

ОСОБЛИВОСТІ ЗГИНАННЯ КРИВОЛІНІЙНИХ АБСОЛЮТНО ПРУЖНИХ СТЕРЖНІВ

С. Ф. ПИЛИПАКА, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри
нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну

<https://orcid.org/0000-0002-1496-4615>

E-mail: s.pylypaka@nubip.edu.ua

В. І. ХРОПОСТ, аспірант, <https://orcid.org/0000-0001-9363-3955>

E-mail: khropost@it.nubip.edu.ua

Т. М. ВОЛІНА, кандидат технічних наук, доцент,

<https://orcid.org/0000-0001-8610-2208>

E-mail: Volina@nubip.edu.ua

Т. А. КРЕСАН, кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри
природничо-математичних та загальноінженерних дисциплін

<https://orcid.org/0000-0002-8280-9502>

E-mail: natinubip@nubip.edu.ua

І. Ю. ГРИЩЕНКО, кандидат технічних наук, доцент,

<https://orcid.org/0000-0002-1000-9805>

E-mail: hryshchenko@nubip.edu.ua

В. М. БАБКА, кандидат технічних наук, доцент,

<https://orcid.org/0000-0003-4971-4285>

E-mail: babka@nubip.edu.ua

Національний університет біоресурсів і природокористування України

І. О. РИБЕНКО, старший викладач, <https://orcid.org/0000-0001-7795-1689>

E-mail: i.rybenko@snau.edu.ua

А. М. РЕБРІЙ, старший викладач, <https://orcid.org/0000-0002-3467-2353>

E-mail: a.rebriy@snau.edu.ua

Сумський національний аграрний університет

[https://doi.org/10.31548/dopovidi.3\(109\).2024.019](https://doi.org/10.31548/dopovidi.3(109).2024.019)

***Анотація.** В будівельній механіці при розрахунку прогинів балок застосовується лінійна теорія згину. Вона дає наближений результат, однак цілком прийнятний для практики, оскільки прогини балок мізерні в порівнянні із їх довжиною. При значних прогинах стержнів, коли кривина пружної осі є значною, застосовується нелінійна теорія. В основі неї лежить положення опору матеріалів, згідно якого кривина пружної осі прямо пропорційна прикладеному моменту і обернено пропорційна жорсткості стержня. Такі види пружного згинання присутні у сільськогосподарській ґрунтообробній техніці. Завдяки пружності стержнів, які можуть бути робочими органами*

Пилипака С. Ф., Хропост В. І., Воліна Т. М., Кресан Т. А., Грищенко І. Ю., Бабка В. М., Рибенко І. О., Ребрій А. М.

або ж з'єднувати робочі органи із рамою машини, гасяться пульсуючі навантаження. Стержні у вільному стані можуть мати початкову кривину пружної осі, яка може бути сталою або змінною. Стержень одним кінцем жорстко кріпиться до рами машини, а другий перебуває під дією прикладеної сили. Якщо кривина стала, тобто пружною віссю стержня є дуга кола, то деформація буде однаковою незалежно від того, який кінець стержня кріпиться до рами. Для стержнів із змінною кривиною пружної осі це має значення. В статті розглянуто такі випадки, здійснено відповідні розрахунки на основі яких знайдено форму пружної осі стержня після його згинання. Криволінійні стержні змінної кривини мають різне її значення на кінцях. В зв'язку із цим форма пружної осі під дією слідкуючої сили защемленого стержня буде залежати від того, яким кінцем він защемлений. Момент, під дією якого деформується пружна вісь стержня, залежить від плеча, тобто від довжини дуги пружної осі. Довжина дуги кривої може збільшуватися тільки в одному напрямку від точки відліку. Якщо стержень защежити протилежним кінцем, то потрібно змінити напрям, в якому зростає плече, тобто довжина дуги. Для цього запропоновано спосіб вирішення даного питання, який дозволяє брати будь-яку ділянку криволінійного стержня і досліджувати його на згинання слідкуючою силою при защемленні одного або протилежного кінця.

Ключові слова: пружна вісь, кривина, жорсткість, сила, момент, згинання

Актуальність. Абсолютно пружні металеві елементи, такі як стержні, використовуються в різних галузях інженерії через їхню універсальність і корисні властивості. Вони можуть виконувати функцію вимикачів при достатньому зусиллі, що діє на них, у вимірювальних приладах, у автомобільній промисловості в системах підвіски тощо. Особливо важливу роль вони відіграють в сільськогосподарських машинах, при роботі яких виникають вібрації та пульсуючі навантаження. Завдяки пружним елементам досягається стабільність роботи агрегату, зменшуються його коливання, забезпечується амортизація від вібрації та ударів, які виникають під час роботи. В науковій

літературі здебільшого розглядається згинання стержнів із великим прогином, у яких пружна вісь у вільному стані є прямолінійною. Однак в інженерній практиці широко використовуються пружні елементи із криволінійною пружною віссю у вільному стані, тому **актуальною проблемою** є вивчення їх деформації під дією прикладених сил.

Метою дослідження є аналітичний опис згинання абсолютно пружних криволінійних стержнів, кривина пружної осі яких є змінною величиною, залежною від довжини дуги цієї осі. Вважається, що стержень одним своїм кінцем консольно защемлений, а до другого прикладена слідкуюча сила. Під дією цієї сили відбувається згинання

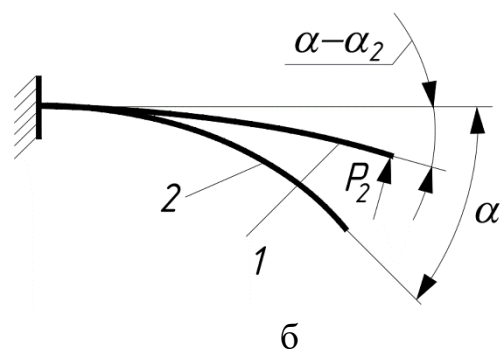
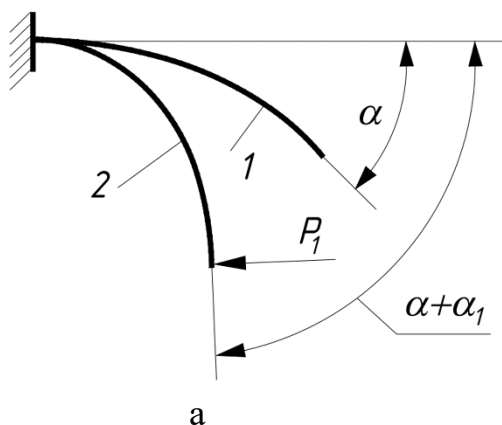
Пилипака С. Ф., Хропост В. І., Воліна Т. М., Кресан Т. А., Грищенко І. Ю., Бабка В. М., Рибенко І. О., Ребрій А. М.

пружної осі стержня. Якщо кінці стержня поміняти місцями, то в результаті його згинання пружна вісь набуде іншої форми, ніж у попередньому випадку.

Пружний стержень може бути розташований на роликах і вільно на них переміщатися при деформації під дією прикладених сил [1]. Значно простішою є задача згинання пружного стержня, один кінець якого зацмелений у вигляді консолі. До протилежного кінця може бути прикладена сила, момент або їх комбінація. Знаходження пружної осі стержня в такому випадку розглянули [2]. Окрему групу становлять задачі знаходження деформації стержня на прикладі бурильних колон [3]. Їх особливістю є велика довжина пружної осі і дією на стержень стінок криволінійних каналів. До цієї групи задач відноситься також праця [4], у якій пружна вісь описується поліноміальними сплайн-функціями. В. Є. Харченко та інші [5] розглянули нелінійний згин стержня під дією

зосередженої сили, яка складає довільний кут між її напрямом та дотичною до осі стержня. Формування спіральної пружини згинанням смуги під дією прикладеної слідкуючої сили розглянуто С. Рудрака та іншими [6]. Застосування пружинного елемента при кріпленні культиваторної лапи, що сприяє покращенню рівномірності її ходу висвітлено в праці В. М. Арендаренко та іншими [7].

Методи та матеріали дослідження. Методи досліджень базуються на концепції нелінійного згину смуги, яка є складовою загальної теорії опору матеріалів [8]. При деформації пружної осі смуги змінюється її кривина, залишаючи довжину дуги цієї осі незмінною [9]. Це важливий аспект при вивченні механічних властивостей матеріалів та їх поведінки під навантаженням [10]. Розглянемо сказане на прикладі консольно закріпленого стержня або смуги 1, яка у вільному стані має криволінійну форму (рис. 1).



Пилипака С. Ф., Хропост В. І., Воліна Т. М., Кресан Т. А., Грищенко І. Ю., Бабка В. М., Рибенко І. О., Ребрій А. М.

Рис. 1. Пружна вісь смуги у вільному стані – 1 і після прикладеної сили P – 2: а) прикладена сила P_1 збільшує кривину пружної осі; б) прикладена сила P_2 зменшує кривину пружної осі

Залежно від того, як спрямована сила P , відома як слідкуюча сила через її властивість залишатися перпендикулярною до кінця осі під час деформації, кривина осі може або зростати, або зменшуватись. У недеформованому стані кривину осі можна виміряти за допомогою кута α , який може збільшуватись до $\alpha + \alpha_1$ (рис. 1,а) або зменшуватись до $\alpha - \alpha_2$ (рис. 1,б) у процесі деформації. Важливо враховувати величину кута у відношенні до довжини s пружної

осі. Границя цього співвідношення визначає кривину k кривої в даній точці, тобто $da/ds = k$. Форма кривої залежить від того, як змінюється кут α уздовж дуги, тобто від залежності $\alpha = \alpha(s)$. Якщо залежність між α і s є лінійною, то кривина k залишається незмінною, а сама крива є дугою кола [11].

У першому випадку (рис. 1,а), кривину k пружної осі після її деформації можна виразити так:

$$k(s) = \frac{d}{ds}(\alpha(s) + \alpha_1(s)) = k_0(s) + k_1(s), \quad (1)$$

де $k_0(s)$ – кривина пружної осі у вільному стані, тобто до початку деформації;

$k_1(s)$ – додаткова кривина пружної осі, яку спричинила дія моменту M_1 від прикладеної сили P_1 .

де $M_1(s)$ – прикладений момент M_1 до криволінійної смуги у функції довжини дуги s її пружної осі; $E \cdot I$ – жорсткість смуги. Вона є добутком моменту інерції I поперечного перерізу смуги на модуль Юнга E .

У відповідності до другого випадку (рис. 1,б), можна записати: $k = k_0 - k_2$. Згідно з теорією опору матеріалів, додаткову кривину $k_1(s)$ можна визначити за допомогою наступного виразу:

$$k_1(s) = \frac{M_1(s)}{EI}, \quad (2)$$

Момент сили $M_1(s)$ представляє собою добуток сили P_1 на довжину дуги s від точки прикладання цієї сили до поточної точки пружної осі: $M_1 = P_1 s$. Беручи це до уваги, підставляємо (2) в (1) і отримуємо:

$$k(s) = k_0(s) + \frac{P_1 s}{EI} \quad \text{або} \quad \frac{d\alpha}{ds} = k_0 + \frac{P_1 s}{EI}. \quad (3)$$

Для іншого випадку (рис. 1,б), коли сила P_2 спрямована в

Пилипака С. Ф., Хропост В. І., Воліна Т. М., Кресан Т. А., Грищенко І. Ю., Бабка В. М., Рибенко І. О., Ребрій А. М.

протилежну сторону, тобто
«випрямляє» пружну вісь, рівняння
(3) набуває вигляду:

$$\frac{d\alpha}{ds} = k_0 - \frac{P_2 s}{EI}. \quad (4)$$

Рівняння (3) і (4) називаються натуральними рівняннями пружної осі смуги після її деформації під дією прикладених сил P_1 або P_2 . Для

$$x = \int \cos \alpha(s) ds;$$

В загальному випадку рівняння (5) потребують чисельних методів інтегрування [11-14].

Результати дослідження та їх обговорення. Крива змінної кривини задається залежністю $\alpha = \alpha(s)$, окрім лінійної залежності, оскільки в такому випадку буде коло. Криву

$$\alpha = \sqrt{\frac{2s}{a}} + \alpha_0, \quad (6)$$

де a стала величина – радіус початкового кола, α_0 – кут між віссю x і дотичною до кривої в початковій точці.

побудови осі смуги за вказаними рівняннями використовуються відомі формули диференціальної геометрії:

$$y = \int \sin \alpha(s) ds. \quad (5)$$

будують інтегруванням виразів (5). Вони не завжди можуть бути проінтегровані, тому потрібно застосовувати чисельні методи.

Візьмемо відому криву змінної кривини – евольвенту кола. Вона має наступну залежність $\alpha = \alpha(s)$:

Інтегруванням виразів (5) після підстановки в них залежності (6) отримаємо:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \left(\sqrt{\frac{2s}{a}} + \alpha_0 \right) + \sqrt{2as} \sin \left(\sqrt{\frac{2s}{a}} + \alpha_0 \right); \\ y &= a \sin \left(\sqrt{\frac{2s}{a}} + \alpha_0 \right) - \sqrt{2as} \cos \left(\sqrt{\frac{2s}{a}} + \alpha_0 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

На рис. 2 за рівняннями (7) побудовано дуги евольвенти кола при

$a=0,7$, $\alpha_0=20^\circ$ при зміні довжини дуги s в межах $s=1 \dots 3$ лінійних одиниць.

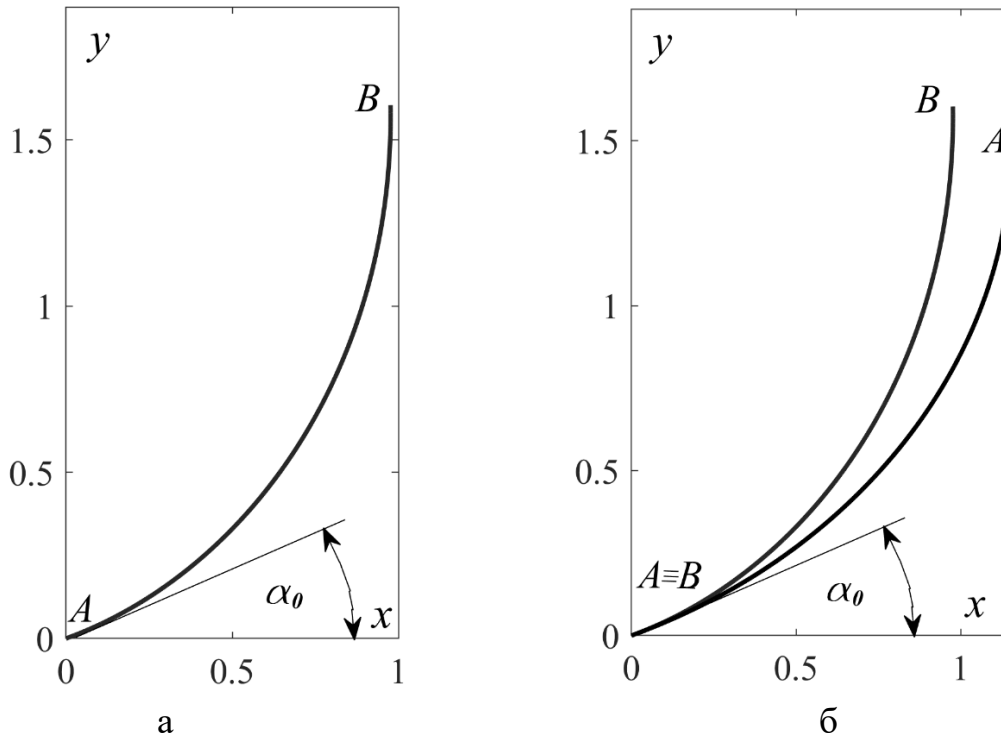


Рис. 2. Дуга евольвенти кола довжиною 2 лінійних одиниць, побудована за рівняннями (7): а) при зміні параметра s від точки A до точки B кривина кривої зменшується; б) конгруентні дуги евольвенти кола суміщені так, що в початковій точці із спільною дотичною мають різні значення кривини

Приймаємо криву AB (рис. 2,а) за пружну вісь криволінійної смуги у вільному стані. Згідно (1) знаходимо

$$k_0 = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2as}}. \quad (8)$$

При підстановці у формулу (8) початкового значення $s_0=1$ отримаємо значення кривини в точці A , а при підстановці кінцевого значення $s_k=3$ – в точці B . Очевидно, що деформація смуги під дією прикладеної до її кінця сили залежатиме від того, який кінець буде консольно защемлений. Відлік моменту $M=P \cdot s$ починається від s_0 , при якому момент найменший і змінюється по мірі зростання параметра s . Такому положенню відповідає крива на рис. 2,а, де вільний кінець буде у точці A , а

залежність її кривини $k_0=k_0(s)$ диференціюванням залежності (6):

защемлений – у точці B . Якщо кінці кривої поміняти місцями, то необхідно змінити рівняння (6). Для цього у рівняння (6), (7), (8) потрібно замість символу “ s ” записати “ s_0+s_k-s ”. Для нашого прикладу це буде “ $4-s$ ”. Межі зміни параметра s залишаються тими ж: $s=1 \dots 3$. Однак при початковому значенні $s_0=1$ ми отримаємо кривину не в точці A , а в точці B згідно формули (8), а сама крива згідно параметричних рівнянь (7) буде побудована так, що її кінець

Пилипака С. Ф., Хропост В. І., Воліна Т. М., Кресан Т. А., Грищенко І. Ю., Бабка В. М., Рибенко І. О., Ребрій А. М.

із попереднього випадку стане початком в даному випадку (рис. 2,б).

Розглянемо згинання смуги для першого випадку (рис. 2,а). При

цьому слідкуюча сила P буде прикладена в точці A , а протилежний кінець (точка B) буде защемлений. Тоді згідно (3) запишемо:

$$k(s) = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2as}} + \frac{Ps}{EI}. \quad (9)$$

Інтегруванням виразу (9) знаходимо залежність $\alpha = \alpha(s)$:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2s}{a}} + \alpha_0 + \frac{Ps^2}{2EI}. \quad (10)$$

Після підстановки (10) у (5) отримаємо параметричні рівняння пружної осі смуги після її згинання слідкуючою силою P . При $P=0$ отримаємо вихідну криву (7). Для інших значень сили P необхідно застосовувати чисельне інтегрування рівнянь (5). Нехай поперечним перерізом смуги буде прямокутник $0,01 \times 0,032$ м. Модуль Юнга пружинної сталі $E = 2,2 \cdot 10^{11}$ Н/м². Момент інерції прямокутного перерізу визначається за формулою $I = a^3 \cdot b / 12$, де a і b – сторони

прямокутника, причому для нашого випадку меншою стороною є $a = 0,01$ м. Після цього знаходимо: $EI = 586,67$ Н·м². Для цих даних за рівняннями (5) з урахуванням (10) за допомогою чисельного інтегрування було побудовано криві для різних значень сили P (рис. 3,а). Оскільки побудова кривих починається з вільного кінця, то протилежний кінець, який защемлено, розташований у різних місцях. При додатних значеннях сили P криволінійна смуга «згинається», при від'ємних – «розгинається».

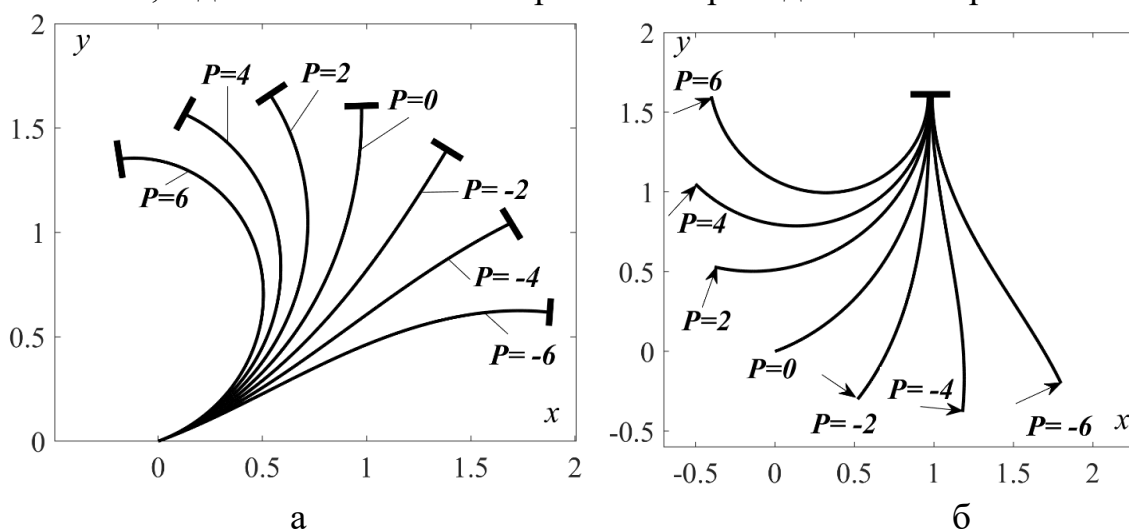


Рис. 3. Форма пружної осі, яку набуває смуга під дією прикладеної сили P при защемленні її в точці В: а) вільний кінець пружної осі, до якого прикладена сила P , спільний для всіх кривих; б) точка защемлення протилежного кінця спільна для всіх кривих

Для наочності пружні осі для різних значень сили P приведено до логічного розташування, коли точка заземлення є спільною (рис. 3,б). Він дає наочне уявлення, як змінюється форма пружної осі при зростанні

слідкуючої сили, спрямованої в одну чи протилежну сторону.

Якщо в смузі AB (рис. 2,а) вільним кінцем зробити точку B і заземити її в точці A , то рівняння (10) в нашому випадку набуває наступного вигляду:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2(4-s)}{a}} + \alpha_0 + \frac{Ps^2}{2EI}. \quad (11)$$

Далі здійснюємо чисельне інтегрування рівнянь (5) із врахуванням (11) з тими ж самими межами зміни параметра s : $s=1 \dots 3$.

Отримані криві пружних осей, аналогічні кривим на рис. 3, наведені на рис. 4.

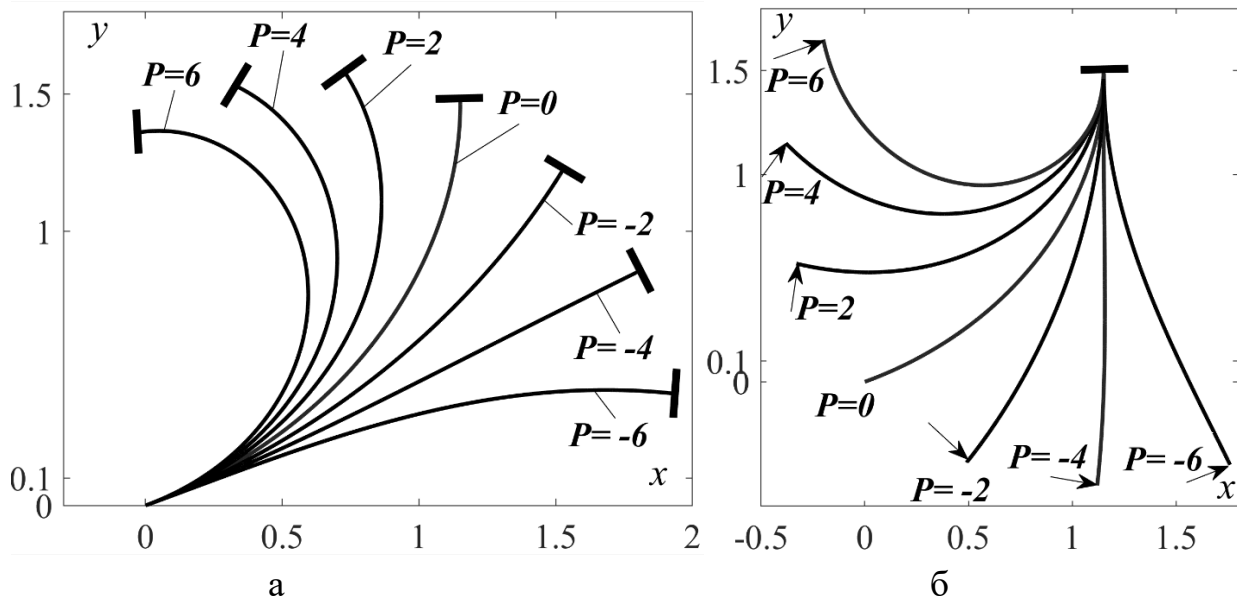


Рис. 4. Форма пружної осі смуги AB , яку вона набуває під дією прикладеної сили P при заземленні її протилежного кінця в точці A : а) вільний кінець пружної осі, до якого прикладена сила P , спільний для всіх кривих; б) точка заземлення протилежного кінця спільна для всіх кривих

На перший погляд може здатися, що рис. 3 і рис. 4 однакові. Але між формою пружних осей при одній і тій же силі P існує відмінність. Наприклад, при $P = -4$ Н форма пружної осі близька до прямої лінії (рис. 4), тоді як в іншому випадку вона має іншу форму (рис. 3). Ця

відмінність буде збільшуватися по мірі збільшення різниці між кривиною кінців осі смуги.

Висновки. 1. Криволінійні стержні змінної кривини мають різне її значення на кінцях. В зв'язку із цим форма пружної осі під дією слідкуючої сили заземленого

Пилипака С. Ф., Хропост В. І., Воліна Т. М., Кресан Т. А., Грищенко І. Ю., Бабка В. М., Рибенко І. О., Ребрій А. М.

стержня буде залежати від того, яким кінцем він защемлений. Момент, під дією кого деформується пружна вісь стержня, залежить від плеча, тобто від довжини дуги пружної осі.

2. Довжина дуги кривої може збільшуватися тільки в одному напрямку від точки відліку. Якщо стержень защемили протилежним

Список використаних джерел

1. Андрусенко О. М. Нелінійне згинання бурильних колон в циліндричних порожнинах вертикальних свердловин. Науково-технічний збірник «Вісник Національного транспортного університету». Серія «Технічні науки». 2017. Вип. 1 (37). С. 3–12.

2. Арендаренко В. М., Ларенко В. В. Особливості розрахунку пружинного елементу регулятора кута атаки культиваторної лапи. Вісник Полтавської державної аграрної академії. 2017. № 3. С. 122–125.

3. Вербило Д. Г. Особливості дослідження деформаційної поведінки матеріалів при випробуваннях на згин. Успіхи матеріалознавства. 2023. № 6. С. 75–85. DOI: <https://doi.org/10.15407/materials2023.06.075>

4. Кресан Т. А., Пилипака С. Ф., Хропост В. І., Бабка В. М. Пружне згинання смуги із значним прогином під дією прикладених сил та моменту. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2021. Вип. 101. С. 137–147. DOI: <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.137-147>

5. Лізунов П. П., Недін В. О. Чисельне диференціювання форм вигину пружних стержнів значної довжини. Управління розвитком складних систем. 2021. № 46. С. 70–75. DOI: <https://doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.70-75>

6. Харченко В. Є., Корсак В. І. Аналітичне розв'язання нелінійної задачі згину пружного стрижня. Видавництво

кінцем, то потрібно змінити напрям, в якому зростає плече, тобто довжина дуги. Для цього запропоновано спосіб вирішення даного питання, який дозволяє брати будь-яку ділянку криволінійного стержня і досліджувати його на згинання слідкуючою силою при защемленні одного або протилежного кінця.

Львівської політехніки. 2015. № 820. С. 105–115.

7. Худолій С. М., Гловач Л. В. Прямі та обернені задачі деформування пружних стержнів у криволінійних каналах. Опір матеріалів і теорія споруд. 2009. № 83. С. 147–155.

8. Pylypaka, S., Hropost, V., Kresan, T., Volina, T., Vasyliuk, V. The form of a spiral spring in a free state. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2024. P. 509–517. DOI: <https://doi.org/10.21303/2313-8416.2023.003213>

9. Kresan T., Pylypaka S., Ruzhylo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O. Construction of conical axoids on the basis of congruent spherical ellipses. Archives of Materials Science and Engineering. 2022. Vol. 113(1). P. 13–18. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0015.6967>. Scopus Q2.

10. Kresan T., Pylypaka S., Ruzilo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O. Rolling of a single-cavity hyperboloid of rotation on a helicoid on which it bends. Engineering Review. 2021. Vol. 41. No. 3. P. 106–114. <https://doi.org/10.30765/er.1563>.

11. Kresan T., Pylypaka S., Ruzilo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O. External rolling of a polygon on a closed curvilinear profile. Acta Polytechnica. 2020. Vol. 60, no 4, p. 313–317. <https://doi.org/10.14311/AP.2020.60.0313>.

12. Pylypaka S. F., Nesvidomin V. M., Klendii M. B., Rogovskii I. L., Kresan T. A., Trokhaniak V. I. Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. 2019. Vol. 95. Issue

Пилипака С. Ф., Хропост В. І., Воліна Т. М., Кресан Т. А., Грищенко І. Ю., Бабка В. М., Рибенко І. О., Ребрій А. М.

3. P. 108–118.
<https://doi.org/10.31489/2019M2/108-119>.

13. Volokha, M., Rogovskii, I., Fryshev, S., Sobczuk, H., Virchenko, G. & Yablonskyi, P. (2023). Modeling of transportation process in a technological complex of beet harvesting machines. *Journal of Engineering Sciences (Ukraine)*, 10(2), F1-F9, [https://doi.org/10.21272/jes.2023.10\(2\).f1](https://doi.org/10.21272/jes.2023.10(2).f1).

14. Rogovskii, I.L. (2021). Models of formation of engineering management alternatives in methods of increasing grain production in agricultural enterprises. *Machinery and Energetics*, 12(1), 137–146, <https://doi.org/10.31548/machenergy2021.01.137>

References

1. Andrusenko, O. M. (2017). Nonlinear bending of drill strings in cylindrical cavities of vertical wells. *Scientific and Technical Journal “Bulletin of the National Transport University”*. Series “Technical Sciences”, 1(37), 3–12. [In Ukrainian].

2. Arendarenko, V. M., Larenko, V. V. (2017). Features of calculating the spring element of the attack angle regulator for a cultivator tine. *Bulletin of Poltava State Agrarian Academy*, (3), 122–125. [In Ukrainian].

3. Verbylo, D. H. (2023). Features of studying the deformation behavior of materials during bending tests. *Advances in Materials Science*, (6), 75–85. [In Ukrainian]. <https://doi.org/10.15407/materials2023.06.075>

4. Kresan, T. A., Pylypaka, S. F., Khropost, V. I., Babka, V. M. (2021). Elastic bending of a strip with significant deflection under the action of applied forces and moment. *Applied Geometry and Engineering Graphics*, (101), 137–147. [In Ukrainian]. <https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.101.137-147>

5. Lizunov, P. P., Nedin, V. O. (2021). Numerical differentiation of bending shapes of long elastic rods. *Management of Development of Complex Systems*, (46), 70–75. [In Ukrainian]. <https://doi.org/10.32347/2412-9933.2021.46.70-75>

6. Kharchenko, V. Ye., Korsak, V. I. (2015). Analytical solution of the nonlinear bending problem of an elastic rod. *Lviv*

Polytechnic Publishing House, (820), 105–115. [In Ukrainian].

7. Khudolii, S. M., Hlovach, L. V. (2009). Direct and inverse problems of elastic rod deformation in curved channels. *Strength of Materials and Theory of Structures*, (83), 147–155. [In Ukrainian].

8. Pylypaka, S., Hropost, V., Kresan, T., Volina, T., Vasyliuk, V. (2024). The form of a spiral spring in a free state. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 509–517. <https://doi.org/10.21303/2313-8416.2023.003213>

9. Kresan, T., Pylypaka, S., Ruzhylo, Z., Rogovskii, I., Trokhaniak, O. (2022). Construction of conical axoids on the basis of congruent spherical ellipses. *Archives of Materials Science and Engineering*, 113(1), 13–18. <https://doi.org/10.5604/01.3001.0015.6967>.

10. Kresan, T., Pylypaka, S., Ruzilo, Z., Rogovskii, I., Trokhaniak, O. (2021). Rolling of a single-cavity hyperboloid of rotation on a helicoid on which it bends. *Engineering Review*, 41(3), 106–114. <https://doi.org/10.30765/er.1563>.

11. Kresan, T., Pylypaka, S., Ruzhylo, Z., Rogovskii, I., Trokhaniak, O. (2020). External rolling of a polygon on a closed curvilinear profile. *Acta Polytechnica*, 60(4), 313–317. <https://doi.org/10.14311/AP.2020.60.0313>.

12. Pylypaka, S. F., Nesvidomin, V. M., Klendii, M. B., Rogovskii, I. L., Kresan, T. A., Trokhaniak, V. I. (2019). Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. *Bulletin of the Karaganda University – Mathematics*. 95(3), 108–118. <https://doi.org/10.31489/2019M2/108-119>.

13. Volokha, M., Rogovskii, I., Fryshev, S., Sobczuk, H., Virchenko, G. & Yablonskyi, P. (2023). Modeling of transportation process in a technological complex of beet harvesting machines. *Journal of Engineering Sciences (Ukraine)*, 10(2), F1-F9, [https://doi.org/10.21272/jes.2023.10\(2\).f1](https://doi.org/10.21272/jes.2023.10(2).f1).

14. Rogovskii, I.L. (2021). Models of formation of engineering management alternatives in methods of increasing grain production in agricultural enterprises. *Machinery and Energetics*, 12(1), 137–146,

FEATURES OF BENDING OF CURVILINEAR ABSOLUTELY ELASTIC BARS

S. F. Pylypaka, V. I. Khropost, T.M. Volina, T. A. Kresan, I. Yu. Hryshchenko,
V. M. Babka, I. O. Rybenko, A. M. Rebriy

Abstract. *In construction mechanics, the linear theory of bending is used to calculate deflections of beams. It gives an approximate result, but it is quite acceptable for practice, since the deflections of the beams are small compared to their length. In the case of significant deflections of the rods, when the curvature of the elastic axis is significant, a nonlinear theory is used. It is based on the position of resistance of materials, according to which the curvature of the elastic axis is directly proportional to the applied moment and inversely proportional to the stiffness of the rod. Such types of elastic bending are present in agricultural tillage equipment. Thanks to the elasticity of the rods, which can be working bodies or connect the working bodies to the frame of the machine, pulsating loads are extinguished. Bars in the free state can have an initial curvature of the elastic axis, which can be constant or variable. One end of the rod is rigidly attached to the machine frame, and the other is under the influence of the applied force. If the curvature is constant, that is, the elastic axis of the rod is an arc of a circle, then the deformation will be the same regardless of which end of the rod is attached to the frame. For rods with a variable curvature of the elastic axis, this is important. The following cases are considered in the article, corresponding calculations were made on the basis of which the shape of the elastic axis of the rod after its bending was found. Curvilinear rods of variable curvature have a different value at the ends. In this regard, the shape of the elastic axis under the action of the tracking force of the pinched rod will depend on which end it is pinched. The moment under which the elastic axis of the rod is deformed depends on the shoulder, that is, on the length of the arc of the elastic axis. The length of the arc of the curve can increase only in one direction from the reference point. If the rod is clamped at the opposite end, then the direction in which the shoulder grows, i.e. the length of the arc, must be changed. For this purpose, a method of solving this problem is proposed, which allows you to take any section of a curved rod and examine it for bending by the following force when one or the opposite end is pinched.*

Key words: *elastic axis, curvature, stiffness, force, moment, bending*

How to Cite: Pylypaka, S., Khropost, V., Volina, T., Kresan, T., Hryshchenko, I., Babka, V., Rybenko, I., & Rebriy, A. (2024). Features of bending of curvilinear absolutely elastic bars. *Scientific Reports of NULES of Ukraine*, 0(3/109). doi:[http://dx.doi.org/10.31548/dopovidi.3\(109\).2024.019](http://dx.doi.org/10.31548/dopovidi.3(109).2024.019)