

ОЦІНЮВАННЯ ОБЛАСТІ ДОПУСТИМИХ ПАРАМЕТРІВ ЗА НАЯВНОСТІ ВАРІАЦІЇ ПОКАЗНИКА ЯКОСТІ

Л. А. Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: nubip.ea@gmail.com

Анотація. Розглянуто загальні постановки задач нормального функціонування об'єкта на реальних режимах, у межах яких сформульовано задачі оцінювання області допустимих параметрів.

Досліджено питання формалізації постановок задач розрахунку допусків на параметри за наявності динамічних обмежень відносно флуктуацій вектора станів реального об'єкта. З метою чисельної реалізації такого роду інверсних задач запропоновано застосування алгоритмів практичної стійкості для систем диференціальних рівнянь, залежних від параметрів. Для випадку лінійних динамічних обмежень на розкид вектора фазових координат наведено необхідну й достатню умову відповідної оцінки області відхилень параметрів системи в заданій структурі. Продемонстровано, що в наведеній конкретизації задача оцінки допусків повністю охоплюється постановками задач стійкості.

Виділено клас задач, що стосуються оцінки відхилень вектора параметрів від розрахункових за наявності варіації показника якості. Для чисельної реалізації постановок таких задач досліджено лінійну систему диференціальних рівнянь, залежних від параметрів, з фіксованими початковими умовами. Аналіз відповідної системи диференціальних рівнянь відносно розкиду вектора станів та параметрів здійснено методами практичної стійкості. За умовою, що відхилення значень вектора параметрів від номінальних є достатньо малими, а змінювання вектора параметрів у межах поля допуску лінійні, вираз для варіації показника якості подано у вигляді лінійної форми. У рамках сформульованих постановок область допусків на параметри задано структурно у вигляді еліпсоїда. Оцінювання області допустимих параметрів здійснено шляхом знаходження максимуму лінійної форми на еліпсоїді. Розглянуто більш ускладнений варіант задачі оцінювання максимальної за об'ємом області допустимих значень розкиду вектора параметрів методами практичної стійкості за напрямом. Алгоритми поширено на випадок нелінійного змінювання вектора параметрів в межах поля допуску та нефіксованих початкових умов вихідної системи.

У прикладному плані розглянуті постановки задач поширено на дискретну модель індукційної системи прискорення для оцінки області допусків на параметри коректування при заданих обмеженнях на розкид критерію якості.

Ключові слова: *параметрична система, практична стійкість, допуски на параметри, чутливість, індукційна система прискорювання*

Актуальність. Сучасні напрями теорії керування включають вимоги низької чутливості реальної системи, що забезпечує прийнятну, в сенсі деякого критерію, її працездатність [1–5]. Оскільки реальні значення параметрів об'єкта керування, як правило, завжди відрізняються від номінальних, задають допустимі межі змінювання показника якості або вектора станів. Інверсна задача чутливості тут полягатиме у визначенні допусків на параметри за відомими обмеженнями фазових координат, критерію якості та функцій чутливості. Для належної якості системи в достатньо великому діапазоні зміни її параметрів необхідно, щоб вона зберігала стійкість та була малочутливою (нечутливою) до флуктуацій визначальних параметрів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. При проектуванні робастних систем керування використовують різні методи оптимального та робастного синтезу [5]. До основних вимог робастності систем автоматизації відносять малочутливість, збереження стійкості та забезпечення належної працездатності системи при зміні її параметрів у заданому діапазоні. Низька чутливість до варіацій реального об'єкта забезпечується за рахунок додаткового введення в алгоритм керування спеціального статичного нелінійного зворотного зв'язку.

Інші підходи щодо моделювання малочутливих систем ґрунтуються на застосуванні функцій чутливості [2].

На відміну від згаданих методів, методи практичної стійкості параметричних систем [3,4] дозволяють чисельно оцінити область допустимих параметрів у заданих структурах та значно розширити коло досліджуваних задач для математичної моделі. Зокрема, задачі стійкості охоплюються постановками задач розрахунку допусків на параметри, а оцінки максимальних за об'ємом областей допусків на параметри можна одержувати за допомогою алгоритмів практичної стійкості за напрямком.

Мета дослідження — розробка чисельних методів розв'язання задач розрахунку допусків на параметри за наявності обмежень на розкид функціоналу якості..

Матеріали та методи дослідження. У роботі застосовуються методи практичної стійкості параметричних систем, теорії чутливості та структурно-параметричної оптимізації.

Результати досліджень та їх обговорення. Припустимо, що за деяким принципом визначено структуру параметричної моделі, що достатньо об'єктивно відображує її властивості, у тому числі можливу залежність від параметрів.

Якщо позначити через P_x множину бажаних станів об'єкта, а через $R_x(\alpha)$ – множину його реальних станів, що відповідають даному значенню параметра α , то умови бажаного функціонування об'єкта можна записати у вигляді

$$R_x(\alpha) \subset P_x, \alpha \in G_\alpha. \quad (1)$$

Іноді умови нормальної працездатності (1) зручно подавати так:

$$R_J(\alpha) \subset P_J, \alpha \in G_\alpha, \quad (2)$$

де $R_J(\alpha)$ – сукупність деяких функціоналів, визначених на множині вектора станів, а P_J – множина допустимих станів цих функціоналів.

Припустимо тепер, що $\bar{\alpha} \in G_{\bar{\alpha}} \subset G_\alpha$ – деяке розрахункове (незбурене) значення вектора параметрів, при якому виконується умова (1) або (2). Цьому значенню відповідає розрахункова траєкторія $\bar{x} = x(t, \bar{\alpha})$. При збуренні вектора $\bar{\alpha}$ одержимо значення $\alpha = \bar{\alpha} + \Delta\alpha$, $\Delta\alpha \in \Delta G_{\bar{\alpha}}(\Delta\alpha)$ та відповідну йому збурену траєкторію $x(t, \alpha) = x(t, \bar{\alpha} + \Delta\alpha)$ ($\Delta G_{\bar{\alpha}}(\Delta\alpha)$ – множина флуктуацій розрахункового значення вектора параметрів $\bar{\alpha}$). За аналогією введемо відповідні позначення для функціоналів: $J(\bar{\alpha})$, $J(\alpha) = J(\bar{\alpha} + \Delta\alpha)$ – значення показників збуреного та незбуреного рухів ($\Delta\alpha \in \Delta G_{\bar{\alpha}}(\Delta\alpha)$).

Тоді, у термінах цих позначень, співвідношення (1), (2) набувають відповідно вигляду

$$R_x(\bar{\alpha} + \Delta\alpha) \subset P_x, \Delta\alpha \in \Delta G_{\bar{\alpha}}(\Delta\alpha), \bar{\alpha} \in G_{\bar{\alpha}}, \quad (3)$$

$$R_J(\bar{\alpha} + \Delta\alpha) \subset P_J, \Delta\alpha \in \Delta G_{\bar{\alpha}}(\Delta\alpha), \bar{\alpha} \in G_{\bar{\alpha}}. \quad (4)$$

Обернена (інверсна) задача чутливості тут може бути сформульована так: знайти множину $\Delta G_{\alpha}(\Delta\alpha)$ відхилень вектора параметрів від розрахункових значень $\bar{\alpha} \in G_{\alpha}$, для кожного значення $\Delta\alpha$ з якої виконувалась би вимога (3) або (4).

Наведені умови нормального функціонування динамічної системи охоплюють низку задач різної природи. Зокрема, якщо в якості параметрів вибирати початкові умови, співвідношення (1) формалізуються в задачу стійкості. Якщо ж умови (1), (2) розглядати у просторі векторів відхилень $\Delta x = x - \bar{x}$, $\Delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha}$, одержимо постановки задач розрахунку допусків на параметри [2].

За наявності припущення, що рух об'єкта описується конкретною параметричною моделлю, наприклад, вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \alpha), \quad f(0, t, 0) \equiv 0, \quad t \in [t_0, T], \quad (5)$$

сформулюємо задачу розрахунку допусків на параметри відносно відповідної системи відхилень

$$\frac{d\Delta x}{dt} = \tilde{f}(\Delta x, t, \Delta\alpha), \quad t \in [t_0, T] \quad (6)$$

для векторів розкиду $\Delta x = x - \bar{x}$, $\Delta\alpha = \alpha - \bar{\alpha}$.

Будемо вважати, що система (6) має $\{\Delta G_{\alpha}(\Delta\alpha), \Phi_t, t_0, T\}$ - оцінку допусків на параметри $\Delta\alpha$, якщо $\Delta x(t, \Delta\alpha) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$ для будь-яких $\Delta\alpha \in \Delta G_{\alpha}(\Delta\alpha)$.

У наведеній конкретизації задача оцінювання множини $\Delta G_{\alpha}(\Delta\alpha)$ повністю охоплюється постановками задач практичної стійкості параметричних систем [3, 6]. Так, якщо початкові умови вихідної системи (5) є фіксованими, тобто $x(t_0) = x_0$, задача оцінки допусків на параметри $\Delta\alpha$ являє собою задачу $\{G_0^x, G_0^{\alpha}, \Phi_t, t_0, T\}$ – стійкості у просторі векторів Δx , $\Delta\alpha$, оскільки множина G_0^x складається з однієї нульової точки.

Для чисельної реалізації постановок задач оцінки допусків розглянемо лінійну систему диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\alpha, \quad t \in [t_0, T], \quad (7)$$

де α – m -вимірний вектор параметрів, що вибирається з деякої множини G_α ; $x = x(t, \alpha)$ – вектор фазових координат вимірності n ; $A(t)$, $B(t)$ – неперервні матриці вимірності $n \times n$ та $n \times m$ відповідно.

Нехай спочатку початкові умови для системи (7) є фіксованими: $x(t_0) = x_0$. Тоді вектори розкиду $y = x - \bar{x}$, $\beta = \alpha - \bar{\alpha}$, задовольнятимуть систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)\beta, t \in [t_0, T], \quad (8)$$

але з нульовими початковими умовами $y(t_0) = 0$.

Якщо задати множину допусків у структурованому вигляді $\{\beta : \beta^* B_\alpha \beta \leq c^2\}$, а динамічні обмеження відносно вектора $y = \Delta x$ взяти лінійними [3]

$$\Phi_t = \Gamma_t = \{y : |l_s^*(t)y| \leq 1, s = 1, 2, \dots, N\}, t \in [t_0, T],$$

то якість допусків буде визначатися $\{c, B_\alpha, \Gamma_t, t_0, T\}$ - оцінкою. Необхідною й достатньою умовою такої оцінки слугуватиме співвідношення:

$$c^2 \leq \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1, 2, \dots, N} [l_s^*(t)Y(t)B_\alpha^{-1}Y^*(t)l_s(t)]^{-1}.$$

Тут $Y(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau)B(\tau)d\tau$ – матриця чутливості розв'язків лінійної системи (7) за вектором параметрів α ; $X(t, \tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$, $X(t)$ – фундаментальна матриця, що визначається згідно з матричним рівнянням:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(t)X(t), X(t_0) = E.$$

Аналогічні оцінки можна одержати для випадку нелінійних обмежень вигляду:

$$\Phi_t = \Psi_t = \{x : \psi(x, t) \leq 1\}, t \in [t_0, T],$$

здійснивши попередню лінеаризацію опуклої множини Ψ_t дотичними гіперплощинами [3].

Зупинимось на реалізації постановки нормального функціонування об'єкта системи у вигляді (4). Дослідимо задачу розрахунку допусків на оптимізаційні параметри при заданому розкиді критерію якості.

Припустимо, що $\bar{\alpha}$ є розв'язком екстремальної задачі

$$I(\bar{\alpha}) = \min_{\alpha \in G_{\alpha}} \Phi(x(T, \alpha)) \quad (9)$$

на траєкторіях системи диференціальних рівнянь (7); $\bar{x} = x(t, \bar{\alpha})$ – траєкторія, що відповідає значенню $\bar{\alpha}$, G_{α} – відома множина допустимих значень параметрів.

Необхідно визначити множину векторів $\beta = \alpha - \bar{\alpha}$ так, щоб розкид функціоналу якості знаходився в заданих межах, тобто, щоб виконувалось співвідношення

$$|\Phi(x(T, \alpha)) - \Phi(x(T, \bar{\alpha}))| = |\Phi(x(T, \bar{\alpha} + \beta)) - \Phi(x(T, \bar{\alpha}))| < \varepsilon, \quad (10)$$

ε – відоме число.

За наявності припущення, що відхилення значень вектора параметрів α від номінальних є достатньо малими, а змінювання вектора параметрів в межах поля допуску лінійні, подамо варіацію показника якості у вигляді [2,3]

$$\begin{aligned} \Phi(x(T, \bar{\alpha} + \beta)) - \Phi(x(T, \bar{\alpha})) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha_i} \Big|_{\substack{x=\bar{x}|_{t=T} \\ \beta_i=0}} \cdot \beta_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_i} \Big|_{\substack{x=\bar{x}|_{t=T} \\ \beta_i=0}} \cdot \beta_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \cdot u_j^{(i)}(T) \Big|_{\substack{x=\bar{x}|_{t=T} \\ \beta_i=0}} \cdot \beta_i. \end{aligned}$$

Тут $u_j^{(i)}(T)$, $i=1,2,\dots,n$, $j=1,2,\dots,m$ – компоненти матриці чутливості вимірності $n \times m$, що обчислюються в точці T .

Тепер, щоб одержати чисельні алгоритми оцінки допусків на параметри при заданому розкиді (10), запишемо вираз для варіації показника якості у вигляді лінійної форми

$$\Phi(x(T, \bar{\alpha} + \beta)) - \Phi(x(T, \bar{\alpha})) = \sum_{i=1}^m l_i(T) \beta_i = l^*(T) \beta,$$

$$\text{де } l_i(T) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \cdot u_j^{(i)}(T) \Big|_{\substack{x=\bar{x}|_{t=T} \\ \beta_i=0}}.$$

Тоді вихідна задача розрахунку допусків на параметри за наявності обмежень (10) буде зводитися до визначення множини $G^{(\beta)}$ з умови

$$\max_{\beta \in G^{(\beta)}} |\Phi(x(T, \alpha)) - \Phi(x(T, \bar{\alpha}))| = \max_{\beta \in G^{(\beta)}} |l^*(T) \beta| < \varepsilon. \quad (11)$$

Якщо задати множину допусків $G^{(\beta)}$ структурно, наприклад у формі еліпсоїда $\{\beta : \beta^* G \beta \leq c^2\}$, то сталу c , що задовольнятиме умові (11), можна оцінити так:

$$c^2 \leq \varepsilon^2 [l^*(T) G^{-1} l(T)]^{-1}. \quad (12)$$

Нерівність (12) одержується шляхом знаходження максимуму лінійної форми на еліпсоїді $\beta^* G \beta = c^2$ з урахуванням вимоги (10).

У подальшому сформульована задача може ускладнюватися: знайти максимальну за об'ємом область допустимих значень розкиду параметрів за наявності обмежень для варіації функціонала якості (10). У рамках розглянутих постановок верхні оцінки множини $G^{(\beta)}$ можна одержувати за допомогою алгоритмів практичної стійкості за напрямом [1, 3]. Так, якщо задавати множину допусків на параметри у вигляді

$$G^{(\beta)} = \{\beta: \beta = k_1 l, 0 \leq k_1 < \bar{k}(l), \forall l \in E^{(m)}, \|l\| = 1\}$$

дістанемо, що

$$k_1 \leq \bar{k}(l) = \varepsilon [l^*(T) l]^{-1}, \forall l (\|l\| = 1) \in E^{(m)}.$$

Наведені результати можна використовувати для задачі розрахунку допусків і у випадку нелінійного змінювання вектора параметрів у межах поля допуску. Для цього потрібно, шляхом спеціальних прийомів [1], провести лінеаризацію варіації показника якості відносно вектора параметрів β .

Так само, у випадку нелінійних початкових умов $x(t_0) = x_0 = x_0(\alpha)$, $t_0 = t_0(\alpha)$, їх лінеаризують за допомогою лінійно-незалежних функцій $\varphi_1(\beta)$, $\varphi_2(\beta)$, ... У результаті дістанемо систему лінійних диференціальних рівнянь відносно векторів y та γ ($\gamma_i = \varphi_i(\beta)$, $i = 1, 2, \dots, M$, $M \geq m$) більш високого порядку, ніж вихідна система (8) з початковими умовами $y(t_0) = \tilde{X}_0 \gamma$, ($\tilde{X}_0$ – матриця вимірності $n \times M$).

У прикладному плані, якщо поширити ці результати на дискретну модель індукційної системи прискорення [6], аналогічні оцінки допусків на параметри коректування можна одержати для випадку заданих обмежень на розкид критерію якості вигляду:

$$|\Phi(z_M) - \Phi(\bar{z}_M)| < \varepsilon.$$

Висновки і перспективи. Для параметричної моделі сформульовано загальні постановки задач щодо нормального функціонування об'єкта на реальних режимах.

За допомогою алгоритмів практичної стійкості для лінійної системи диференціальних параметричних рівнянь одержано оцінки області допусків на параметри за наявності обмежень на варіацію показника якості. У прикладному плані окремі результати поширено на дискретну модель індукційної системи прискорення.

Список використаних джерел

1. Бублик Б. Н., Гаращенко Ф. Г., Кириченко Н. Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. К.: Наук. думка, 1985. 304 с.
2. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 464 с.
3. Гаращенко Ф. Г., Панталієнко Л. А. Аналіз та оцінка параметричних систем. К.: ІСДО, 1995. 140 с.
4. Гаращенко Ф. Г., Сопронюк О. Л. Аналіз практичної стійкості та чутливості лінійних динамічних систем зі зміною вимірності фазового простору. Системні дослідження та інформаційні технології. 2016. № 3. С. 76-90.
5. Луцька Н.М., Ладанюк А.П. Оптимальні та робастні системи керування технологічними об'єктами: монографія. К.: Видавництво Ліра-К., 2015. 288 с.
6. Панталієнко Л. А. Розрахунок оптимальних параметрів коректувальних елементів в індукційних системах прискорювання. Енергетика і автоматика. 2021. №2. С. 107–114.

References

1. Bublyk, B. N., Garashchenko, F. G., Kyrychenko, N. F. (1985). Strukturno-parametrycheskaia optymyzatsiya y ustoichyvest dynamyky puchkov [Structural-parametric optimization and stability of beam dynamics]. Kyiv: Scientific thought, 304.
2. Rozenvasser, E. N., Yusupov, R. M. (1981). Chuvstvytelnost system upravleniya [Sensitivity control systems]. Moscow: Science, 464.
3. Garashchenko, F. G., Pantalienko, L. A. (1995). Analiz ta otsinka parametrychnykh system [Analysis and evaluation of parametric systems]. Kyiv: ISSE, 140.
4. Garashchenko, F. G., Sopronyuk O. L. (2016). Analiz praktychnoyi stiykosti ta chutlyvosti liniynykh dynamichnykh system zi zminoyu vymirnosti fazovoho prostoru [Analysis of the practical stability and sensitivity of linear dynamical systems with changing the dimensionality of the phase space]. Systems research and information technology, 3, 76 –90.
5. Lutska, N. M., Ladaniuk, A. P. (2015). Optymalni ta robustni systemy keruvannia tekhnolohichnymy obiekamy: monohrafiia [Optimal and robust control systems for technological objects]. Kyiv: Lira-K., 288.
6. Pantaliienko, L. A. (2021). Rozrakhunok optymal'nykh parametriv korektuval'nykh elementiv v induktsiynykh systemakh pryskoryuvannya [Calculation of optimal

parameters of corrective elements in induction acceleration systems]. Energy and automation, 2, 107–114.

ESTIMATION OF THE TOLERANCE AREA FOR CORRECTION PARAMETERS IN INDUCTION ACCELERATION SYSTEMS

L. Pantalienko

Abstract. *The general statements of the problems of the normal functioning of the object in real modes are considered, within which the problems of evaluating the area of admissible parameters are formulated.*

The issues of formalizing the formulation of problems for calculating tolerances for parameters in the presence of dynamic restrictions with respect to fluctuations of the state vector of a real object are studied. For the purpose of numerical implementation of this kind of inverse problems, the application of practical stability algorithms for systems of differential equations dependent on parameters is proposed. For linear dynamic constraints on the spread of the vector of phase coordinates, a necessary and sufficient condition for the corresponding estimate of the area of deviations of the system parameters in a given structure is given. It is shown that in this concretization the problem of tolerance estimation is completely covered by the statements of stability problems.

A class of problems related to the estimation of deviations of the vector of parameters from the calculated ones in the presence of a variation in the quality index is singled out. For the numerical implementation of the formulations of such problems, a linear system of differential equations depending on parameters with fixed initial conditions is studied. The analysis of the corresponding system of differential equations with respect to the spread of the state vector and parameters was carried out by methods of practical stability. Provided that the deviations of the values of the vector of parameters from the nominal are small enough, and the change in the vector of parameters within the tolerance field is linear, the expression for the variation of the quality indicator is presented in the form of a linear form. Within the framework of the formulations formulated, the area of tolerances for parameters is specified structurally in the form of an ellipsoid. The range of admissible parameters was estimated by finding the maximum of the linear form on the ellipsoid. A more complicated variant of the problem of estimating the maximum range of allowable values of the spread of the vector of parameters by the methods of practical directional stability is considered. The algorithms are extended to the case of a nonlinear change in the vector of parameters within the tolerance field and non-fixed initial conditions of the original system.

In the applied plan, the considered problem statements are extended to a discrete model of an induction acceleration system for estimating the tolerance range for the correction parameters under given restrictions on the spread of the quality criterion.

Key words: *parametric system, practical stability, parameter tolerances, sensitivity, induction acceleration system*