cos v;\quad Y = f\cdot\sin v;\quad Z = \psi, \qquad (25)$$

де $f=f(s)$ та $\psi=\psi(s)$ – певні функції.

Поставимо умову, щоб поверхня обертання була сферою. У такому випадку повинна виконуватися рівність:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \qquad (26)$$

Підстановкою (25) у (26) отримаємо:

$$\psi = \sqrt{1-f^2}. \qquad (27)$$

Параметричні рівняння сфери мають вигляд:

$$X = f\cdot\cos v;\quad Y = f\cdot\sin v;\quad Z = \sqrt{1-f^2}. \qquad (28)$$

Наведемо приклади. Нехай $f=cos(as)$. Тоді параметричні рівняння кривої на поверхні сфери будуть мати вигляд:

$$x = \cos(a\cdot s)\cdot\cos(v(s));$$
$$y = \cos(a\cdot s)\cdot\sin(v(s));$$
$$z = \sin(a\cdot s). \qquad (29)$$

Скориставшись тотожністю (26), отримуємо наступне диференціальне рівняння та його розв'язок:

$$a^2 + \cos^2(a\cdot s)\cdot v'^2(s) = 1, \text{ звідки} \qquad (30)$$

$$v = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}\cdot \lg\left(\frac{\cos(a\cdot s/2)+\sin(a\cdot s/2)}{\cos(a\cdot s/2)-\sin(a\cdot s/2)}\right). \qquad (31)$$

Підстановкою виразу (31) і прийнятої залежності $f=cos(as)$ у рівняння сфери (28) отримаємо параметричні рівняння конструйованої кривої у функції натурального параметра, при чому її натуральне рівняння є досить компактним: $k = \sqrt{a^2-(a^2-1)\cdot\sec^2(a\cdot s)}$. Візуалізацію утвореної кривої здійснено на рис. 4,а.

Іншу криву можна отримати за допомогою загального вигляду виразу (26):

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{f'^2(s)}{1-f^2(s)} + f^2(s)\cdot v'^2(s). \qquad (32)$$

Нехай $f=cos(as)$, тоді вираз (32) приймає такий вигляд:

$$\frac{f'^2(s)}{1-f^2(s)} + f^4(s) = 1. \qquad (33)$$

Розв'язуючи диференціальне рівняння (33) знаходимо вираз $f=f(s)$, а інтегру-

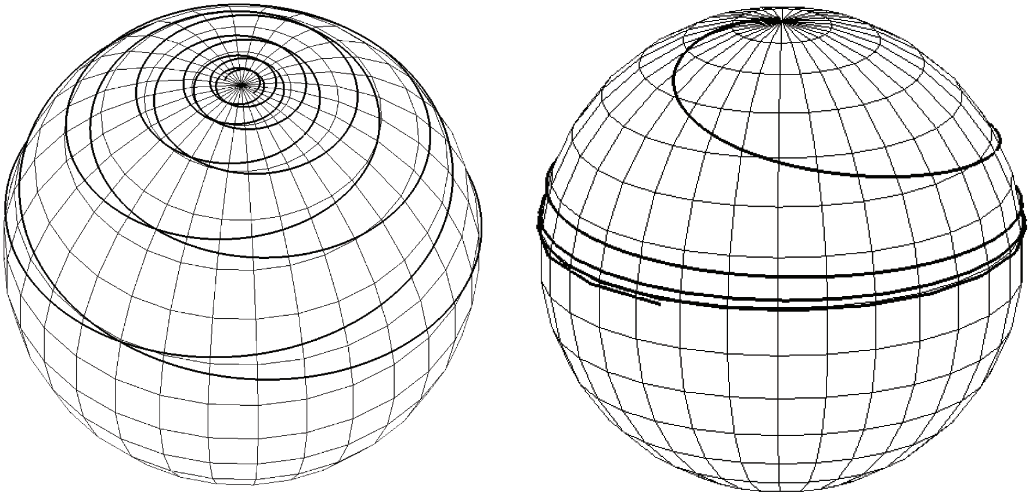


Рис. 4. Криві на сфері (28), що описуються натуральними рівняннями у функції натурального параметра:

а) $k = \sqrt{a^2-(a^2-1)\cdot\sec^2(a\cdot s)}$ **;** **б)** $k = \dfrac{\sqrt{\cosh^2(2\sqrt{2}s)+42\cosh(2\sqrt{2}s)-27}}{3+\cosh(2\sqrt{2}s)}$

ючи цей вираз – відповідно $v=v(s)$ і описаним вище способом знаходимо параметричні рівняння конструйованої кривої у функції довжини власної дуги та її натуральне рівняння. Отриману криву наведено на рис. 4,б.

Якщо ж у виразі (32) прийняти $\frac{f'(s)}{\sqrt{1-f^2(s)}}=f(s)$, а далі дотриматись описаного алгоритму, конструйованою буде крива, зображена на рис. 1, яку раніше було знайдено за допомогою першого підходу.

За допомогою розроблених підходів можна отримувати нові сферичні криві, описані параметричними рівняннями у функції довжини власної дуги.

Висновки

Запропоновані підходи дозволяють конструювати криві на поверхні сфери у функції натурального параметра.

Сферичні криві являють окремий клас просторових кривих, в яких кривина і скрут зв'язані між собою відомою залежністю у функції довжини дуги. Знайдені криві дають можливість використовувати цю залежність.

Перспективи подальших досліджень полягають у знаходженні таких кривих на інших поверхнях.

Література

1. Войтюк Д.Г., Пилипака С.Ф. Конструювання просторової кривої лінії із заданою кривиною, як траєкторії руху матеріальної точки // Збірник наукових праць НАУ "Механізація сільськогосподарського виробництва". – К.: НАУ, 2001. – Т. 10. – С. 74–78.
2. Пилипака С.Ф., Несвідомін В.М. Побудова просторової кривої лінії за заданими натуральними рівняннями // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: КГТУСА, 1996. – Вып. 59. – С. 106–107.
3. Пилипака С.Ф., Гнітецька Т.В. Конструювання просторових кривих, заданих натуральними рівняннями, за допомогою чисельних методів // Геометричне та комп'ютерне моделювання. Збірник наукових праць, присвячений 75-річчю від дня народження проф. Михайленка В.Є. – Харків: ХДАТОХ, 2002. – Вип. 1. – С. 24–26.
4. Пилипака Т.С. Аналітичне конструювання просторових та сферичних кривих у функції власної дуги // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2008. – Вип. 21. – С. 100–105.
5. Пилипака С.Ф., Захарова Т.М., Федорина Т.П. Конструювання кривих у функції натурального параметра на поверхнях обертання // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Прикл. геометрія та інж. графіка. – Мелітополь: ТДАТУ, 2012. – Т. 55. – С. 176–184.

АННОТАЦИЯ

Пилипака С.Ф., Захарова Т.Н. *Конструирование сферических кривых в функции натурального параметра//Биоресурсы и природопользование. – 2013. –* ***5****,№ 3–4. – С. 57–62.*

Разработаны три подхода к конструированию кривых, описанных параметрическими уравнениями в функции натурального параметра, на поверхности сферы. Приведены уравнения найденных кривых и осуществлена визуализация полученных результатов.

SUMMARY

S. Pylypaka, T. Zakharova. *Constructing of the spherical curves in the natural parameter// Biological Resources and Nature Management. – 2013. –* ***5****, № 1–2. – P. 57–62.*

Three variants of the searching of spatial curves in the function of natural parameter on the surfaces of sphere are considered. The equation of the found curves is resulted and visualization of the got results is carried out.