

УДК 517.53

ОДНА ІЗ ЗАДАЧ РУХУ РІДИНИ В ОБЛАСТЯХ З ВІЛЬНОЮ ГРАНИЦЕЮ

О.П. Зінькевич, кандидат фізико-математичних наук

Національний університет харчових технологій

О.М. Нещадим, кандидат фізико-математичних наук

Національний університет біоресурсів

і природокористування України

В.М. Сафонов, кандидат фізико-математичних наук

Національний університет харчових технологій

e-mail: oleksandr_neshchadym@mail.ru

Анотація. Наведено приклад розв'язання задачі практично важливого класу задач в'язкої рідини з наперед невідомою (вільною) границею, яка визначається в процесі самого розв'язання.

Ключові слова: *вільна границя, гідродинамічні потенціали, кінематичне співвідношення, сили поверхневого натягу, інтегральне представлення, інтегральне рівняння*

В теорії потенціалу будуються інтегральні представлення розв'язку через довільні функції точок контуру області шляхом підстановки цих функцій у формули Гріна замість контурних значень рішень та їх частинних похідних. Умови на границі області призводять до так званих граничних інтегральних рівнянь.

Мета досліджень – розробка методів розв'язання задач про рух в'язкої рідини.

Матеріали та методика досліджень. Розглядається одна із задач для лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса. Для її розв'язання розглядається метод гідродинамічних потенціалів, який дає змогу переключити основні складності досліджень на деякі граничні інтегральні рівняння.

Результати досліджень. 1. *Постановка задачі деформації рідкого в'язкого тіла під дією сил поверхневого натягу*

Розглянемо в'язку незжимну рідину (рідке тіло), яка заповнює в момент часу $t \leq 0$ область $D \subset E_2$, обмеженої контуром L з координатами $x_1 = x_1(\sigma, 0)$, $x_2 = x_2(\sigma, 0)$, $0 \leq \sigma < a$. Кожному значенню параметра σ відповідає деяка елементарна (нескінченно мала) частинка рідини, що знаходиться в момент часу $t = 0$ на кривій L в площині Ox_1x_2 . Швидкості $\vec{v}$ частинок рідини при $t \leq 0$ вважаємо нульовими:

$$\vec{v}(\vec{y}, 0) = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \equiv 0, \quad \vec{y} \in D.$$

Нехай, починаючи з моменту часу $t = 0$, до границі рідини L прикладені нормальні сили напруги

$$\vec{p}_n(\vec{x}, t) = -\alpha \kappa(\sigma, t) \vec{n}(\sigma, t). \quad (1)$$

Масові сили в області D і дотичні напруги на контурі L вважаємо рівними нулю.

У крайовій умові (1) α – коефіцієнт поверхневого натягу; $\kappa(\sigma, t)$ – кривизна кривої $L(t)$; $\vec{x} = (x_1, x_2)$ – радіус-вектор точок контуру рідини; $\vec{n}(\sigma, t)$ – зовнішня нормаль до $L(t)$.

Під дією сил поверхневого натягу частки рідини приходять в рух, утворюючи рухливий контур $L(t)$, який описується рівняннями $x_k = x_k(\sigma, t)$, $k = 1, 2$.

Необхідно визначити границю $L(t)$ рідкого тіла, а також швидкість $\vec{v}(\vec{y}, t)$ частинок рідкого тіла і гідродинамічний тиск $p(\vec{y}, t)$, що задовольняють в $D(t)$ системі рівнянь Нав'є-Стокса

$$\begin{cases} \mu \Delta \vec{v}(\vec{y}, t) - \gamma \frac{\partial \vec{v}(\vec{y}, t)}{\partial t} - \text{grad } p(\vec{y}, t) = 0, \\ \text{div } \vec{v}(\vec{y}, t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Тут $\mu = \text{const} > 0$ і $\gamma = \text{const} > 0$ – відповідно в'язкість і густина рідини.

Функції $x_1 = x_1(\sigma, t)$, $x_2 = x_2(\sigma, t)$ зв'язані з розв'язком системи (2) кінематичним співвідношенням

$$\vec{v}(\vec{x}(\sigma, t), t) = \frac{\partial \vec{x}(\sigma, t)}{\partial t} \equiv \vec{v}_0(\sigma, t), \quad (3)$$

де $\vec{v}(\vec{x}, t)$ – вектор швидкості частинок рідини контуру $L(t)$; $\vec{v}_0(\sigma, t)$ – вектор швидкості точок контуру $L(t)$; $L(t)$ – вільний контур і на ньому діють сили натягу, які утримують на контурі одні і ті ж самі частинки рідини.

2. Інтегральне представлення вектора швидкості в випадку рухомих границь

У роботі [1] встановлено загальне інтегральне представлення рішення рівнянь (2) у випадку рухомих границь, побудоване на основі гідродинамічних формул Гріна. У плоскому випадку це представлення для вектора швидкості має вигляд:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{y}, t) = & \text{rot} \text{rot} \int_0^t d\tau \int_{L(\tau)} \left[\vec{p}_n(\vec{x}, \tau) + \gamma \vec{v}_0(\sigma, \tau) \cdot \vec{n}(\sigma, \tau) \vec{v}(\vec{x}, \tau) \right] g_0(r(\tau, t - \tau) - \\ & - \mu \vec{v}(\vec{x}, \tau) \frac{\partial g_0(r(\tau, t - \tau))}{\partial n(\sigma, \tau)} + \mu \vec{n}(\sigma, \tau) \cdot \vec{v}(\vec{x}, \tau) \cdot \text{grad}_y g_0(r(\tau, t - \tau)) ds + \\ & + \text{grad} \int_{L(t)} \vec{v}(\vec{x}, \tau) \cdot \vec{n}(\sigma, \tau) \frac{\ln r(t)}{2\pi} ds. \end{aligned} \quad (4)$$

Інтегрування по контуру L ведеться так, щоб зовнішня нормаль $\vec{n}(\sigma, \tau)$ була направлена вправо. Тут, і в подальшому через $\vec{a} \cdot \vec{b}$ позначено скалярний добуток.

Елемент ds довжини контуру L визначається за формулою

$$ds = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1(\sigma, \tau)}{\partial \sigma} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2(\sigma, \tau)}{\partial \sigma} \right)^2} d\sigma; \quad (5)$$

$\vec{x}(\sigma, \tau)$ і $\vec{x}(\sigma_0, t)$ – радіус-вектор змінної і фіксованої точок інтегрування відповідно, $r(\tau) = |\vec{x}(\sigma, \tau) - \vec{x}(\sigma_0, t)|$;

функція g_0 має вигляд: $g_0(r, \tau, t - \tau) = -\frac{\ln r}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\tau} e^{-\frac{\gamma \rho^2}{4\mu(t-\tau)}} \frac{d\rho}{\rho}$.

Інтегральне представлення (4) є комбінацією потенціалів подвійного і простого шару.

Введемо позначення: $\vec{n}_{\sigma,t}$ і $\vec{s}_{\sigma,t}$ – зовнішня нормаль і дотичний вектор до контуру L_t в точці $\vec{x}_{\sigma,t}$; $\theta_1_{\sigma,t} = \vec{v}_0_{\sigma,t} \cdot \vec{n}_{\sigma,t}$ і $\theta_2_{\sigma,t} = \vec{v}_0_{\sigma,t} \cdot \vec{s}_{\sigma,t}$ – нормальна і дотична складові вектора швидкості точок контуру.

Спрямуємо в (4) $\vec{y} \rightarrow \vec{x}_{\sigma_0,t}$, $\vec{x}_{\sigma_0,t} \in L$, $\vec{y} \in D$. Користуючись властивостями гідродинамічних потенціалів 1 (з урахуванням (3)), зводимо задачу до розв'язку системи нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь:

$$-\frac{1}{2}\theta_1_{\sigma_0,t} + \int_{L_t} \theta_1_{\sigma,t} \frac{\cos \omega_0 t}{2\pi r t} ds + \int_0^t d\tau \int_{L_\tau} [\theta_2_{\sigma,\tau} H_{12} + \left(\theta_1_{\sigma,\tau} - \frac{\alpha}{2\mu}\right) H_{11} + \gamma \sum_{k=1}^2 \theta_1_{\sigma,\tau} \theta_k_{\sigma,\tau} G_{1k}] ds = 0; \quad (6)$$

$$-\frac{1}{2}\theta_2_{\sigma_0,t} + \int_{L_t} \theta_1_{\sigma,t} \frac{\sin \omega_0 t}{2\pi r t} ds + \int_0^t d\tau \int_{L_\tau} [\theta_2_{\sigma,\tau} H_{22} + \left(\theta_1_{\sigma,\tau} - \frac{\alpha}{2\mu}\right) H_{21} + \gamma \sum_{k=1}^2 \theta_1_{\sigma,\tau} \theta_k_{\sigma,\tau} G_{2k}] ds = 0; \quad (7)$$

$$\frac{\partial x_1_{\sigma,t}}{\partial t} = \theta_1_{\sigma,t} n_1_{\sigma,t} + \theta_2_{\sigma,t} n_2_{\sigma,t};$$

$$\frac{\partial x_2_{\sigma,t}}{\partial t} = -\theta_1_{\sigma,t} n_2_{\sigma,t} + \theta_2_{\sigma,t} n_1_{\sigma,t},$$

при початкових умовах $\theta_1_{\sigma,0} = \theta_2_{\sigma,0} = 0$, $\vec{x}_{\sigma,0} = \vec{x}_0_{\sigma}$.

Тут

$$H_{11} = A \tau \left[q_1 z \tau \cos 2\omega \tau + \omega_0 \tau + q_2 z \tau \sin 2\omega \tau \sin \omega_0 \tau \right],$$

$$H_{21} = A \tau \left[q_1 z \tau \sin 2\omega \tau + \omega_0 \tau - q_2 z \tau \sin 2\omega \tau \cos \omega_0 \tau \right],$$

$$H_{22} = -H_{11} + A \tau q_2 z \tau \cos 2\omega \tau + \omega_0 \tau ,$$

$$H_{12} = H_{21} + A \tau q_2 z \tau \sin 2\omega \tau - \omega_0 \tau ;$$

$$G_{11} = B \tau \left[e^{-z \tau} \cos \omega \tau - \omega_0 \tau + q_2 z \tau \cos \omega \tau + \omega_0 \tau \right],$$

$$G_{21} = B \tau \left[q_1 z \tau \sin \omega \tau + \omega_0 \tau - e^{-z \tau} \sin \omega \tau - \omega_0 \tau \right],$$

$$G_{22} = -G_{11} + 2B \tau e^{-z \tau} \cos \omega \tau - \omega_0 \tau ,$$

$$G_{12} = G_{21} + 2B \tau e^{-z \tau} \sin \omega \tau - \omega_0 \tau ;$$

$$A \tau = \frac{1}{2\pi r \tau t - \tau}, B \tau = \frac{1}{8\pi \mu t - \tau}, z \tau = \frac{\gamma r^2 \tau}{2\pi \mu t - \tau};$$

$$q_1 = z^{-1} - e^{-z} (1 + z^{-1}), q_2 = z e^{-z}, r \tau = |\vec{r} \tau|, \vec{r} \tau = \vec{x} \sigma, \tau - \vec{x} \sigma_0, t ,$$

$$\omega_0 \tau = \left(\vec{r} \tau, \vec{n} \sigma_0, \tau \right), \omega \tau = \left(\vec{r} \tau, \vec{n} \sigma, \tau \right),$$

$$\cos \omega_0 t = \frac{\vec{r} t \cdot \vec{n} \sigma_0, t}{|\vec{r} t|}, \sin \omega_0 t = \frac{\vec{r} t \cdot \vec{s} \sigma_0, t}{|\vec{r} t|};$$

$$\vec{s} = s_1; s_2, s_i = \frac{\partial x_i}{\partial s} = \frac{\partial x_i}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds} \quad (i=1,2), \quad \vec{n} = n_1; n_2 = s_2; -s_1 .$$

Використаємо (5) і позначимо $\frac{\partial x_i}{\partial \sigma} = x'_i \quad (i=1,2)$, тоді

$$s_1 \sigma, t = \frac{x'_1 \sigma, t}{\sqrt{x'_1 \sigma, t^2 + x'_2 \sigma, t^2}}, s_2 \sigma, t = \frac{x'_2 \sigma, t}{\sqrt{x'_1 \sigma, t^2 + x'_2 \sigma, t^2}} . \quad (8)$$

Якщо вектор нормалі і вектор дотичної розглядаються в фіксованій точці інтегрування, то необхідно в формулах (8) σ замінити на σ_0 .

Використовуючи (8), а також

$$\vec{r} = x_1 \sigma, t - x_1 \sigma_0, t ; x_2 \sigma, t - x_2 \sigma_0, t = r_1; r_2 ,$$

$$\text{маємо } \sin \omega_0 t = \frac{r_1 x'_1 \sigma_0, t - r_2 x'_2 \sigma_0, t}{x'_1 \sigma_0, t^2 + x'_2 \sigma_0, t^2}, \cos \omega_0 t = \frac{r_1 x'_2 \sigma_0, t - r_2 x'_1 \sigma_0, t}{x'_1 \sigma_0, t^2 + x'_2 \sigma_0, t^2} .$$

Формули обчислення $\sin \omega t$ і $\cos \omega t$ мають аналогічний вигляд, тільки необхідно в x'_i аргумент σ_0 замінити на σ .

Висновки

У теорії в'язкої рідини виділяється практично важливий клас задач з наперед невідомою (вільною границею), яка визначається в процесі самого розв'язання. Одним із можливим підходів до розв'язання цього класу задач гідродинаміки є метод гідродинамічних потенціалів, який переключає основні складності досліджень і числових розрахунків на деякі граничні інтегральні рівняння, що відносяться лише до границі області і враховують граничні умови безпосередньо. Перевага такого перетворення полягає в тому, що представляється можливим відразу визначити невідомі величини на границі, не обчислюючи їх у всій області. Це вигідно відрізняє метод граничних інтегральних рівнянь від інших методів.

Список літератури

1. Белоносов, С.М. Краевые задачи для уравнений Навье-Стокса / С.М. Белоносов, К.А. Черноус – М. Наука, 1985. – 312 с.

ОДНА ИЗ ЗАДАЧ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТЯХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А.П.Зинькевич, А.М. Нецадим, В.М. Сафонов

Аннотация. *Приведен пример решения задачи практически важного класса задач вязкой жидкости с заранее неизвестной (свободной) границей, которая определяется в процессе самого решения.*

Ключевые слова: *свободная граница, гидродинамические потенциалы, кинематическое соотношение, силы поверхностного натяжения, интегральное представление, интегральное уравнение*

**ONE OF THE GOALS OF FLUID MOTION IN FIELDS
FREE BOUNDARY**

A. Zinkevych, A. Neshchadym, V. Safonov

Annotation. *An example of solving the problem is practically important class of viscous liquid with an unknown in advance (free) boundary, which is defined in the decision itself.*

Key words: *free boundary hydrodynamic potentials kinematic ratio, surface tension, integral representation, integral equation*