УДК 621.313.8: 631.53.027 DOI 10.31548/energiya2020.02.098

ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПЕРЕХІДНОГО ПРОЦЕСУ В ЕЛЕКТРОПРИВОДІ МЕТОДАМИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

Л. А. Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук, доцент

О. Ю. Синявський, кандидат технічних наук, доцент

Д. Є. Жук, студент

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: nni.elertrik@gmail.com

Анотація. *Найчастіше модель деякого процесу набуває вигляду диференціального рівняння, тому подальша задача стосується методів його розв'язання. На відміну від класичних методів, підхід операційного числення дозволяє ефективно розраховувати будь-які процеси коливань механічних систем, систем автоматичного регулювання, складних електричних кіл за наявності довільної напруги живлення.*

З позицій операційного числення доцільно проводити аналіз перехідного процесу в електроприводі, застосовуючи різні підходи в залежності від вигляду коренів відповідного параметричного рівняння. У досліджуваному випадку перехідний процес в електроприводі відбувається при моменті статичних опорів робочої машини, що не залежить від кутової швидкості, але який лінійно змінюється у часі.

Мета дослідження – аналіз перехідного процесу в електроприводі з позицій операційного числення.

Наведено результати аналізу параметричної моделі перехідного процесу в електроприводі стрічкового транспортера з позицій операційного числення. Розглянуто нульові початкові умови для відповідної задачі Коші. В залежності від типу коренів операторного рівняння застосовано певні властивості перетворення Лапласа. При цьому операцію диференціювання перетворено на алгебраїчну (множення на число), а вихідне диференціальне рівняння − на ціле раціональне рівняння другого порядку.

Ключові слова: *математична модель, перехідний процес, момент двигуна, параметри, задача Коші, перетворення Лапласа, операторне рівняння*

Актуальність. У різних сферах діяльності людини виникає багато задач, зв'язаних зі створенням математичної моделі деякого процесу (фізичного, хімічного, біологічного, економічного, тощо). Здебільшого така модель набуває вигляду

диференціального рівняння [1, 2], тому подальша задача стосується методів його розв'язання [1]. На відміну від класичних методів, підхід операційного числення [3, 4] дозволяє ефективно розраховувати будь-які процеси коливань механічних систем, систем автоматичного регулювання, складних електричних кіл за наявності довільної напруги живлення.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Найбільш поширеними щодо вивчення динаміки поведінки об'єкта є саме лінійні диференціальні рівняння та їх системи. У більш ускладненому варіанті досліджують параметричні моделі таких задач. Останнє дозволяє провести всебічний аналіз поведінки моделі в динаміці на різних режимах функціонування досліджуваного об'єкта. У цьому випадку операційний підхід має певні переваги у порівнянні з класичними методами. Так, операція диференціювання замінюється на алгебраїчну (множення на число), а вихідне диференціальне рівняння − на ціле раціональне рівняння відповідного порядку. Крім того, не потрібно встановлювати кратність коренів характеристичного рівняння, що для параметричних моделей є досить непростою задачею. Якщо ж права частина досліджуваного диференціального рівняння є розривною, то класичні методи тут взагалі «не працюють».

Зокрема, з позицій операційного числення доцільно проводити аналіз перехідного процесу в електроприводі [1], застосовуючи різні підходи в залежності від вигляду коренів відповідного параметричного рівняння. У досліджуваному випадку перехідний процес в електроприводі відбувається при моменті статичних опорів робочої машини, що не залежить від кутової швидкості, але який лінійно змінюється у часі [5].

Мета дослідження – аналіз перехідного процесу в електроприводі **з** позицій операційного числення.

Матеріали і методи дослідження. У роботі застосовуються методи теорії диференціальних рівнянь, функцій комплексної змінної та операційного числення.

Результати досліджень та їх обговорення. Експериментальним шляхом встановлено [5], що диференційне рівняння, яке описує зміну моменту електродвигуна стрічкового транспортера у перехідному процесі, має вигляд:

$$T_e T_\mu \frac{d^2 M_\partial}{dt^2} + T_\mu \frac{dM_\partial}{dt} + M_\partial = M_{спп о} + \gamma t \,. \tag{1}$$

де M_∂ – момент двигуна; $M_{спо ч}$ – момент статичних опорів робочої машини у початковий момент часу; γ – швидкість зміни моменту статичних опорів робочої машини у часі; T_e, T_μ – електромагнітна та електромеханічна сталі часу відповідно.

Дослідимо математичну модель перехідного процесу (1) методами операційного числення при нульових початкових умовах, що відповідає задачі Коші вигляду

$$Ay'' + By' + y = a + \gamma t \;\; y(0) = 0 \,, \;\; y'(0) = 0 \,. \tag{2}$$

Нехай розв'язку-оригіналу $y(t)$ задачі (2) відповідає зображення $Y(p)$: $y(t) \to Y(p)$. Тоді, за властивостями перетворення Лапласа, дістанемо $y'(t) \to pY(p)$, $y''(t) \to p^2 Y(p) - 1$, $a + \gamma t \to \frac{a}{p} + \frac{\gamma}{p^2}$. Тепер маємо таке операторне рівняння:

$$Ap^2 Y(p) + BpY(p) + Y(p) = \frac{a}{p} + \frac{\gamma}{p^2}$$

або

$$Y(p)\left(Ap^2 + Bp + 1\right) = \frac{ap + \gamma}{p^2} \,.$$

Звідси знаходимо

$$Y(p) = \frac{ap + \gamma}{p^2\left(Ap^2 + Bp + 1\right)} \,. \tag{3}$$

Подальші дослідження пов'язані зі знаком дискримінанту D квадратного параметричного рівняння

$$Ap^2 + Bp + 1 = 0 \,. \tag{4}$$

При відхиленні напруги змінюються корені рівняння (4) і відповідно розв'язки диференційного рівняння, що описує перехідний процес в електроприводі.

Так, при відхиленні напруги більше за 16 % електромеханічна стала часу стає більшою ніж у 4 рази за електромагнітну ($T_м > 4T_е$) і тоді $D = B^2 - 4A > 0$.

Для цього випадку розклад функції (3) на елементарні дроби матиме вигляд

$$\frac{ap+\gamma}{p^2\left(Ap^2+Bp+1\right)} = \frac{ap+\gamma}{Ap^2(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{a_1p+\gamma_1}{p^2(p-p_1)(p-p_2)} = \frac{\tilde{A}}{p^2} + \frac{\tilde{B}}{p} + \frac{\tilde{C}}{p-p_1} + \frac{\tilde{D}}{p-p_2}, \quad (5)$$

де $a_1 = \frac{a}{p}$, $\gamma_1 = \frac{\gamma}{p}$; p_1, p_2 – дійсні корені квадратного рівняння (4).

Тепер, за таблицею відповідності, маємо

$$\frac{\tilde{A}}{p^2} + \frac{\tilde{B}}{p} + \frac{\tilde{C}}{p-p_1} + \frac{\tilde{D}}{p-p_2} \to \tilde{A}\,t + \tilde{B} + \tilde{C}\,e^{p_1t} + \tilde{D}\,e^{p_2t}. \quad (6)$$

Для знаходження невизначених коефіцієнтів $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ застосуємо метод часткових значень. З цією метою зводимо праву частину розкладу (5) до спільного знаменника та прирівнюємо чисельники одержаної рівності:

$$a_1p+\gamma_1 = \tilde{A}(p-p_1)(p-p_2) + \tilde{B}\,p(p-p_1)(p-p_2) + \tilde{C}\,p^2(p-p_2) + \tilde{D}\,p^2(p-p_1). \quad (7)$$

Надаємо змінній *p* у рівності (7) довільних числових значень, для доцільності беремо дійсні корені знаменника розкладу (5).

При $p=0$: $\gamma_1 = \tilde{A}(-p_1)(-p_2)$, $\tilde{A} = \frac{\gamma_1}{p_1p_2}$;

при $p=p_1$: $a_1p_1+\gamma_1 = \tilde{C}\,p_1^2(p_1-p_2)$, $\tilde{C} = \frac{a_1p_1+\gamma_1}{p^2(p_1-p_2)}$;

при $p=p_2$: $a_1p_2+\gamma_1 = \tilde{D}\,p_2^2(p_2-p_1)$, $\tilde{D} = \frac{a_1p_2+\gamma_1}{p_2^2(p_2-p_1)}$;

при $p=1$: $a_1+\gamma_1 = \tilde{A}(1-p_1)(1-p_2) + \tilde{B}(1-p_1)(1-p_2) + \tilde{C}(1-p_2) + \tilde{D}(1-p_1)$, звідки

$$\tilde{B} = \frac{a_1+\gamma_1}{(1-p_1)(1-p_2)} - \frac{\gamma_1}{p_1p_2} - \frac{a_1p_1+\gamma_1}{p_1^2(1-p_1)(p_1-p_2)} - \frac{a_1p_2+\gamma_1}{p_2^2(1-p_2)(p_2-p_1)}.$$

Підставивши знайдені невизначені коефіцієнти у формулу (6), дістанемо розв'язок задачі Коші (2) для випадку *D*>0 у вигляді

$$y(t) = \frac{\gamma_1}{p_1p_2}(t-1) + \frac{a_1p_1+\gamma_1}{p_1^2(p_1-p_2)}e^{p_1t} + \frac{a_1p_2+\gamma_1}{p_2^2(p_2-p_1)}e^{p_2t} + \frac{a_1+\gamma_1}{(1-p_1)(1-p_2)} -$$

$$- \frac{a_1p_1+\gamma_1}{p_1^2(1-p_1)(p_1-p_2)} - \frac{a_1p_2+\gamma_1}{p_2^2(1-p_2)(p_2-p_1)}. \quad (8)$$

Якщо $T_м < 4T_e$, то $D < 0$, тобто корені рівняння (4) є комплексно-спряженими

$$p_{1,2} = -\frac{B}{2A} \pm i\,\frac{\sqrt{4A - B^2}}{2A} = -\alpha \pm i\lambda\,,$$

а розклад функції (3) на елементарні дроби набуватиме вигляду

$$Y(p) = \frac{ap + \gamma}{p^2\left(Ap^2 + Bp + 1\right)} = \frac{\tilde{A}}{p^2} + \frac{\tilde{B}}{p} + \frac{\tilde{C}p + \tilde{D}}{Ap^2 + Bp + 1}\,. \qquad (9)$$

Щоб скористатися таблицею відповідності, перетворимо третій доданок (9), попередньо виділивши у знаменнику повний квадрат:

$$\frac{\tilde{C}p + \tilde{D}}{Ap^2 + Bp + 1} = \frac{1}{A}\cdot\frac{\tilde{C}p + \tilde{D}}{(p+\alpha)^2 + \lambda^2} = \frac{1}{A}\cdot\frac{\tilde{C}(p+\alpha) - \tilde{C}\alpha + \tilde{D}}{(p+\alpha)^2 + \lambda^2} =$$

$$= \frac{\tilde{C}}{A}\cdot\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \lambda^2} + \frac{\tilde{D} - \tilde{C}\alpha}{\lambda A}\cdot\frac{\lambda}{(p+\alpha)^2 + \lambda^2}\,.$$

Тепер для (9) маємо таку відповідність:

$$Y(p) \to \tilde{A}\,t + \tilde{B} + \frac{1}{A}\cdot e^{-\alpha t}\left(\tilde{C}\cos\lambda t + \frac{\tilde{D} - \tilde{C}\alpha}{\lambda}\sin\lambda t\right). \qquad (10)$$

Для визначення невідомих $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ застосуємо метод невизначених коефіцієнтів, прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях у рівності типу (7):

$$ap + \gamma = (A\tilde{B} + \tilde{C})p^3 + (\tilde{A}A + \tilde{B}B + \tilde{D})p^2 + (\tilde{A}B + \tilde{B})p + \tilde{A}\,.$$

У результаті дістанемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язком якої будуть числа $\tilde{A} = \gamma$, $\tilde{B} = a - \gamma B$, $\tilde{C} = (\gamma B - a)A$, $\tilde{D} = (\gamma B - a)B - \gamma A$.

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ у відповідність (10), остаточно дістанемо частинний розв'язок задачі (2) при $D < 0$:

$$y(t) = \gamma\,(t - B) - \gamma B + e^{-\alpha t}\left[(\gamma B - a)\cos\lambda t + \frac{(\gamma B - a)\alpha - \gamma}{\lambda}\sin\lambda t\right].$$

Коли відхилення напруги становитиме 16 %, тоді електромеханічна стала часу буде дорівнювати чотирьом електромагнітним ($T_м$=4T_e). У цьому випадку D=0 і рівняння (4) має дійсний корінь кратності 2: $p_1 = -\frac{B}{2A} = -\alpha$. Розклад функції (3) на елементарні дроби при D=0 набуває такого вигляду:

$$\frac{ap+\gamma}{p^2\left(Ap^2+Bp+1\right)}=\frac{ap+\gamma}{Ap^2\left(p-p_1\right)^2}=\frac{a_1p+\gamma_1}{p^2\left(p-p_1\right)^2}=\frac{\tilde{A}}{p^2}+\frac{\tilde{B}}{p}+\frac{\tilde{C}}{p-p_1}+\frac{\tilde{D}}{(p-p_1)^2}. \quad (11)$$

Безпосередньо за таблицею відповідності, маємо

$$Y(p)=\frac{\tilde{A}}{p^2}+\frac{\tilde{B}}{p}+\frac{\tilde{C}}{p-p_1}+\frac{\tilde{D}}{(p-p_1)^2}\to\tilde{A}\,t+\tilde{B}+\tilde{C}e^{p_1t}+\tilde{D}e^{p_1t}t=\tilde{A}\,t+\tilde{B}+e^{p_1t}\left(\tilde{C}+\tilde{D}t\right), \quad (12)$$

а невідомі параметри $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, $\tilde{D}$ визначаємо згідно з рівнянням

$$a_1p+\gamma_1=(\tilde{B}+\tilde{C})p^3+(\tilde{A}-2\tilde{B}p_1-\tilde{C}p_1+\tilde{D})p^2+(-2\tilde{A}p_1+\tilde{B}p_1^2)p+\tilde{A}\,p_1^2.$$

Розв’язавши відповідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, дістанемо значення невідомих параметрів:

$$\tilde{A}=\frac{\gamma_1}{p_1^2},\ \tilde{B}=\frac{a_1p_1+2\gamma_1}{p_1^3},\ \tilde{C}=-\frac{a_1p_1+2\gamma_1}{p_1^3},\ \tilde{D}=\frac{a_1p_1+\gamma_1}{p_1^2}.$$

Тепер підставимо ці значення у (12) та одержимо шуканий розв’язок (2) при D=0 у вигляді

$$y(t)=\frac{\gamma_1}{p_1^2}\left(t+\frac{2}{p_1}\right)+\frac{a_1}{p_1^2}+e^{p_1t}\left[\left(\gamma_1+a_1p_1\right)t-\frac{a_1p_1+2\gamma_1}{p_1}\right]\cdot\frac{1}{p_1^2}.$$

Висновки і перспективи. Проведено дослідження можливих випадків роботи параметричної моделі перехідних процесів в електроприводі стрічкового транспортера залежно від реальних режимів з позицій операційного числення. За типом коренів операторного рівняння побудовано частинні розв’язки відповідних диференціальних рівнянь у скінченному вигляді. Запропонований підхід можна поширити на задачі аналізу перехідних процесів в електроприводі робочих машин за наявності ненульових початкових умов.

Список використаних джерел

1. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения. Примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1984. – 408 с.

2. Гаращенко Ф. Г. Прикладні задачі теорії стійкості / Ф. Г. Гаращенко, В. В. Пічкур. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2014. – 125 с.

3. Грищенко О. Ю. Теорія функцій комплексної змінної / О. Ю. Грищенко, С. І. Ляшко – К.: ВПЦ «Київський університет», 2008. – 460 с.

4. Мартиненко М. А. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. / М. А. Мартиненко, І. І. Юрик – К.: Видавн. дім «Слово», 2008. – 296 с.

5. Савченко В. В. Передпосадкова обробка картоплі в магнітному полі / В. В.Савченко, О. Ю.Синявський. – К.: ЦК«Компринт», 2015. – 160 с.

References

1. Samoilenko A. M., Kryvosheia S. A., Perestiuk N. A. (1984). Differentsial'nyye uravneniya. Primery i zadachi [Differential equations. Examples and tasks]. Kyiv: Higher school, 408.

2. Harashchenko F. H., Pichkur V. V. (2014). Prykladni zadachi teorii stiikosti [Applied problems of stability theory]. Kyiv: Kyiv University, 125.

3. Hryshchenko O. Yu., Liashko S. I. (2008). Teoriia funktsii kompleksnoi zminnoi [Theory of functions of a complex variable]. Kyiv: Kyiv University, 460.

4. Martynenko M. A., Yuryk I. I. (2008). Teoriia funktsii kompleksnoi zminnoi. Operatsiine chyslennia. Navchalnyi posibnyk [Theory of functions of a complex variable. Operating calculus. Tutorial]. Kyiv: Publishing house "Slovo", 296.

5. Savchenko V. V., Sinyavsky O. Yu. (2015). Peredposadkova obrobka kartopli v mahnitnomu poli [Pre-planting treatment of potatoes in a magnetic field]. Kyiv: "Comprint", 160.

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРОПРИВОДЕ МЕТОДАМИ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Л. А. Панталиенко, А. Ю. Синявский, Д. Е. Жук

Аннотация. *Чаще всего модель некоторого процесса приобретает вид дифференциального уравнения, поэтому дальнейшая задача касается методов его решения. В отличие от классических методов, подход операционного исчисления позволяет эффективно рассчитывать любые процессы колебаний механических систем, систем автоматического регулирования, сложных электрических цепей при наличии произвольного напряжения питания.*

С позиций операционного исчисления целесообразно проводить анализ переходного процесса в электроприводе, применяя различные подходы в зависимости от вида корней соответствующего параметрического уравнения. В исследуемом случае переходный процесс в электроприводе происходит при моменте статических сопротивлений рабочей машины, не зависящим от угловой скорости, но линейно изменяющимся во времени.

Цель исследования - анализ переходного процесса в электроприводе с позиций операционного исчисления.

Приведены результаты анализа параметрической модели переходного процесса в электроприводе ленточного транспортера с позиций операционного исчисления. Рассмотрены нулевые начальные условия для соответствующей задачи Коши. В зависимости от типа корней операторного уравнения применены определенные свойства преобразования Лапласа. При этом операцию дифференцирования преобразовано в алгебраическую (умножение на число), а

исходное дифференциальное уравнение - на целое рациональное уравнение второго порядка.

Ключевые слова: ***математическая модель, переходный процесс, момент двигателя, параметры, задача Коши, преобразование Лапласа, операторное уравнение***

RESEARCH OF MATHEMATICAL MODEL OF TRANSITIONAL PROCESS IN ELECTRIC DRIVE BY METHODS OF OPERATIONAL CALCULUS

L. Pantalienko, O. Sinyavsky, D. Zhook

Abstract. *Most often, the model of a process takes the form of a differential equation, so the next problem concerns the methods of its solution. Unlike classical methods, the operational calculus approach allows to effectively calculate any processes of oscillations of mechanical systems, automatic control systems, complex electrical circuits in the presence of arbitrary supply voltage.*

From the standpoint of operational calculus, it is advisable to analyze the transient process in the electric drive, using different approaches depending on the type of roots of the corresponding parametric equation. In the case under study, the transient process in the electric drive occurs at the moment of static resistance of the working machine, which does not depend on the angular velocity, but which changes linearly over time.

The purpose of the study is to analyze the transient process in the electric drive from the standpoint of operational calculus.

The results of the analysis of the parametric model of the transient process in the electric drive of the belt conveyor from the standpoint of operational calculus are presented. The zero initial conditions for the corresponding Cauchy problem are considered. Depending on the type of roots of the operator equation, certain properties of the Laplace transform are applied. In this case, the differentiation operation is transformed into an algebraic one (multiplication by a number), and the original differential equation is transformed into a whole rational equation of the second order.

Key words: ***mathematical model, transient process, motor moment, parameters, Cauchy problem, Laplace transform, operator equation***