

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРЯМИХ ТА ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ЧУТЛИВОСТІ МЕТОДАМИ ПРАКТИЧНОЇ СТІЙКОСТІ ЗА НАПРЯМОМ

*Л. А. Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет біоресурсів і природокористування України
E-mail: wnyrk15@gmail.com*

Анотація. Розглянуто загальні постановки задач побудови екстремальних областей допусків на параметри для лінійної системи диференціальних рівнянь за наявності динамічних обмежень на розкид вектора станів. З'ясовано, що з такого роду задачами чутливості тісно зв'язані задачі оцінювання максимальної за об'ємом області стійкості у відповідному просторі функцій.

З метою одержання верхніх оцінок шуканих величин формалізовано задачі оцінки допусків з позицій стійкості за одиничним напрямом. Досліджено випадки лінійних та нелінійних обмежень на розкид вектора фазових координат з вихідними лінійними початковими умовами відносно вектора параметрів системи. Необхідні й достатні умови сформульовано у вигляді критеріїв оцінок допусків на параметри, що охоплюють випадок фіксованих початкових умов.

Розглянуто задачі оцінювання максимальної за об'ємом області стійкості відносно відхилень векторів стану та параметрів системи. Для випадку сумісних допустимих обмежень у роботі наведено відповідні числові розрахунки для верхніх оцінок. Зокрема, для фіксованих початкових умов за цими критеріями оцінювання визначено максимальні за об'ємом множини допусків на параметри системи при сумісних динамічних обмеженнях на флуктуації векторів станів і параметрів.

З позицій практичної стійкості за напрямом досліджено прямі задачі чутливості, наведено числові оцінки розкиду вектора фазових координат системи за наявності лінійних та фіксованих початкових умов відносно вектора параметрів.

Продемонстровано, що у наведеній конкретизації задачі максимальної оцінки допусків повністю охоплюється постановками задач практичної стійкості за напрямом. Так, для розрахунку областей гарантованої чутливості поняття практичної стійкості за одиничним напрямом поширено на простір функцій чутливості в початковий момент часу.

Наведені алгоритми застосовано для оцінки області допусків на параметри коректування дискретної моделі індукційної системи прискорення при заданих обмеженнях на розкид критерію якості; варіацію показника якості в межах поля допуску подано у вигляді лінійної форми відносно розкиду вектора параметрів.

Ключові слова: *практична стійкість, одиничний напрям, допуски на параметри, чутливість, індукційна система прискорюванн.*

Актуальність. Для забезпечення якісної роботи структурно заданої системи керування в реальних умовах експлуатації необхідно ще на етапі проектування враховувати можливі відхилення її визначальних параметрів від номінальних (розрахункових) значень [1–3]. За згаданими вимогами область допусків на параметри може визначатися наперед заданими обмеженнями на вектор фазових координат параметричної системи, функції чутливості або критерій якості [4, 5]. Для належної працездатності реальної системи необхідно, щоб вона була малочутливою (нечутливою), тобто зберігала стійкість до розкиду параметрів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Сучасні напрями моделювання робастних систем, що відповідають вимогам низької чутливості, ґрунтуються на методах оптимального та робастного синтезу [3]. При цьому, зазвичай, забезпечення працездатності системи здійснюється за рахунок введення в алгоритм керування додаткового нелінійного зворотного зв'язку або застосування апарату функцій чутливості.

Методи практичної стійкості [1, 4, 5] дозволяють з єдиних позицій проводити всебічний аналіз параметричної системи, чисельно оцінювати максимальну за об'ємом область допустимих параметрів, розкиду фазових координат, гарантованої чутливості.

Мета дослідження – розробка чисельних методів розв'язання задач розрахунку максимальних за об'ємом областей допусків на параметри за наявності динамічних обмежень на розкид вектора станів.

Матеріали та методи дослідження. У роботі застосовуються методи практичної стійкості за напрямом параметричних систем, теорії чутливості та структурно-параметричної оптимізації.

Результати досліджень та їх обговорення. Припустимо, що рух об'єкта описується лінійною системою диференціальних рівнянь, залежних від параметрів

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)\alpha, t \in [t_0, T] \quad , \quad (1)$$

Тут α – m -вимірний вектор параметрів, $\alpha \in G_\alpha$; $x = x(t, \alpha)$ – вектор фазових координат вимірності n ; $A(t)$, $B(t)$ – неперервні матриці вимірності $n \times n$ та $n \times m$ відповідно.

Тоді вектори розкиду $y = x - \bar{x}$, $\beta = \alpha - \bar{\alpha}$ задовольнятимуть систему

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)\beta, t \in [t_0, T] \quad (2)$$

де $\bar{\alpha} \in G_\alpha^- \subset G_\alpha$ – деяке розрахункове (незбурене) значення вектора параметрів, а $\bar{x} = x(t, \bar{\alpha})$ – відповідна розрахункова траєкторія системи (1).

Дослідимо задачу оцінювання області допусків $G^{(\beta)}$, що не порушують заданих динамічних обмежень Φ_t , $t \in [t_0, T]$ на вектор y .

Означення. Будемо казати, що система (2) має $\{k, l, \Phi_t, t_0, T\}$ - оцінку допусків на параметри β , якщо $y(t, \beta) \in \Phi_t, t \in [t_0, T]$, лише тільки параметри β вибираються згідно з рівністю $\beta = k_1 l$, $0 \leq k_1 < k$, l – m -вимірний одиничний вектор.

Нехай початкові умови для системи (1) задано у вигляді $x(t_0) = X_0 \alpha$, де X_0 – відомі матриці вимірності $n \times m$, а обмеження Φ_t , $t \in [t_0, T]$ на вектор y є лінійними:

$$\Phi_t = \Gamma_t = \{y : |l_s^*(t)y| \leq 1, s = 1, 2, \dots, N\}, t \in [t_0, T]. \quad (3)$$

Тоді для $\{k, l, \Gamma_t, t_0, T\}$ - оцінки допусків на параметри β необхідно й достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$k \leq \bar{k}(l) = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1, 2, \dots, N} \|l_s^*(t)(X(t, t_0)X_0 + Y(t))\|^{-1}. \quad (4)$$

Тут $X(t, t_0)$ – нормована фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи (1) при $\alpha = 0$; $Y(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau)B(\tau)d\tau$ – матриця чутливості по вектору параметрів α , що обчислюється згідно з рівнянням

$$\frac{dY(t)}{dt} = A(t)Y(t) + B(t), t \in [t_0, T],$$

за наявності початкової умови $Y(t_0) = X_0$.

Якщо динамічні обмеження на вектор розкиду y нелінійного типу

$$\Phi_t = \Psi_t = \{y : \psi(y, t) \leq 1\}, t \in [t_0, T], \quad (5)$$

критерієм $\{k, l, \Psi_t, t_0, T\}$ - оцінки допусків на параметри α слугує нерівність

$$k \leq \bar{k}(l) = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\bar{y} \in \Psi'_t} \frac{g^*(\bar{y}, t) \bar{y}}{g^*(\bar{y}, t) (X(t, t_0) X_0 + Y(t)) l},$$

$$g^*(\bar{y}, t) \bar{y} > 0, \bar{y} \in \Psi'_t, t \in [t_0, T], \quad (6)$$

де $g^*(\bar{y}, t) = \text{grad}_{\bar{y}}^* \psi(\bar{y}, t)$, Ψ'_t – межа замкненої опуклої множини Ψ_t , $t \in [t_0, T]$.

Доведення співвідношень (4), (6) здійснюється шляхом запису загального розв'язку системи (2) з початковими умовами $y(t_0) = X_0 \beta$ у формі Коші

$$y(t, \beta) = X(t, t_0) X_0 \beta + \int_{t_0}^t X(t, \tau) B(\tau) d\tau \beta$$

та розв'язання відповідної екстремальної задачі на множинах (3), (5).

Якщо ж початкові умови для системи (1) фіксовані $x(t_0) = x_0$, то у формулах (4), (6) необхідно покласти $X_0 = 0$.

Обчисливши величини $\bar{k}(l)$ згідно з наведеними критеріями, дістанемо екстремальну множину допусків

$$G_e^{(\beta)} = \{\beta : \beta = k_1 l, 0 \leq k_1 < \bar{k}(l), \forall l \in E^{(m)}, \|l\| = 1\}. \quad (7)$$

Множина (7) є екстремальною у тому розумінні, що для вектора параметрів $\beta = kl$, $k > \bar{k}(l)$, задані динамічні обмеження порушуються для будь-якого напрямку l ($\|l\| = 1$) $\in E^{(m)}$.

З розглянутими задачами тісно зв'язана задача оцінювання максимальної за об'ємом області стійкості $G_0^{y, \beta}$ відносно векторів y та β . На підставі алгоритмів практичної стійкості за напрямом сформулюємо критерії оцінки для допустимих множин вигляду

$$\Phi_{t, \beta} = \Gamma_{t, \beta} = \{y, \beta : |l_s^*(t) y + m_s^* \beta| \leq 1, s = 1, 2, \dots, N\}, t \in [t_0, T]; \quad (8)$$

$$\Phi_{t, \beta} = \Psi_{t, \beta} = \{y, \beta : \psi(y, t, \beta) \leq 1\}, t \in [t_0, T]. \quad (9)$$

Критерій 1. Для того, щоб система (2) була $\{k, l, \Gamma_{t, \beta}, t_0, T\}$ - стійкою необхідно і достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$k \leq \bar{k}(l) = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{s=1, 2, \dots, N} \left[\left| l_s^*(t) \int_{t_0}^t X(t, \tau) B(\tau) d\tau l_\beta + l_s^*(t) X(t, t_0) l_y + m_s^* l_\beta \right| \right]^{-1}, \quad (10)$$

де $l = \begin{pmatrix} l_y \\ l_\beta \end{pmatrix}$ – одиничний $(n+m)$ -вимірний вектор.

Критерій 2. Для того, щоб система (2) була $\{k, l, \Psi_{t,\beta}, t_0, T\}$ -стійкою необхідно і достатньо, щоб виконувалась така нерівність:

$$k \leq \bar{k}(l) = \min_{t \in [t_0, T]} \min_{\bar{y}, \bar{\beta} \in \Psi'_{t,\beta}} \frac{\text{grad}_{\bar{y}}^* \psi(\bar{y}, t, \bar{\beta}) \bar{y} + \text{grad}_{\bar{\beta}}^* \psi(\bar{y}, t, \bar{\beta}) \bar{\beta}}{\text{grad}_{\bar{y}}^* \psi(\bar{y}, t, \bar{\beta}) X(t, t_0) l_y + \text{grad}_{\bar{\beta}}^* \psi(\bar{y}, t, \bar{\beta}) G_1(t) l_\beta + \text{grad}_{\bar{\beta}}^* \psi(\bar{y}, t, \bar{\beta}) l_\beta},$$

$$\text{grad}_{\bar{y}}^* \psi(\bar{y}, t, \bar{\beta}) \bar{y} + \text{grad}_{\bar{\beta}}^* \psi(\bar{y}, t, \bar{\beta}) \bar{\beta} > 0, \quad \bar{y}, \bar{\beta} \in \Psi'_{t,\beta}, \quad t \in [t_0, T], \quad (11)$$

де $\Psi'_{t,\beta}$ – межа області $\Psi_{t,\beta}$, $t \in [t_0, T]$, $G_1(t) = \int_{t_0}^t X(t, \tau) B(\tau) d\tau$.

Екстремальна область стійкості тут має так само вигляд (7), де $l = \begin{pmatrix} l_y \\ l_\beta \end{pmatrix} \in E^{(n+m)} (\|l\| = 1)$, а величина $\bar{k}(l)$, в залежності від типу обмежень, обчислюється згідно з формулами (10), (11).

Зокрема, для випадку фіксованих початкових умов $x(t_0) = x_0$, наведені критерії визначатимуть верхню оцінку множини допусків на параметри системи (1) за відомими обмеженнями (8), (9). Так, наприклад, щоб дістати аналітичний вираз $\{k, l, \Psi_{t,\beta}, t_0, T\}$ - оцінки допусків, потрібно перший доданок знаменника в рівності (11) прирівняти до нуля.

Оцінивши область допусків $G^{(\beta)}$, можна, згідно з критеріями $\{k, l_x G_0^x, \Phi_t, t_0, T\}$ - стійкості, розраховувати усю множину початкових станів для вектора розкиду u , що не порушують заданих динамічних обмежень $\Phi_t, t \in [t_0, T]$.

Перейдемо тепер до розгляду прямих задач теорії чутливості.

Нехай рух об'єкта задано лінійною системою (1) з початковим умовами $x(t_0) = X_0 \alpha$. Необхідно за відомою множиною $G^{(\beta)}$ оцінити розкид вектора фазових станів.

З цією метою подамо область допусків на параметри u вигляді (7), де $\bar{k}(l)$ – відома скалярна величина, та оцінимо загальний розв'язок системи (2) з початковим умовами $y(t_0, \beta) = X_0 \beta$. Дістанемо:

$$\|y(t, \beta)\| \leq \max_{t \in [t_0, T]} \|Y(t)\| \cdot |\bar{k}(l)| \cdot \|l\| = \bar{k}(l) \max_{t \in [t_0, T]} \|Y(t)\|.$$

Запишемо рівняння для функцій чутливості у формі інтегрального рівняння

$$Y(t) = \int_{t_0}^t (A(t)Y(t) + B(t))dt + Y(t_0)$$

та оцінимо за нормою [6]:

$$\|Y(t)\| \leq \int_{t_0}^t (a\|Y(t)\| + b)dt + c,$$

де $a = \max_{t \in [t_0, T]} \|A(t)\|$, $b = \max_{t \in [t_0, T]} \|B(t)\|$, $c = \max_{\beta \in G^{(\beta)}} \|Y(t_0)\| = \bar{k}(l) \|X_0\|$.

З останньої нерівності випливає оцінка

$$\|Y(t)\| \leq \left(c + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}, \quad \beta \in G^{(\beta)}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (12)$$

Отже,

$$\|y(t, \beta)\| \leq \bar{k}(l) \max_{t \in [t_0, T]} \left(\left(c + \frac{b}{a}\right)e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a} \right).$$

У випадку фіксованих початкових умов $x(t_0) = x_0$ величину c у співвідношенні (12) слід покласти рівною нулю.

З позицій практичної стійкості за напрямом можна досліджувати й задачі гарантованої чутливості [4]. Для цього необхідно ввести поняття стійкості функцій чутливості за одиничним напрямом в момент часу $t = t_0$ та скористатися відповідними критеріями у просторі цих функцій.

У плані прикладань розроблені алгоритми стійкості за напрямом застосовуються для оцінки максимальної області допусків на параметри коректування індукційної системи прискорення [5].

Висновки і перспективи. Для лінійної системи параметричних диференціальних рівнянь сформульовано постановки задач оцінювання максимальних за об'ємом областей допусків на параметри при заданих динамічних обмеженнях на розкид вектора станів. За допомогою алгоритмів практичної стійкості за напрямом одержано відповідні оцінки, що охоплюють випадок сумісних допустимих обмежень, задач гарантованої чутливості та оцінювання розкиду

вектора фазових координат. У подальшому результати досліджень заплановано поширити на дискретну модель індукційної системи прискорення.

Список використаних джерел

1. Гаращенко Ф. Г., Сопронюк О. Л. Аналіз практичної стійкості та чутливості лінійних динамічних систем зі зміною вимірності фазового простору. Системні дослідження та інформаційні технології. 2016. № 3. 76-90.
2. Гаращенко Ф. Г., Пічкур В. В. Прикладні задачі теорії стійкості. К.: ВПЦ «Київський університет», 2014. 142 с.
3. Луцька Н. М., Ладанюк А. П. Оптимальні та робастні системи керування технологічними об'єктами: монографія. К.: Видавництво Ліра-К., 2015. 288 с.
4. Панталієнко Л. А. Про проектування малочутливих прискорювально-фокусуючих систем методами практичної стійкості. Енергетика і автоматика. 2018. №4. С. 144–152.
5. Панталієнко Л. А. Оцінювання області допустимих параметрів за наявності варіації показника якості. Енергетика і автоматика. 2023. №1. С. 183–191.
6. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння: підручник. К.: Либідь, 2003. 600 с.

References

1. Garashchenko, F. G., Sopronyuk, O. L. (2016). Analiz praktychnoyi stiykosti ta chutlyvosti liniynykh dynamichnykh system zi zminoyu vymirnosti fazovoho prostoru [Analysis of the practical stability and sensitivity of linear dynamical systems with changing the dimensionality of the phase space]. Systems research and information technology, 3, 76 –90.
2. Garashchenko, F. H., Pichkur, V. V. (2014). Prykladni zadachi teorii stiikosti [Applied problems of the theory of stability]. Kyiv: Kyiv University, 142.
3. Lutska, N. M., Ladaniuk, A. P. (2015). Optymalni ta robustni systemy keruvannia tekhnolohichnymy obiektyamy: monohrafiia [Optimal and robust control systems for technological objects]. Kyiv: Lira-K., 288.
4. Pantalienenko, L. A. (2018). Pro proektuvannya malochutlyvykh pryskoryuval'no-fokusuyuchykh system metodamy praktychnoyi stiykosti [About the design of low-sensitivity accelerating-focusing systems by methods of practical stability]. Energy and automation, 4, 144 –152.
5. Pantalienenko, L. A. (2023). Otsinyuvannya oblasti dopustymykh parametriv za nayavnosti variatsiyi pokaznyka yakosti [Evaluation of the area of permissible parameters in the presence of a variation of the quality indicator]. Energy and automation, 1, 183 –191.
6. Samoylenko A. M., Perestyuk, M. O., Parasyuk, I. O. (2003). Dyferentsial'ni rivnyannya [Differential equations]. Kyiv: Lybid, 142.

RESEARCH OF DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF SENSITIVITY USING METHODS OF PRACTICAL STABILITY BY DIRECTION

L. Pantalienko

Abstract. *The general statements of the problems of construction of extreme ranges of tolerances on parameters for a linear system of differential equations in the presence of dynamic restrictions on the spread of the state vector are considered. It was found that such sensitivity problems are closely related to the problems of estimating the maximum area of stability in the corresponding function space.*

In order to obtain upper estimates of the sought values, the problem of estimating tolerances from the positions of stability in a single direction is formalized. The cases of linear and nonlinear restrictions on the spread of the phase coordinate vector with initial linear initial conditions relative to the vector of the system parameters are studied. Necessary and sufficient conditions are formulated in the form of criteria for estimating tolerances on parameters covering the case of fixed initial conditions.

The tasks of estimating the maximum volume of the stability region with respect to the deviations of the state vectors and system parameters are considered. For the case of compatible admissible constraints, the paper gives the corresponding numerical calculations for the upper estimates. In particular, for fixed initial conditions, the maximum set of tolerances for system parameters with compatible dynamic restrictions on fluctuations of state vectors and parameters are determined according to these evaluation criteria.

From the standpoint of practical stability in direction, direct sensitivity problems are investigated, numerical estimates of the spread of the phase coordinate vector of the system in the presence of linear and fixed initial conditions relative to the parameter vector are given.

It has been demonstrated that in the given specification of the problem of maximum estimation of tolerances it is completely covered by problem statements of practical stability by direction. Thus, to calculate areas of guaranteed sensitivity, the concept of practical stability in a single direction is extended to the space of sensitivity functions at the initial moment of time.

The above algorithms are used to estimate the range of tolerances for the adjustment parameters of the discrete model of the induction acceleration system with the given limitations on the spread of the quality criterion; the variation of the quality indicator within the tolerance field is presented in the form of a linear form relative to the spread of the parameter vector.

Key words: *practical stability, single direction, tolerances on parameters, sensitivity, induction acceleration system*