

**THEORETICAL STUDY OF THE MOTION OF MATERIAL PARTICLES IN
CENTRIFUGAL DEVICES WITH CURVED BLADES AND VARIABLE ANGLE
OF THEIR RISE**

S. F. Pylypaka, doctor of technical sciences, professor

A. V. Nesvidomin, Candidate of Technical Sciences, docent

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

E-mail: a.nesvidomin@gmail.com

Abstract. *In centrifugal scattering devices, the blades provide the necessary trajectory and speed of the particle in relative motion. The operation of scattering devices with straight blades has been sufficiently studied. From a theoretical point of view, it seems interesting to study the motion of a particle along a curved blade, when the angle of elevation of the particle increases from zero to a given value at the moment of its descent from the blade.*

The purpose of the study is to perform a comparative analysis of the motion of a particle along straight and curved blades, which provide a given angle of elevation of the particle at the moment of its descent from the blade.

When a disk with a curved blade rotates, the particle performs a complex motion: translational due to the rotation of the disk and relative along the blade. To compile the differential equations of motion, it is necessary to find the absolute acceleration vector, which includes three components: acceleration in translational motion, acceleration in relative motion, and Coriolis acceleration. This vector is conveniently searched for in the projections onto the orthogonal surfaces of the accompanying trihedron of the translational motion curve, which for the rotational motion of the disk will be a circle.

Generalized differential equations of particle motion in centrifugal devices along a curved blade with a variable lift angle have been derived. A comparative analysis of the kinematic parameters of motion for straight and curved blades has been performed.

A comparative analysis of particle motion along straight and curved blades of a centrifugal scattering device has shown that a particle along a curved blade in the form of an arc of a circle of the specified length accelerates faster than along a straight one. Thus, replacing straight blades with curved ones allows achieving the same effect while reducing the angular velocity of disk rotation from 25 rad/s to 23 rad/s, i.e., the reduction is 8%.

With an unlimited length of the blade in the form of an arc of a circle, the particle performs an oscillatory motion along it up and down with damping until it comes to a complete stop in the presence of friction.

Key words: *curved and rectilinear blades, differential equations, lift angle*

Topicality. When designing centrifugal spreading devices for mineral fertilizers, it is important to find such parameters and operating modes of these machines that would give the best possible effect. An important role in this is played by the blades, which provide the desired trajectory and speed of the particle in relative motion. The operation of spreading devices with straight blades has been sufficiently studied in theoretical terms. The study of the influence of the shape of the curved blade on the kinematic parameters of the particle motion can be useful when designing the corresponding working bodies.

Analysis of recent research and publications. The motion of a particle along the rectilinear blades of a horizontal disk rotating around a vertical axis has been studied quite fully in [1-3]. As for curved blades, in [1, 2] a blade with a profile in the form of a logarithmic spiral was considered. Such blades (both rectilinear and curved) are attached orthogonally to the disk and ensure the movement of the particle along it in a horizontal plane. At the moment of the particle's exit from the disk, its absolute velocity vector is parallel to the disk plane. However, particle scattering is more effective when, upon exiting the working body, they fly upwards at a certain angle to the disk plane. Such scattering is provided by centrifugal conical scattering bodies in which the rectilinear blades are attached at a certain angle to the disk plane. Theoretical research on the dispersion of mineral fertilizers in such devices was done in [4], and in [5] a generalized model of particle motion along a rectilinear blade at different angles of its installation in both the vertical and horizontal planes is presented. From a theoretical point of view, it seems interesting to study the motion of a particle along a curvilinear blade, when the angle of elevation of the particle increases from zero to a given value at the moment of descent from the blade.

The purpose of study is to make a comparative analysis of the movement of a particle along straight and curved blades, which provide a given angle of lift of the particle at the moment of its descent from the blade.

Materials and methods of research. When a disk with a curved blade rotates, the particle performs a complex motion: translational due to the rotation of the disk and relative along the blade. To compose the differential equations of motion, it is necessary to find the absolute acceleration vector, which includes three components: acceleration in

translational motion, acceleration in relative motion, and Coriolis acceleration. In [6] it is shown that this vector is conveniently found in the projections onto the orthogonal planes of the accompanying trihedron of the translational motion curve, which for the rotational motion of the disk will be a circle. In Fig. 1, *a*, the vertex of the accompanying trihedron is located at point O , which belongs to the circle of the radius of r – the translational motion trajectory. The angle of lift α at point O is zero, however, as the particle rises along the curved blade under the action of centrifugal force, it increases and reaches its final value at point B . For straight blades, it is constant and is the angle of installation of the blade. Let us find the vector of absolute acceleration of a particle moving along a curved blade. The shape of a curved blade is given by the dependencies in the polar coordinate system $\rho = \rho(\varphi)$, where ρ – the radius vector, φ – angle. In Fig. 1, *b* the accompanying trihedron is shown so that the orthogonal tangent $\bar{\tau}$ is projected to a point. The parametric equations of the curved blade profile in projections onto the orthogonals of the main normal \bar{n} and binormal \bar{b} are written:

$$\rho_n = -\rho \cos \varphi; \quad \rho_b = \rho \sin \varphi. \quad (1)$$

The position of the current point A in vector form is written as:

$$\bar{R}_A = \bar{r}_0 - \bar{n}\rho \cos \varphi + \bar{b}\rho \sin \varphi, \quad (2)$$

where is \bar{r}_0 – the radius vector of the current point on the circle of translational motion. The absolute velocity of point A can be found by differentiating expression (2) with respect to time t . However, the position of the trihedron on the curve depends on the arc coordinate of s the circle of translational motion, therefore, when differentiating (2), it is necessary to go from the independent variable t to the arc s :

$$\bar{v}_A = \frac{d\bar{R}_A}{dt} = \frac{d\bar{R}_A}{ds} \frac{ds}{dt} = v_0 \frac{d}{ds} (\bar{r}_0 - \bar{n}\rho \cos \varphi + \bar{b}\rho \sin \varphi), \quad (3)$$

where v_0 – the speed of movement of the vertex of the trihedron at point O around the circle.

Since the differentiation of expression (3) occurs along the arc coordinate s , we will consider the radius vector ρ and the angle φ as functions of this parameter: $\rho = \rho(s)$ and

$\varphi = \varphi(s)$. The differentiation of expression (3) in this case is found as the derivative of the product of individual functions:

$$\begin{aligned} \bar{v}_A = v_0 \frac{d\bar{R}_A}{ds} = v_0 \left[\frac{d\bar{r}_0}{ds} - \frac{d\bar{n}}{ds} \rho \cos \varphi - \bar{n} \frac{d}{ds} (\rho \cos \varphi) + \right. \\ \left. + \frac{d\bar{b}}{ds} \rho \sin \varphi + \bar{b} \frac{d}{ds} (\rho \sin \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

In expression (4) the derivative $\frac{d\bar{r}_0}{ds} = \bar{\tau}$, is the unit vector of the tangent. The

remaining derivatives $-\frac{d\bar{n}}{ds}$ are $\frac{d\bar{b}}{ds}$ – the well-known Frenet formulas, which have a kinematic interpretation [7]. These are the basic formulas of differential geometry, in which the arc coordinate is the independent variable s (we give a simplified version for a plane curve):

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = k\bar{n}; \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -k\bar{\tau}; \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = 0, \quad (5)$$

where is k – the curvature of the curve, which is given by the natural equation $k = k(s)$.

For our case (circle of radius r) $k = \frac{1}{r}$ – const. Upon further differentiation of expression (4) taking into account (5) and grouping the terms by the directions of the orths $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ we obtain:

$$\bar{v}_A = v_0 \left[\bar{\tau} (1 + k\rho \cos \varphi) + \bar{n} (\rho\varphi' \sin \varphi - \rho' \cos \varphi) + \bar{b} (\rho' \sin \varphi + \rho\varphi' \cos \varphi) \right] \quad (6)$$

To obtain the absolute acceleration W_A of point A , it is necessary to differentiate the expression of absolute velocity (6) with respect to time t . Similarly to the previous case, we proceed to the variable s and differentiate taking into account formulas (5). After grouping the components by the directions of the orths and simplifications, we finally obtain:

$$\begin{aligned} \bar{W}_A = v_0^2 (\bar{\tau} W_\tau + \bar{n} W_n + \bar{b} W_b), \quad \text{where} \\ W_\tau = 2k(\rho' \cos \varphi - \rho\varphi' \sin \varphi); \\ W_n = -\rho'' \cos \varphi + 2\rho'\varphi' \sin \varphi + \rho\varphi'' \sin \varphi + \rho\varphi'^2 \cos \varphi + k(1 + k\rho \cos \varphi); \quad (7) \\ W_b = \rho'' \sin \varphi + 2\rho'\varphi' \cos \varphi + \rho\varphi'' \cos \varphi - \rho\varphi'^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

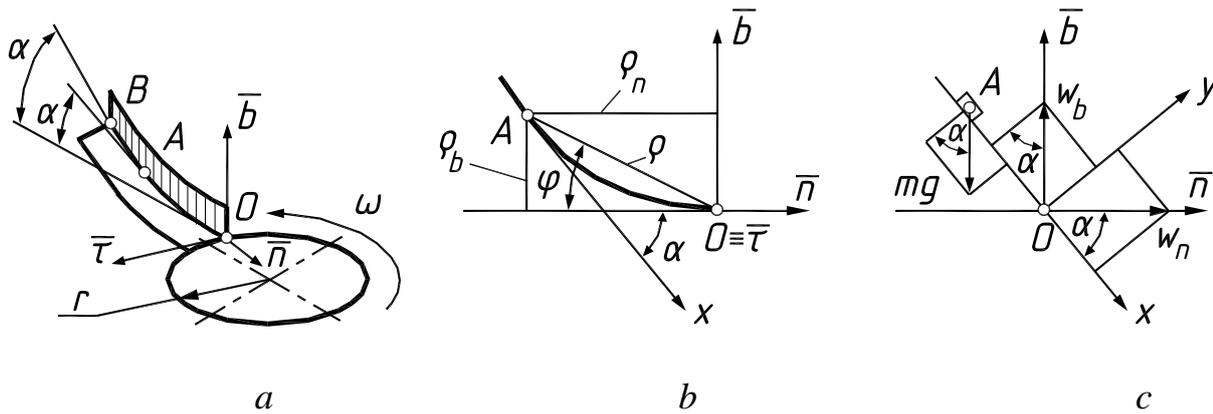


Fig. 1. To find the absolute acceleration of a material particle when it moves along a curved blade under the action of centrifugal force:
a – curvilinear and vertical plane of the blade in the system of the accompanying trihedron of the trajectory of translational motion – a circle of radius r ;
b – projection of the current point A of the curved blade onto the orthogonal faces of the accompanying trihedron;
c – projection of the components of the absolute acceleration and the weight mg of the particle from the orthogonal points of the accompanying trihedron onto the tangent to the blade profile and the normal to it

Since the particle moves in the direction opposite to the tangent line Ax (Fig. 1, *b*), the differential equation of motion must be written in the projection onto this tangent. For this, each component of the absolute acceleration vector \overline{W} from the orthogonal planes of the trihedron we project onto the tangent (axis Ox) and onto the direction perpendicular to it (axis Oy). Fig. 1, *c* shows the vector of absolute acceleration \overline{W} in projections onto the orthogonal planes of the accompanying trihedron and onto the axis Ox and Oy , which are respectively tangent and normal to the blade. We establish a relationship between these projections, based on the fact that there is an angle between the coordinate axes of both systems α . We project each of the components of W_b and W_n onto the axis Ox and Oy and we obtain by the known formulas for the rotation of the axes:

$$W_x = v_0^2 (W_n \cos \alpha - W_b \sin \alpha); \quad W_y = v_0^2 (W_n \sin \alpha + W_b \cos \alpha). \quad (8)$$

The differential equation of motion of a particle in the direction opposite to the direction of the Ox axis is written as:

$$mW_x = mg \sin \alpha + F_\tau, \quad (9)$$

where is m – the mass of the particle; $g = 9,81 \text{ m/c}^2$, F_τ – friction force.

The friction force F_τ includes the components of the friction force on the bottom of the curved blade from the projection onto the y axis of the particle's weight and the force corresponding to the acceleration W_y , as well as the friction force on the side surface of the vertical blade, which corresponds to the acceleration W_τ . Assuming that the friction coefficient f for the curved and vertical blades is the same, equation (9) will take the form:

$$mW_x = mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha + fmW_y + fmv_0^2 W_\tau. \quad (10)$$

Since α – the angle formed by the tangent to the blade profile with the orthogonal \bar{n} (Fig. 1, b), then $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\rho'_b}{\rho'_n}$. Differentiating (1) in the arc coordinate s , we obtain:

$$\rho'_n = -\rho' \cos \varphi + \rho \varphi' \sin \varphi; \quad \rho'_b = \rho' \sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi. \quad (11)$$

When moving from the tangent of the angle to the sine and cosine, taking into account (11), we obtain:

$$\sin \alpha = \frac{\rho' \sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2}}; \quad \cos \alpha = \frac{\rho' \cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2}}. \quad (12)$$

Let us reduce equation (10) to the particle mass m and substitute expressions (12) for the angles and for the corresponding acceleration components from (8) and (7). After simplifications, we obtain:

$$\begin{aligned} & \left(W_n - fW_b - 2fk\sqrt{\rho'^2 + \rho^2 \varphi'^2} - \frac{gf}{v_0^2} \right) (\rho' \cos \varphi - \rho \varphi' \sin \varphi) = \\ & = \left(W_b + fW_n + \frac{g}{v_0^2} \right) (\rho' \sin \varphi + \rho \varphi' \cos \varphi), \end{aligned} \quad (13)$$

where W_b and W_n are functions of the arc coordinate s and are given in (7).

The differential equation (13) of the motion of a particle along a curved blade under the action of centrifugal force is of a general nature and cannot be solved, since it includes two unknown functions: $\rho = \rho(s)$ and $\varphi = \varphi(s)$. To proceed to one function, it is necessary to specify the shape of the blade, that is, to establish the dependence between ρ and φ or to specify other additional conditions. In particular, when $\varphi = \text{const}$ $\varphi' = \varphi'' = 0$ and

according to (12) $\varphi = \alpha$ This case corresponds to a straight blade installed at a constant angle α to the disk plane. Equation (13) is significantly simplified and takes the form (taking into account that $v_0 = \omega/k$):

$$\begin{aligned} \rho'' + 2fk\rho' \cos \alpha - \rho k^2 \cos \alpha (\cos \alpha - f \sin \alpha) = \\ = k(\cos \alpha - f \sin \alpha) - \frac{gk^2}{\omega^2} (\sin \alpha + f \cos \alpha). \end{aligned} \quad (14)$$

Its solution will be:

$$\begin{aligned} \rho = c_1 e^{-sk \cos \alpha (f+B)} + c_2 e^{-sk \cos \alpha (f-B)} - A, \quad \text{де} \\ A = \frac{1}{\cos \alpha} \left[\frac{1}{k} - \frac{g(f + \text{tg} \alpha)}{\omega^2 (1 + f \text{tg} \alpha)} \right]; \quad B = \sqrt{f^2 - f \text{tg} \alpha + 1}, \end{aligned} \quad (15)$$

with c_1 , with c_2 - continuous integration.

Since angle $\alpha = \text{const}$ and the blade in this case is rectilinear, expression (15) is the dependence of the path of the particle along the blade on the arc coordinate s – the length of the arc of a circle with radius $r = l/k$. However, we are not interested in the path, but in the relative velocity of the particle along the blade. To do this, let us move in equation (15) from the arc coordinate s to a new variable - time t , between which there is a relationship $s = \omega t/k$ and differentiate it with respect to the parameter t . After that, we find the constants of integration with c_1 and with c_2 provided that at time $t=0$ the path and velocity of the particle are also zero:

$$c_1 = A \frac{B-f}{2B}; \quad c_2 = A \frac{B+f}{2B}. \quad (16)$$

Finally, the expressions for finding the path $\rho = \rho(t)$ and the relative velocity $v_r = v_r(t)$ of the particle's motion along a straight blade will be written:

$$\begin{aligned} \rho = A \left[\frac{B-f}{2B} e^{-\omega t \cos \alpha (f+B)} + \frac{B+f}{2B} e^{-\omega t \cos \alpha (f-B)} - 1 \right]; \\ v_r = \frac{d\rho}{dt} = A \frac{f^2 - B^2}{2B} \omega \cos \alpha \left[e^{-\omega t \cos \alpha (f+B)} - e^{-\omega t \cos \alpha (f-B)} \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Expressions (17) are fully consistent with the results obtained in (4) and (5).

Research results and their discussion. Consider a curved blade with a variable α particle lift angle. The simplest form of a curved blade that simplifies equation (13) is a

circle with radius $\rho=R$ - const . Then $\rho'' = \rho' = 0$ equation (13) taking into account (7) after simplifications takes the form:

$$\begin{aligned} \varphi'' + \varphi'f(\varphi' - 2k \sin \varphi) = \\ = \frac{k}{R} \left[\frac{gk}{\omega^2} (f \sin \varphi - \cos \varphi) - (Rk \cos \varphi + 1)(f \cos \varphi + \sin \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Differential equation (18) cannot be integrated to the final form in elementary functions like equation (14), so to solve it we will use the numerical methods of the *SimuLink package of the MatLab* software environment . In this case, we will set the task: to compare the relative velocity of a particle at the moment of descent from a straight and curved blade with a given angle of elevation, α other things being equal. For a straight blade, this angle will be constant, and for a curved blade in the form of an arc of a circle - variable. We will find the limits of the angle change φ so that at the end point B of the curved blade the angle α corresponds to the given one (Fig. 2, a). The length of the curved blade AB should be equal to the length of the straight one, which we will denote by L (in equations (17) this is a variable parameter, denoted by ρ). Since the length of the arc $L_{AB} = R \varphi$, then $\varphi=L/R$. On the other hand, the value of the radius R must be such that, for a given length L of the blade AB , a given angle of elevation of the particle is ensured α at the moment of its departure from the blade at point B . Angles α and φ are equal to angles with mutually perpendicular sides, therefore we can write:

$$R = \frac{L}{\varphi} = \frac{L}{\alpha}. \quad (19)$$

Given, for example, the length of the blade $L=0.25$ m and the angle $\alpha=30^\circ$ by formula (19) we find: $R=0.4775$ m . When integrating equation (18) the angle φ should vary within 30° (given the angle of elevation at point B), but since its reference is from the horizontal \bar{n} , then $\varphi = -90^\circ \dots -60^\circ$.

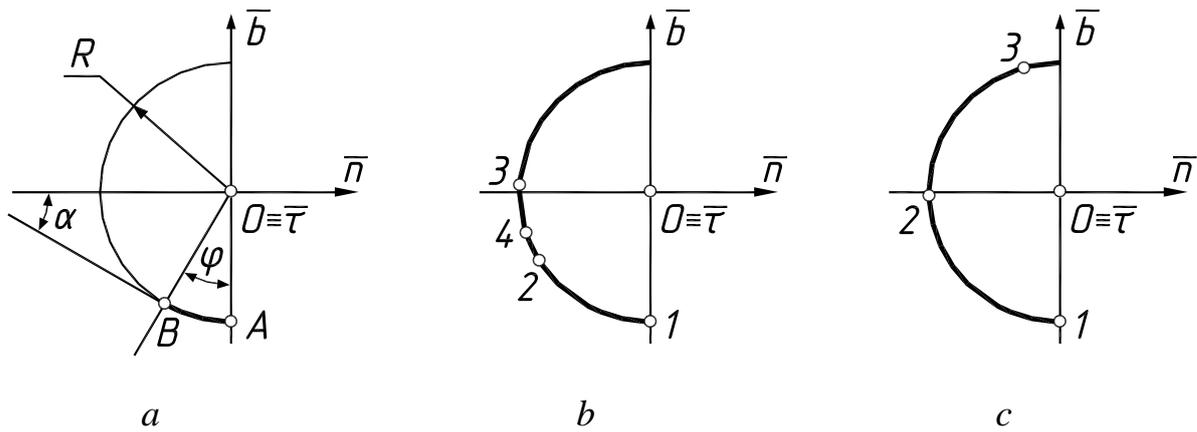


Fig. 2. Curvilinear blade, made in the shape of an arc of a circle:

- a* – blade *AB* , which provides a given angle of elevation α during particle ascent;
- b* – to study the motion of a particle without restrictions on the length of the blade in the presence of friction;
- c* – to study the motion of a particle without restrictions on the length of the blade in the absence of friction

When integrating equations (14) for a straight blade and (18) for a curvilinear dependence of the path and relative velocity of the particle, we obtain in the function of the arc coordinate s . Since the lengths of the blades are the same, for comparing the relative velocity of motion it is convenient to exclude the parameter s and obtain graphs of the velocity distribution along the length L of the blades. Fig. 3, *a* shows these graphs for the same operating conditions. It can be seen from them that the particle accelerates somewhat faster along the curved blade than along the straight one. At an angular speed of rotation of the disk $\omega=25 \text{ rad/s}$, these velocities at the moment of convergence of the particle from the blades are 4.5 m/s and 4.1 m/s , respectively .

To estimate these figures, the angular speed of rotation of a disk with a curved blade was found, for which the relative velocity of the particle when it descends from the blade was equal to the similar velocity for a straight blade. It is 22.7 rad/s , i.e., due to the curved blade, the angular speed of rotation of the disk can be reduced to achieve the same relative velocity of the particle when it descends as for a straight blade. However, the absolute velocity will decrease somewhat, and it is the determining one when scattering mineral fertilizers. Therefore, we will make the same comparative analysis of the blades by the absolute velocity of the particle. According to (6), the projections and the absolute velocity modulus of the particle for straight and curved blades will be written respectively:

$$\begin{aligned} \bar{v}_A &= v_0 [\bar{\tau}(1 + k\rho \cos \alpha) - \bar{n}\rho' \cos \alpha + \bar{b}\rho' \sin \alpha]; \\ v_A &= v_0 \sqrt{(1 + k\rho \cos \alpha)^2 + \rho'^2}. \\ \bar{v}_A &= v_0 [\bar{\tau}(1 + kR \cos \varphi) + \bar{n}R\varphi' \sin \varphi + \bar{b}R\varphi' \cos \varphi]; \\ v_A &= v_0 \sqrt{(1 + kR \cos \varphi)^2 + R^2\varphi'^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

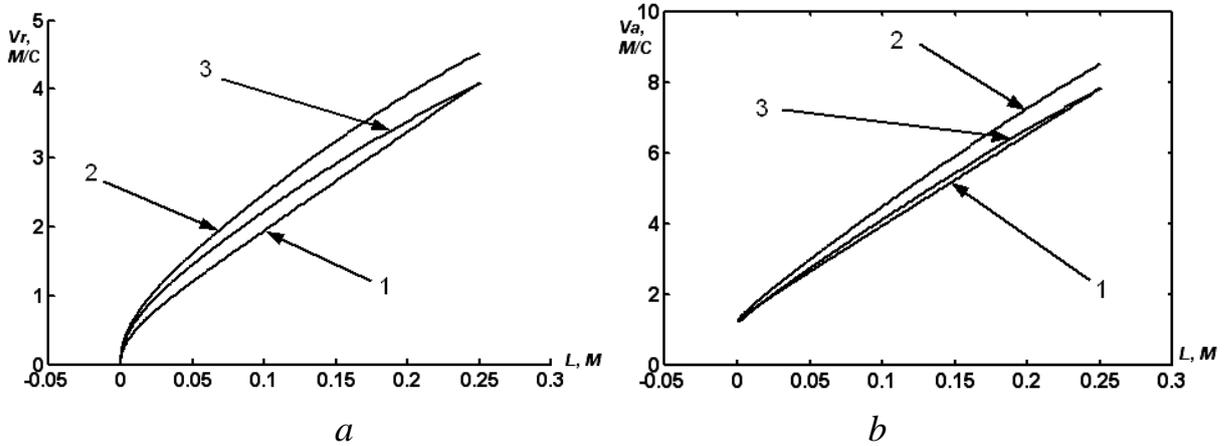
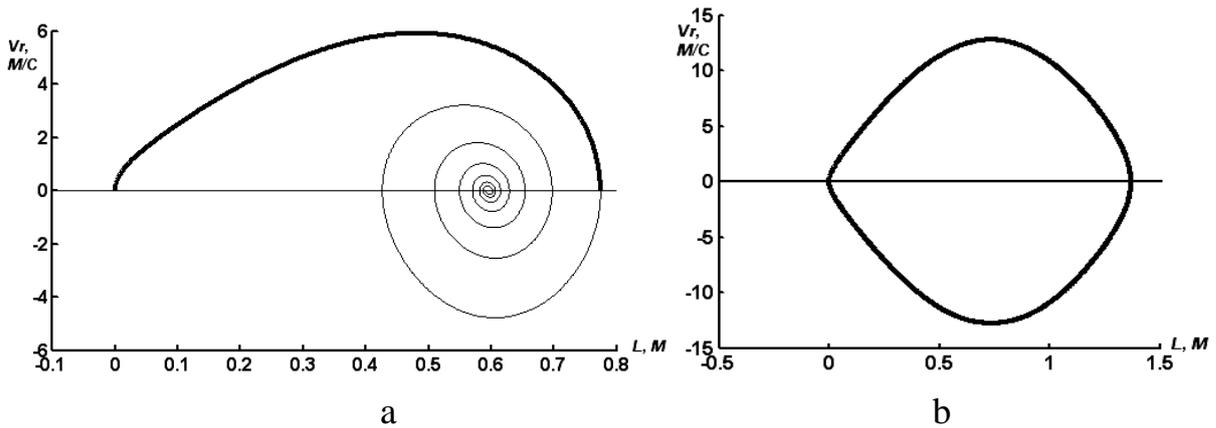


Fig. 3. Graphs of changes in relative a) and absolute b) particle velocities depending on the path (blade length) L :

- a – 1 - graph of the relative velocity of a particle along a straight blade at $f=0.3$; $\omega=25$ rad/s; 2 - the same along a curved blade; 3 - the same along a curved blade, but at $\omega=22.7$ rad/s;
- b – 1 - graph of the absolute velocity of a particle along a straight blade at $f=0.3$; $\omega=25$ rad/s; 2 - the same along a curved blade; 3 - the same along a curved blade, but at $\omega=23$ rad/s

In Fig. 3, b, graphs of changes in the absolute velocity of the particle are plotted using formulas (20), (21). At an angular speed of rotation of the disk $\omega=25$ rad/s, the absolute velocity of the particle at the moment of descent from the blade is 7.85 m/s for a straight blade and 8.52 m/s for a curved one. If we estimate the percentage increase in the relative and absolute velocities of the particle when replacing straight blades with curved ones, they are 9.8 % and 8.5 % , respectively . Therefore, the increase in absolute velocity occurs more slowly. In this regard, the angular velocity of rotation of the disk with curved blades must be increased from 22.7 rad/s to 23 rad/s so that the absolute velocities at the moment of descent of the particle are the same for both types of blades. Thus, replacing straight blades with curved ones allows you to get the same effect by reducing the angular speed of rotation of the disk from 25 rad/s to 23 rad/s . This reduction is 8 percent and, obviously, has a positive effect on the energy intensity of the process.



**Fig. 4. Graphs of changes in the relative velocity of a particle depending on the path (blade length) L at $\omega=25$ rad/s:
 $a - f=0.3$; $b - f=0$**

From a theoretical point of view, it is interesting to study the motion of a particle along a curved blade when its length is not limited. Fig. 4, *a* shows a graph of the change in relative velocity at $\omega=25$ rad/s and $f=0.3$. It can be seen that the particle reaches a maximum velocity $v_r = 5.9$ m/s at $L=0.48$ m or according to formula (19) at $\varphi=-32^\circ$. In Fig. 2b, this position on the blade is marked with the number 2. Then the velocity decreases and at point 3 at $\varphi=3^\circ$ it becomes zero. The corresponding section of the graph of the particle velocity change from point 1 to point 3 (Fig. 2, *b*) in Fig. 4, *a* is shown by a thick line. Then the velocity of the particle increases, but with a “minus” sign, that is, it moves in the opposite direction until it reaches zero, and then begins to increase again. This means that the particle is oscillating along the blade. On the graph (Fig. 4, *a*) this process is shown by a thin line in the form of a spiral (phase portrait), which, twisting, approaches the point with the value $v_r = 0$ at $L=0.6$ m, i.e. at $\varphi=-18^\circ$. In Fig. 2, *b* this point (the point of stopping the particle) is marked with the number 4. Studies have shown that with an increase in angular velocity, point 4 can rise slightly, but at any increase in it will not reach the position on the ort $\bar{n}(\varphi=0^\circ)$. When the friction coefficient decreases, the amplitude of the oscillations increases and for a longer time the point stops in position 4. Fig. 4, *b* shows the phase portrait of the oscillations of the point in the absence of friction ($f=0$). It can be seen from it that in this case the oscillations continue indefinitely between points 1 ($\varphi=-90^\circ$) and 3 ($\varphi=74^\circ$) - Fig. 2, *c*. At point 2 ($\varphi=-2^\circ$) the particle

acquires a maximum velocity $v_r = 12.8 \text{ m/s}$ when moving in one and the opposite direction. With such oscillations the particle does not reach the upper point ($\varphi = 90^\circ$) which is why the graph in Fig. 4, b has only one axis of symmetry.

Conclusions and perspectives.

Comparative analysis of particle motion along straight and curved blades of a centrifugal dispersion apparatus showed the following. Replacement of a straight blade with a curved one was carried out under other conditions being equal (angular speed of rotation of the disk $\omega = 25 \text{ rad/s}$, friction coefficient $f = 0.3$, angle of elevation of the particle at the moment of descent from the blade $\alpha = 30^\circ$, blade length $L = 0.25 \text{ m}$). Theoretical research showed that a particle along a curved blade in the form of an arc of a circle of the specified length accelerates faster than along a straight one. Its absolute speed at the moment of descent from the blade was 8.52 m/s , respectively and 7.85 m/s . Thus, replacing straight blades with curved ones allows achieving the same effect (absolute particle velocity at the moment of exiting the blade) while reducing the angular velocity of rotation of the disk from 25 rad/s to 23 rad/s , i.e. the reduction is 8 %.

With an unlimited length of the blade in the form of an arc of a circle, the particle performs an oscillatory motion along it up and down with damping until it comes to a complete stop in the presence of friction and continues indefinitely in the absence of friction.

List of references

1. Василенко П. М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. К.: УАСХН, 1960. 283 с.
2. Заика П. М. Избранные задачи земледельческой механики. К.: Изд-во УСХА, 1992. 507 с.
3. Адамчук В. В. Теоретичне дослідження розгону мінеральних добрив розсіювальним органом. Механізація і енергетика сільського господарства. IV міжнародна науково-технічна конференція "Motrol 2003". Т. 6. К.: НАУ, 2003. С. 19-31.
4. Адамчук В. В. Теоретичне дослідження розгону мінеральних добрив конусним розсіювальним органом. Вісник Харківського держ. техн. університету сільського господарства. Харків, 2003. Вип. 21. С. 290-296.
5. Адамчук В. В. Дослідження загального випадку розгону мінеральних добрив відцентровим розсіювальним органом. Вісник аграрної науки. К., 2003. № 12. С. 51-57.

6. Лінник М. К., Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Тригранник і формули Френе в задачах кінематики і динаміки матеріальної частинки у складному русі. Науковий вісник Національного аграрного університету. 2005. Вип. 80. Частина I. С. 271-287.

7. Пилипака С. Ф. Кінематична інтерпретація руху супровідних тригранників Френе і Дарбу через внутрішні параметри кривих. Науковий вісник Національного аграрного університету. 1998. Вип. 4. С. 143-146.

References

1. Vasylenko, P. M. (1960). Teoriya dvizheniya chastitsy po sherokhovatym poverkhnostyam sel'skokhozyaystvennykh mashin [Theory of movement of particles on rough surfaces of agricultural machines]. Kyiv: UASKHN, 283.

2. Zaika, P. M. (1992). Izbrannyye zadachi zemledel'cheskoy mekhaniki [Selected tasks of agricultural mechanics]. Kyiv: Publishing House of the Ukrainian Academy of Sciences, 507.

3. Adamchuk, V. V. (2003). Teoretychne doslidzhennia rozghonu mineralnykh dobryv rozsiiuvalnym orhanom [Theoretical study of the dispersion of mineral fertilizers by a spreading body]. Mechanization and energy of agriculture. IV international scientific and technical conference "Motrol 2003", 6, 19-31.

4. Adamchuk, V. V. (2003). Teoretychne doslidzhennia rozghonu mineralnykh dobryv konusnym rozsiiuvalnym orhanom [Theoretical study of the dispersion of mineral fertilizers by a conical spreading body] Bulletin of the Kharkiv State Technical University of Agriculture, 21, 290-296.

5. Adamchuk, V. V. (2003). Doslidzhennia zahalnoho vypadku rozghonu mineralnykh dobryv vidtsentrovym rozsiiuvalnym orhanom [Investigation of the general case of dispersion of mineral fertilizers by a centrifugal dispersing body]. Bulletin of Agrarian Science, 12, 51-57.

6. Linnyk, M. K., Voytyuk, D. G., Pylypaka, S. F. (2005). Tryhrannyk i formuly Frene v zadachakh kinematyky i dynamiky materialnoi chastynky u skladnomu rusi [Trihedron and Frenet formulas in problems of kinematics and dynamics of a material particle in complex motion]. Scientific Bulletin of the National Agrarian University, 80 (1), 271-287.

7. Pylypaka, S. F. (1998). Kinematychna interpretatsiia rukhu suprovidnykh tryhrannykiv Frene i Darbu cherez vnutrishni parametry kryvykh [Kinematic interpretation of the motion of accompanying Frenet and Darboux trihedra through the internal parameters of the curves]. Scientific Bulletin of the National Agrarian University, 4, 143-146.

ТЕОРЕТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНИХ ЧАСТИНОК У ВІДЦЕНТРОВИХ АПАРАТАХ ІЗ КРИВОЛІНІЙНИМИ ЛОПАТКАМИ І ЗМІННИМ КУТОМ ЇХ ПІДЙОМУ

С. Ф. Пилипака, А. В. Несвідомін

Анотація. У відцентрових розсіювальних апаратів лопатки забезпечують необхідну траєкторію і швидкість частинки у відносному русі. Достатньо вивчена робота розсіювальних апаратів із прямолінійними лопатками. З теоретичної точки зору видається цікавим дослідження руху частинки по криволінійній лопатці, коли

кут підйому частинки зростає від нуля до заданої величини в момент сходження із лопатки.

Мета дослідження – виконати порівняльний аналіз руху частинки по прямолінійній і криволінійній лопатках, які забезпечують заданий кут підйому частинки в момент її сходження із лопатки.

При обертанні диска із криволінійною лопаткою частинка здійснює складний рух: переносний за рахунок обертання диска і відносний вздовж лопатки. Для складання диференціальних рівнянь руху необхідно знайти вектор абсолютного прискорення, який включає три складові: прискорення у переносному русі, прискорення у відносному русі і прискорення Коріоліса. Цей вектор зручно шукати в проекціях на орти супровідного тригранника кривої переносного руху, якою для обертального руху диска буде коло.

Виведено узагальнені диференціальні рівняння руху частинки у відцентрових апаратах вздовж криволінійної лопатки із змінним кутом підйому. Виконано порівняльний аналіз кінематичних параметрів руху для прямолінійних і криволінійних лопаток.

Порівняльний аналіз руху частинки по прямолінійній і криволінійній лопатках відцентрового розсіювального апарату показав, що частинка по криволінійній лопатці у вигляді дуги кола зазначеної довжини розганяється швидше, ніж по прямолінійній. Таким чином, заміна прямолінійних лопаток на криволінійні дозволяє досягти однакового ефекту при зменшенні кутової швидкості обертання диска від 25 рад/с до 23 рад/с, тобто зменшення становить 8 %.

При необмеженій довжині лопатки у вигляді дуги кола частинка здійснює коливальний рух по ній вгору-вниз із затуханням аж до повної зупинки за наявності тертя.

Ключові слова: *криволінійні і прямолінійні лопатки, диференціальні рівняння, кут підйому*

**ЕЛЕКТРОПРУЖНІ ОБ'ЄМНІ І НОРМАЛЬНІ ХВИЛІ ЗСУВУ В ШАРУВАТО -
ПЕРІОДИЧНОМУ СЕРЕДОВИЩІ ТИПУ МЕТАЛ – П'ЄЗОЕЛЕКТРИК –
ДІЕЛЕКТРИК**

В. В. Левченко. кандидат фізико-математичних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування

E-mail: ylvv@ukr.net

Анотація. *Запропоновано спосіб побудови дисперсійних співвідношень для об'ємних і нормальних електропружних хвиль зсуву, що поширюються у шарувато-періодичних середовищах, утворених повторенням «породжуючого» металізованого пакету, що складається з шару п'єзоелектрика і шару діелектрика, який не має електричних властивостей. У результаті проведених аналітичних розрахунків отримано дисперсійні співвідношення для нормальних і об'ємних електропружних хвиль зсуву. Як п'єзоелектричні матеріали розглядалися CdS або ZnO, а шар діелектрика вибирався з параметрами GaIG. Було чисельно проаналізовано отриманні дисперсійні співвідношення для різної геометрії і фізичних властивостей матеріалів, що утворюють «породжуючий» пакет. Чисельний аналіз показав, що особливістю отриманого спектра об'ємних хвиль є те, що в діапазоні зміни хвильового числа і кругової частоти межі зон не перетинаються. Спектр нормальних хвиль локалізований в зонах пропускання об'ємних хвиль крім однієї дисперсійної кривої. Вивчено вплив фізико-механічних та геометричних параметрів шарів на структуру зон запирання та пропускання, а також досліджено вплив п'єзоефекту.*

На основі підходу, запропонованого в роботах М.О. Шульги, задачі про об'ємні і нормальні електропружні хвилі зведені до дослідження властивостей передавальних матриць «породжуючого» пакету шарів, через елементи яких виражаються шукані дисперсійні співвідношення. У роботі вдалося, використовуючи умову металізації на зовнішніх поверхнях пакета, записати дисперсійні співвідношення через елементи матриць другого порядку замість четвертого, що дозволяє спростити аналіз дисперсійних рівнянь..

Ключові слова: *об'ємні і нормальні хвилі зсуву, періодично-шарувата структура, п'єзоелектрик, діелектрик, зони пропускання, зони запирання об'ємних хвиль*

Актуальність. *Вивчення особливостей розповсюдження електропружних хвиль різної фізичної природи в шаруватих середовищах, які утворені періодичним «породжувальчого» повторенням пакету метал-п'єзоелектрик- діелектрик і створення приладів твердої електроніки в значній мірі пов'язані зі створенням нових*

матеріалів, що володіють новими властивостями в порівнянні з однорідними структурами. Логічним наслідком є тенденція до створення багат шарових і періодично шаруватих матеріалів з п'єзоелектричними властивостями, які володіють рядом принципово нових характеристик. Для їх опису недостатньо фундаментальних параметрів однорідних середовищ. Виникає необхідність використання ряду додаткових величин: геометричні розміри, орієнтація структури відносно напрямків розповсюдження електропружних хвиль, класу симетрії п'єзоелектриків та ін. Все це розширює можливість управління спектром електропружних хвиль в широкому діапазоні зміни частоти і хвильового числа.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У рамках концепцій електродинаміки суцільного середовища для побудови та аналізу дисперсійних рівнянь, що описують поширення об'ємних, поверхневих та нормальних мод різної поляризації в шарувато-періодичних середовищах різних класів анізотропії, було запропоновано цілу низку математичних підходів [1,2,6-10,12-15].

У роботах [3,7,8] був запропонований математичний метод для розв'язку відповідних задач і детально вивчені окремі випадки, отримані дисперсійні рівняння для об'ємних, поверхневих та нормальних хвиль зсуву в регулярно-шаруватих середовищах, утворених чергуванням пружних шарів,. У цих же роботах і [4,10] в розвиток попередніх досліджень представлені результати чисельного моделювання для дисперсійних співвідношень, що описують поширення акустоелектричних об'ємних, поверхневих і нормальних зсувних хвиль у шарувато-періодичних середовищах, утворених повторенням "породжувального" пакета, що складається з двох різних шарів: п'єзоелектричного і діелектричного (немає властивостей п'єзоелектрика) з металізованими зовнішніми поверхнями.

Мета дослідження – аналіз електропружних об'ємних і нормальних хвиль зсуву в шарувато -періодичному середовищі типу метал – п'єзоелектрик – діелектрик.

Матеріали та методи дослідження. Нехай в декартовій системі координат $Oxuz$ структура моделюється періодичним повторенням вздовж осі ox пакету шарів, що породжує структуру, яка складається з двох шарів: п'єзоелектричного шару

товщини h_p і діелектричного шару товщини h_d . Зовнішні поверхні пакету металізовані (покриті тонким металевим шаром, з нульовим потенціалом). Механічні властивості шару металу не беруться до уваги, а враховується лише екрануючий ефект металізації. Фізико-механічні властивості п'єзоелектричних шарів описуються матеріальними співвідношеннями для кристалів гексагонального класу 6mm з віссю симетрії Oz шостого порядку). Поширення зсувних акустоелектричних хвиль уздовж напрямку сталості властивостей середовища описуватиметься в п'єзоелектричному шарі системою рівнянь виду [3-5]:

$$\rho_p \partial_t^2 u_p = c_{44,p}^* \Delta u_p, \quad \Delta \psi_p = 0, \quad (\psi_p = \varphi_p - \frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,p}} u_p), \quad (1)$$

а в шарі діелектрика, що не має п'єзоелектричних властивостей, системою рівнянь

$$\rho_d \partial_t^2 u_d = c_{44,d} \Delta u_d, \quad \Delta \varphi_d = 0. \quad (2)$$

Тут введені позначення: $c_{44,p}^* = c_{44,p} + \frac{e_{15,p}^2}{\varepsilon_{11,p}}$, – переміщення, $u_p, u_d, \varphi_p, \varphi_d$, –

електричні потенціали відповідно в п'єзоелектричного та діелектричного шарів; $c_{44,p}, c_{44,d}, \rho_p, \rho_d, e_{15,p}, \varepsilon_{11,p}, \varepsilon_{11,d}$ - фізико-механічні параметри шарів, що розглядаються.

Вважатимемо, що на внутрішніх границях розділу властивостей пакета виконуються умови безперервності, які запишемо так:

$$u_p = u_d, \quad \psi_p + \frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,p}} u_p = \varphi_d, \\ c_{44,p}^* \partial_x u_p + e_{15,p} \partial_x \psi_p = c_{44,d} \partial_x u_d, \quad \varepsilon_{11,p} \partial_x \psi_p = \varepsilon_{11,d} \partial_x \varphi_d. \quad (3)$$

Оскільки зовнішні поверхні пакета металізовані (покриті нескінченно тонким металевим шаром з нульовим потенціалом), то на межі двох сусідніх пакетів повинні виконуватись умови

$$u_p = u_d, \quad \varphi_p = 0, \\ c_{44,p}^* \partial_x u_p + e_{15,p} \partial_x \psi_p = \partial_x u_d, \quad (4)$$

Рішення системи рівнянь (1)-(2) у кожному шарі пакета будемо шукати у вигляді

$$u_p = B_{p,n}^{(1)} \sin \Omega_p (x - x_{n,p}^*) + B_{p,n}^{(2)} \cos \Omega_{p1} (x - x_{n,p}^*),$$

$$\psi_p = D_{p,n}^{(1)} \operatorname{shk}(x - x_{n,p}^*) + D_{p,n}^{(2)} \operatorname{chk}(x - x_{n,p}^*),$$

$$x_{n-1,d}^* < x < x_{n,p}^* ;$$

$$u_d = B_{d,n}^{(1)} \sin \Omega_d (x - x_{n,d}^*) + B_{d,n}^{(2)} \cos \Omega_d (x - x_{n,d}^*),$$

$$\varphi_d = D_{d,n}^{(1)} \operatorname{shk}(x - x_{n,d}^*) + D_{d,n}^{(2)} \operatorname{chk}(x - x_{n,d}^*), \quad (5)$$

$$x_{n,p}^* < x < x_{n,d}^* ;$$

де $x_{n,p}^* = (n-1)h + h_p$, $x_{n,d}^* = nh$, $h = h_p + h_d$, $n = 0, \pm 1, 2, \dots$, $\Omega_d = (k_d^2 - k^2)^{1/2}$, $\Omega_p = (k_p^2 - k^2)^{1/2}$, $k_d^2 = \frac{\omega^2}{c_d^2}$,

$$k_p^2 = \frac{\omega^2}{c_p^2}, \quad c_d^2 = \frac{c_{44,d}}{\rho_d}, \quad c_p^2 = \frac{c_{44,p}^*}{\rho_p}.$$

У формулах (5) множник $\exp(iky - i\omega t)$ опущений. Підставивши рішення (5) в умови (3)-(4) поставлену задачу зведемо до системи рівнянь алгебри щодо невідомих $B_{p,n}^{(l)}$, $B_{d,n}^{(l)}$ и $D_{p,n}^{(l)}$, $D_{d,n}^{(l)}$ ($j, l = 1, 2$)

$$N(a_p; \theta_p) \vec{B}_{p,n} + N_u(e_{15,p}; \hat{k}_{p1}) \vec{D}_{p,n} = N(a_d; 0) \vec{B}_{d,n}$$

$$E(\varepsilon_{11,p}; \hat{k}_p) \vec{D}_{p,n} + N_{pu}(e_{15,p}; \theta_p) \vec{B}_{p,n} = E(\varepsilon_{11,d}; 0) \vec{D}_{d,n}$$

(6)

$$\vec{E}^{(2)}(\varepsilon_{11,p}; 0) \vec{D}_{p,n+1} + \vec{N}_{pu}^{(2)}(e_{15,p}; 0) \vec{B}_{p,n+1} = 0$$

$$N(a_d; \theta_d) \vec{B}_{d,n} = N(a_p; 0) \vec{B}_{p,n+1} + N_u(e_{15,p}; 0) \vec{D}_{p,n+1}.$$

де
$$N(a_p; \theta_p) = \begin{bmatrix} a_{pj} \cos \theta_p & a_{pi} \sin \theta_p \\ -\sin \theta_p & \cos \theta_p \end{bmatrix},$$

$$N(a_d; \theta_d) = \begin{bmatrix} a_d \cos \theta_d & a_d \sin \theta_d \\ -\sin \theta_d & \cos \theta_d \end{bmatrix}, \quad N_{pu}(e_{15,p}; \theta_p) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,p}} \sin \theta_p & \frac{e_{15,p}}{\varepsilon_{11,pj}} \cos \theta_p \end{bmatrix},$$

$$N_u(e_{15,p}; \hat{k}_p) = \begin{bmatrix} k e_{15,p} \operatorname{ch} \hat{k}_p & -k e_{15,p} \operatorname{sh} \hat{k}_p \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$E(\varepsilon_{11,p}; \hat{k}_p) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11,p} \operatorname{ch} \hat{k}_p & -\varepsilon_{11,p} \operatorname{sh} \hat{k}_p \\ \operatorname{sh} \hat{k}_p & \operatorname{ch} \hat{k}_p \end{bmatrix}, \quad E(\varepsilon_{11,d}; \hat{k}_d) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11,d} \operatorname{ch} \hat{k}_d & -\varepsilon_{11,d} \operatorname{sh} \hat{k}_d \\ \operatorname{sh} \hat{k}_d & \operatorname{ch} \hat{k}_d \end{bmatrix},$$

$$\vec{B}_{p,n} = \operatorname{col}(B_{p,n}^{(1)}, B_{p,n}^{(2)}), \quad \vec{D}_{p,n} = \operatorname{col}(D_{p,n}^{(1)}, D_{p,n}^{(2)}), \quad a_d = c_{44,d} \Omega_d, \quad a_p = c_{44,p}^* \Omega_p, \quad \hat{k}_p = k h_p, \quad \hat{k}_d = k h_d.$$

Вектори-рядки $\vec{N}_{p,n}^{(i)}$, $\vec{E}^{(i)}$, утворені i рядком відповідної матриці,

Виконавши ряд перетворень у системі (6) можна виразити невідомі $\bar{D}_{p,n}$ через $\bar{B}_{p,n}$ так:

$$\bar{D}_{p,n} = P_{11}\bar{B}_{p,n} + P_{12}\bar{B}_{p,n}, \quad (7)$$

де P_{lm}^{ij} – елементи матриць P_{lm} і мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{P}_{11} &= \frac{1}{\varepsilon_{11,p1}E_{pe}} \left\{ \bar{E}^0 - \bar{E}_p^{(2)} E_0 M(e_{15,p}^*; \theta_p) \right\} \\ \bar{P}_{12} &= \frac{1}{\varepsilon_{11,p1}E_{pe}} \left\{ \bar{E}_p^{(2)} M(e_{15,p2}^*; 0) - \bar{M}^{(2)}(e_{15,p2}^*; \theta_{p2}) \right\}, \\ E_{pe} &= E_p E_0, \quad E_p = E(\varepsilon_{11,p}; \hat{k}_p) E^{-1}(\varepsilon_{11,p}; 0), \quad \bar{E}^{(0)} = [0; 1]. \end{aligned}$$

Підставивши вирази (7) в систему (6), отримаємо нову систему рівнянь щодо невідомих $\bar{B}_{p,n}$, $\bar{B}_{d,n}$

$$\begin{aligned} \bar{N}(a_p; \theta_p) \bar{B}_{p,n} + N_u(e_{15,p}; \hat{k}_p) P_{12} \bar{B}_{p,n} &= N(a_d; 0) \bar{B}_{d,n}, \\ N(a_d; \theta_d) \bar{B}_{d,n} &= \bar{N}(a_p; 0) \bar{B}_{p,n+1} + N_u(e_{15,p}; 0) P_{12} \bar{B}_{p,n+1}, \end{aligned} \quad (8)$$

У системі (8) використані позначення

$$\begin{aligned} N^*(a_p; \theta_p) &= \bar{N}(a_p; \theta_p) + N_u(e_{15,p}; \hat{k}_p) P_{12} K, \\ N^*(a_{p1}; 0) &= \bar{N}(a_p; 0) + N_u(e_{15,p}; \hat{k}_p) P_{21} K^{-1}, \\ K &= \left(N(a_d; \theta_d) (N(a_d; 0))^{-1} N(a_p; \theta_p) \right) \times \left(N_u(e_{15,p}; \hat{k}_p) P_{12} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Рішення системи (8) в регулярно-шароватому просторі будемо шукати у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{B}_{(n-1)Q+1} &= \sum_{j=1}^2 K_j \chi_j^n N^{-1}(a_p; 0) N(a_q; \theta_q) N^{-1}(a_q; 0) \bar{Y}_j, \\ \bar{B}_{nQ} &= \sum_{j=1}^2 K_j \chi_j^n N^{*-1}(a_p; 0) \bar{Y}_j. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут χ_j і Y_j – характеристичні числа та власні вектори, відповідно, передавальної матриці. $N_Q = \prod_{q=1}^Q N^*(a_p; \theta_p) N^{*-1}(a_p; 0) N^{-1}(a_q; 0) N(a_q; \theta_q)$. Характеристичне рівняння матриці N_Q є зворотним і має вигляд

$$\chi^2 - 2b_Q \chi + 1 = 0, \quad (10)$$

де $b_Q = \text{spur} N_Q / 2$, а частотні зони пропускання для об'ємних хвиль зсуву в шаруватому середовищі визначаються нерівністю [6]

$$|b_Q(k, \omega)| \leq 1, \quad (11)$$

яка неявно пов'язує частоту ω та хвильове число k .

Результати досліджень та їх обговорення. Об'ємні хвилі. Зони пропускання ($|b(k, \omega)| \leq 1$) відповідають тим областям спектра, де гармонійні хвилі поширюються у напрямі осі ox без загасання. Ці хвилі будемо називати об'ємними електропружними хвилями зсуву. Навпаки, в зонах запирання ($|b(k, \omega)| > 1$) хвилі експотенційно згасають у напрямку нормалі до шарів.

Нормальні хвилі. Щоб отримати дисперсійні співвідношення для нормальних хвиль у загальному випадку припустимо, що новий пакет, який породжує структуру складається з M початкових «породжуючи» пакетів, а на зовнішніх границях x_0 і x_{MQ} відсутні зовнішні механічні напруги Виконавши перетворення, аналогічні проведеним вище, отримаємо характеристичне рівняння для передавальної матриці

$$\chi^2 - 2b_{MQ}\chi + 1 = 0,$$

де, $b_{MQ} = (N_{MQ}^{11} + N_{MQ}^{22})/2$, $N_{MQ} = (N_Q)^M$, $M = 1, 2, \dots$

Виходячи з виду характеристичного рівняння, дисперсійне рівняння для нормальних хвиль у цьому випадку можна записати у вигляді

$$(b_{MQ} - 1)(b_{MQ} + 1) = 0 \quad (12)$$

Використовуючи формулу Абелеса [1, 2]

$$(N_Q)^m = \begin{Bmatrix} N_Q^{11}U_{m-1}(b_Q) - U_{m-2}(b_Q) & N_Q^{12}U_{m-1}(b_Q) \\ N_Q^{21}U_{m-1}(b_Q) & N_Q^{22}U_{m-1}(b_Q) - U_{m-2}(b_Q) \end{Bmatrix}$$

дисперсійне рівняння (12) можна подати у вигляді

$$(b_Q U_{M-1}(b_Q) - U_{M-2}(b_Q) - 1)(b_Q U_{M-1}(b_Q) - U_{M-2}(b_Q) - 1) = 0 \quad (13)$$

Дисперсійне рівняння в цьому випадку для нормальних хвиль буде мати вигляд

$$N_Q^{12}(b_Q)U_{M-1}(b_{MQ}) = 0 \quad (14)$$

де $U_{M-1}(b_{NQ})$ поліноми Чебишева. Аналіз рівняння (14) дозволяє вивчити особливості поширення нормальних хвиль в періодично-шаруватій структурі.

Аналіз чисельних експериментів. У роботі було чисельно проаналізовано отримані дисперсійні співвідношення (11) і (14) для різної геометрії і фізичних властивостей матеріалів, що утворюють «породжуючий» пакет. Як п'єзоелектричні матеріали розглядалися CdS і ZnO [1], а шар діелектрика вибирався з параметрами GaYIG [1, 11]. Чисельний аналіз показав, що особливістю даного спектра об'ємних хвиль є те, що в діапазоні зміни хвильового числа і кругової частоти межі зон не перетинаються. Спектр нормальних хвиль локалізований в зонах пропускання об'ємних електропружних хвиль за виключенням кривої, яка отримується з розв'язку рівняння $N_Q^{12}(b_Q) = 0$. Як було показано в роботах [4,7], це рівняння визначає поверхневі хвилі в регулярно шаруватому напівпросторі. Про вплив п'єзоефекту на дисперсійний спектр об'ємних і нормальних хвиль можна судити з результатів чисельних експериментів. Як показали розрахунки, у цьому випадку спектр об'ємних хвиль зміщується в область високих частот, не змінюючи при цьому суттєво свою структуру.

Висновки та перспективи. Таким чином, запропоновано спосіб побудови дисперсійних співвідношень для об'ємних акустоелектричних хвиль, що поширюються в шарувато-періодичних середовищах, утворених повторенням п'єзоелектричного і діелектричного металізованого "породжувального" пакета. На основі методу, запропонованого в [3,4,7], задача про об'ємні хвилі зведена до дослідження властивостей передавальних матриць «породжувального» пакету, через елементи яких виражаються необхідні дисперсійні співвідношення. У роботі вдалося, використовуючи умову металізації на зовнішніх поверхнях пакета, записати дисперсійні співвідношення через елементи матриць другого порядку замість четвертого. У широкому діапазоні зміни частоти та хвильового числа проведено чисельні дослідження та описано закономірності поширення об'ємних хвиль у різних структурах. Вивчено вплив фізико-механічних параметрів шарів на нормальні електропружні хвилі і структуру зон запирання та пропускання, а також досліджено вплив п'єзоефекту на розташування меж зон пропускання при зміні відносних товщин шарів у пакеті, що породжує структуру.

Список використаних джерел.

1. Богорош О. Т., Воронов С. О., Котовський В. Й. Нові речовини. Ч. 2. П'єзоелектричні та сегнетоелектричні матеріали: Навч. посіб. Київ: НТУУ «КРІ», 2015. 252 с.
2. Дьелесан Е., Руайє Д. Упругие волны в твердых телах. Перек. з франц.: Москва, Наука, 1982. 424 с.
3. Зінчук Л.П., Левченко В.В., Шульга М.О. Поширення об'ємних електропружних хвиль зсуву в регулярно-шаруватому середовищі типу метал - п'єзоелектрик. Мат. методи та фіз. - мат. поля. 1989. Вип. 30. С.4-8.
4. Зінчук Л.П., Подліпенець О.Н., Шульга М.О. Про побудову дисперсійних рівнянь для електропружних зсувних хвиль у шарувато-періодичних середовищах. Прикл. механіка. 1990. Т. 26, № 11. С.84-93.
5. Мэзон У. Физическая акустика: в 8 т. Перек. с англ. 1966. Т. 1. 585 с
6. Поплавко Ю.М., Якименко Ю.І. П'єзоелектрики. Навч. посіб., Київ: НТУУ «КРІ» 2013. 328 с.
7. Шульга М.О. Основи механіки шаруватих середовищ періодичної структури. Київ: Наукова думка, 1981. 200 с.
8. Шульга М.О., Подліпенець О.М. Об'ємні хвилі в шаруватих композитах. Динаміка та стійкість матеріалів, Т.2 Київ: Наук. думка, 1993. С. 35–83.
9. Шульга М.О. Поширення пов'язаних хвиль у періодично-неоднорідних середовищах при взаємодії з електромагнітним полем. Прикл. механіка. 2003. – Т.39, N10. С. 38 - 68.
10. Levchenko V.V. Localization of shear waves near layers separating two regularly laminated half-spaces Int. Appl. Mech. 2005. Vol.41, No 1 - P. 98-103.
11. Sapriel J., Djafari-Rouhani D. Vibrations in superlattices // Surf. SCI. Repts. 1989. Vol.10, No 5. P.189-227
12. H. van de Vaart. Magnetoelastic Love Wave propagation в metal-coated layered substrates . Journal of Applied physics. 1971, Vol. 48, No. 3. P. 5305 -5312.
13. Shul'ga N.A. Spatial Modes in Periodically Inhomogeneous Media. Int. Appl. Mech. 2005. Vol. 41, No 5. P. 463-468.
14. Shul'ga N.A. Effective magnetoelastic properties of laminated composites. Int. Appl. Mech. 2006. Vol.42, No 8. P. 879-885

References

1. Bogorosh, O. T., Voronov, S. O. Kotovsky, V. Y. (2015). Novi rehovyny. Ch. 2. P'iezelektrychni ta sehnetoelektrychni materialy [New substances. Part 2. Piezoelectric and ferroelectric materials]. Kyiv: NTYY «KPI», 252.
2. Dielesan, E., Royer, D. (1982). Uprugiye volny v tverdikh telakh [Elastic waves in solids]. Translated from French. Moscow: Nauka, 424,
3. Zinchuk, L.P., Levchenko, V.V., Shulga, N.A. (1989). Poshyrennia obiemnykh elektropruznyykh khvyl zsuvu v rehuliarno-sharuvatomu seredovyshchi typu metal - piezoelektryk [Propagation of bulk electroelastic shear waves in a regularly layered medium of the metal-piezoelectric type]. *Mat. methods and phys. - mat. Fields*, 30, 4-8.
4. Zinchuk, L.P., Podlipenets, A.N., Shulga, N.A. (1990), Pro pobudovu dyspersiinykh rivnian dlia elektropruznykh zsvnykh khvyl u sharuvato-periodychnykh

seredovyshchakh [On the construction of dispersion equations for electroelastic shear waves in layered-periodic media]. *Applied Mechanics*. 26(11), 84-93.

5. Maison, U. (1966), *Fizicheskaya akustika [Physical acoustics: in 8 volumes]*, Vol.1. Trans. with English. Moscow: Nauka, 585,

6. Poplavko, Yu.M., Yakymenko, Yu I. (2013). P'zoelektryky [*Piezoelectrics. Teaching manual*]. Kyiv: NTUU "KPI", 328.

7. Shulga, N.A. (1981). *Osnovy mekhaniky sharuvatykh seredovyshch periodychnoi struktury [Fundamentals of Mechanics of Layered Media of Periodic Structure]*. Kyiv: Naukova Dumka, 200.

8. Shulga, N .A., Podlipenets O. M. (1993). *Poshyrennia poviazanykh khvyl u periodychno-neodnorodnykh seredovyshchakh pry vzaiemodii z elektromahnitnym polem [Volume Waves in Layered Composites. Dynamics and Stability of Materials]*. Kyiv: Naukova Dumka, 35-83.

9. Shulga, N. A. (2003). *Poshyrennia poviazanykh khvyl u periodychno-neodnorodnykh seredovyshchakh pry vzaiemodii z elektromahnitnym polem [Propagation of coupled waves in periodically inhomogeneous media when interacting with an electromagnetic field]*. *Applied Mechanics*. 39(10), 38 - 68.

10. Levchenko, V.V. (2005). Localization of shear waves near layers separating two regularly laminated half-spaces. *Int. Appl. Mech.*, 41(1), 98-103.

11. Sapriel J. & Djafari-Rouhani D. (1989). *Vibrations in superlattices. Surf. SCI. Repts.*, 10(5), 189-227.

12. H. van de Vaart. (1971). Magnetoelastic Love-Wave propagation в metal-coated layered substrates. *Journal of Applied physics*, 48(3), 5305 -5312.

13. Shulga N.A. (2005). Spatial Modes in Periodically Inhomogeneous Media. *Int. Appl. Mech.*, 41(5), 463-468.

14. Shulga N.A (2006). Effective magnetoelastic properties of laminated composites *Int. Appl. Mech.*, 42(8),. 879-885.

ELECTROELASTIC BULK AND NORMAL SHEAR WAVES IN A LAYERED-PERIODIC MEDIUM OF THE TYPE METAL-PIEZOELECTRIC-DIELECTRIC

V. Levchenko

Abstract. *A method for constructing dispersion relations for bulk and normal electroelastic shear waves propagating in layered-periodic media formed by repeating a "generating" metallized package consisting of a piezoelectric layer and a dielectric layer that has no electrical properties is proposed. As a result of the analytical calculations, dispersion relations for normal and bulk electroelastic shear waves were obtained. CdS or ZnO were considered as piezoelectric materials, and the dielectric layer was chosen with the parameters GaYIG. The obtained dispersion relations were numerically analyzed for different geometries and physical properties of the materials forming the "generating" package. . Numerical analysis showed that a feature of the obtained bulk wave spectrum is that in the range of changes in the wave number and circular frequency, the zone boundaries do not intersect. The spectrum of normal waves is localized in the transmission zones of bulk waves except for one dispersion curve. The influence of physical, mechanical and geometric parameters of the layers on the structure of the blocking and transmission*

zones has been studied, as well as the influence of the piezoelectric effect has been investigated.

Based on the approach proposed in the works of M.O. Shulga, the problems of bulk and normal electroelastic waves are reduced to the study of the properties of the transmission matrices of the "generating" package of layers, through the elements of which the desired dispersion relations are expressed. In the work, it was possible, using the condition of metallization on the outer surfaces of the package, to write the dispersion relations through the elements of second-order matrices instead of the fourth, which allows simplifying the analysis of the dispersion equations.

Key words: *bulk and normal shear waves, periodic layered structure, piezoelectric, dielectric, transmission zones, bulk wave blocking zones*