УДК 519.6:001.5 DOI 10.31548/energiya2020.03.128

УМОВИ КОРЕКТНОСТІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Д. А. Левкін, кандидат технічних наук, старший викладач

Харківський національний технічний університет

сільського господарства ім. Петра Василенка

E-mail: dimalevkin23@gmail.com

Анотація. *Розглянуті питання математичного моделювання технологічних систем, які містять джерела дії фізичних полів. Вважається, що у разі простої просторової форми досліджуваного об'єкта, крайові задачі будуть коректними. Інтерес являють собою математичні моделі для нелінійних, багатошарових об'єктів під впливом джерел навантаження, для яких, використовуючи традиційну теорію існування та єдиності, неможливо гарантувати коректність крайових задач.*

Автором розглянуті крайові задачі для систем диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь в багатошаровому середовищі, які описують стан досліджуваних систем під дією дискретних джерел навантаження. Коректність таких задач доведена з використанням теорії розподілів над простором узагальнених функцій.

Об'єкт дослідження – крайові задачі для систем диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь в багатошаровому середовищі.

Метою дослідження є побудова коректних крайових задач, які лежать в основі розрахункових математичних моделей процеса дії фізичних полів на багатошарові об'єкти.

Отримані необхідні і достатні умови коректності параболічної крайової задачі у просторі узагальнених функцій. Показано, що її розв'язок нескінченно диференційовано за просторовою змінною. Результати проведених досліджень можуть бути використані при отриманні умов коректності крайової задачі для диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Відмітимо, що, у ряді випадків коректність розрахункових математичних моделей зумовлює коректність прикладних оптимізаційних математичних моделей.

Застосування досліджень автора можливе при доведенні коректності крайових задач для цілої низки технологічних процесів. Універсальність проведених досліджень дозволяє широко застосувати отримані в роботі результати для підвищення якості технологічних процесів.

Ключові слова: ***крайові задачі, коректність, теорія розподілів, узагальнені функції***

Актуальність. Нині, займаючись математичним моделюванням та оптимізацією технологічних процесів, вчені стикаються з труднощами, пов'язаними,

як правило, з мікроскопічними розмірами і багатошаровою структурою досліджуваних об'єктів, що знаходяться під впливом дискретних джерел. У зв'язку з нестандартною геометричною формою досліджуваних об'єктів і характеристиками джерел впливу, однією з особливостей модельованих систем є неможливість побудови коректних крайових задач. На думку вчених, одним з можливих виходів з ситуації, що склалася, є усереднення геометричних параметрів досліджуваних об'єктів і технічних характеристик джерел навантаження. Це призводить до грубих оцінок на технічні параметри джерел фізичних полів і значення функції мети, що дозволяє отримати усереднені значення функції мети і її параметрів. Як результат цього, зменшуються витрати часу і пам'яті при реалізації крайових задач на комп'ютерах і оптимізації функції мети, однак, отримуємо значні витрати досліджуваного матеріалу і енергоресурсів. У той же час, побудувавши і обґрунтувавши коректність крайових задач для багатошарових об'єктів, які знаходяться під впливом дискретних джерел, можливо на етапі математичного моделювання та оптимізації врахувати нелінійну, багатошарову структуру модельованих систем.

У роботі автор пропонує умови коректності розрахункових математичних моделей для багатошарових систем, які містять джерела навантаження. Запропонований підхід заснований на теорії залежних від часу розподілів. Об'єкт дослідження автора – крайові задачі для систем диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь.

Результатом досліджень є те, що для будь-яких однорідних псевдодиференціальних рівнянь існує параболічна крайова задача. Універсальність досліджень автора дозволяє стверджувати про широке їх застосування для підвищення якості таких технологічних процесів, як, наприклад, розтин штучної і натуральної шкіри, лазерного зварювання біоматеріалу та інших процесів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Проведемо аналіз наукових досліджень [1–7] відомих вчених, які в своїх наукових роботах торкаються питань найбільш близьких до тематики досліджень цієї роботи. У фундаментальній роботі

[1] наведено низку досліджень з розрахунку і оптимізації параметрів технічних систем, які містять дискретні джерела фізичних полів. Авторами запропоновані ефективні чисельні методи для забезпечення оптимізації розглянутих систем. Питанням параметризації фізичних полів при проектуванні технічних систем присвячені результати досліджень [2, 3]. В роботі [4] розраховані температури лазерного впливу на ембріон для декількох теплових режимів. В залежності від геометричних характеристик ембріона і структури розташування зародків в роботі [5] побудовані раціональні траєкторії ділення ембріона лазерним відрізком. Питання оптимізації транспортних перевезень в місті розглянуті в роботі [6]. У цій роботі наведено ефективний метод вибору оптимального маршруту транспортних сполучень в міських умовах. У роботі [7] отримані умови коректності двоточкової крайової задачі для диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь.

Мета дослідження – отримати умови побудови коректних математичних моделей технологічних процесів задля розробки теорії побудови програмних, програмно-апаратних, аналогових і гібридних систем моделювання.

Матеріали і методи дослідження. Методи аналізу багатошарових технічних систем, які містять джерела фізичних полів; методи аналізу і синтезу багатокомпонентних середовищ; методи нелінійного математичного програмування; умови коректності крайових задач для диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь.

Результати досліджень та їх обговорення. Розглянемо крайову задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = A_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u(x,t) \quad при \quad t \in \left[t_{k-1};t_k\right],\ x \in R^m; \\ u\left(x,t_k-0\right) = u\left(x,t_k+0\right); \\ \sum\limits_{k=0}^{n} B_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)u\left(x,t_k\right) = \varphi\left(x\right), \end{cases} \tag{1}$$

де $A_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ і $B_k\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ – псевдодиференціальні оператори з символами з простору нескінченно диференційованих функцій степеневого зростання, $k = 1,..,n$;

$u(x,t_k-0)$, $u(x,t_k+0)$ – ліва і права границі функції розв'язків в точці t_k, які належать простору узагальнених функцій при кожному фіксованому t;

$\varphi(x)$ – належить простору узагальнених функцій.

Крайова задача (1) є коректною в просторі узагальнених функцій S, якщо для будь-якої узагальненої функції $\varphi(x)$ існує єдина функція $u(x,t)$, яка задовольняє рівняння з крайової задачі (1) і така, що для будь-якого $t\in[a,b]$, розв'язок $u(x,t)$ належить простору узагальнених функцій, а також при $\varphi_\nu\to 0$ в просторі узагальнених функцій розв'язок $u_\nu(x,t)\to 0$.

Коректність крайової задачі (1) в просторі узагальнених функцій еквівалентна коректності двоякої за Фур'є задачі в тому ж просторі:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(s,t)}{\partial t}=\tilde{A}_k(s)u(s,t) \quad при \quad t\in[0;t_1], \quad s\in R^m; \\ \tilde{u}(s,t_k-0)=u(s,t_k+0); \\ \sum\limits_{k=0}^{n}\tilde{B}_k(s)\tilde{u}(s,t_k)=\tilde{\varphi}(s),\, s\in R^m, \end{cases} \tag{2}$$

де $\tilde{A}_k(s)$, $\tilde{B}_k(s)$ – символи відповідних псевдодиференціальних операторів, $k=1,..,n$.

Будемо шукати розв'язок двоякої задачі (2) у вигляді:

$$\tilde{u}(s,t)=\exp\left\{\int\limits_{t_{k-1}}^{t}\tilde{A}_k(s)dt\right\}\varphi_k(s), \quad при \quad k=1,...,n. \tag{3}$$

Оскільки $\tilde{A}_k(s)$ від t не залежить, тоді:

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t}\tilde{A}_k(s)dt=\tilde{A}_k(s)(t-t_{k-1}), \quad при \quad k=1,...,n \tag{4}$$

значить

$$\tilde{u}(s,t)=\begin{cases} \exp\{t\tilde{A}_1(s)\}\varphi_1(s) \quad при \quad t\in[0;t_1]; \\ \exp\{(t-t_1)\tilde{A}_2(s)\}\varphi_2(s) \quad при \quad t\in[t_1;t_2]; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \exp\{(t-t_{n-1})\tilde{A}_n(s)\}\varphi_n(s) \quad при \quad t\in[t_{n-1};T]. \end{cases} \tag{5}$$

Використовуючи той факт, що

$$\tilde{u}\left(s,t_k-0\right)=\tilde{u}\left(s,t_k+0\right), \tag{6}$$

можемо записати наступну систему рівнянь, з яких знайдемо $\varphi_k\left(s\right)$:

нехай $t=t_1$, тоді

$$\exp\left\{t_1\tilde{A}_1\left(s\right)\right\}\varphi_1\left(s\right)=\varphi_2\left(s\right), \tag{7}$$

нехай $t=t_2$, тоді

$$\exp\left\{\left(t_2-t_1\right)\tilde{A}_2\left(s\right)\right\}\varphi_2\left(s\right)=\varphi_3\left(s\right). \tag{8}$$

І так далі, при $t=t_{n-1}$ з умови неперервності отримали розв'язок:

$$\varphi_n(s)=\exp\left(t_1\tilde{A}_1(s)+(t_2-t_1)\tilde{A}_2(s)+\ldots+(t_{n-1}-t_{n-2})\tilde{A}_{n-1}(s)\right)\varphi_1(s). \tag{9}$$

Таким чином, отримали, що $\varphi_k(s)$ обчислюється так:

$$\varphi_k(s)=\exp\left(t_1\tilde{A}_1(s)+(t_2-t_1)\tilde{A}_2(s)+\ldots+(t_{k-1}-t_{k-2})\tilde{A}_{k-1}(s)\right)\varphi_1(s). \tag{10}$$

Підставивши $\varphi_k(s)$ в умову з крайової задачі (2), отримали такий вираз:

$$\begin{aligned}&\tilde{B}_0\left(s\right)\varphi_1\left(s\right)+\tilde{B}_1\left(s\right)\exp\left\{t_1\tilde{A}_1(s)\right\}\varphi_1\left(s\right)+\ldots+\\&+\tilde{B}_n\left(s\right)\exp\left\{t_1\tilde{A}_1(s)+(t_2-t_1)\tilde{A}_2(s)+\ldots+(T-t_{n-1})\tilde{A}_n(s)\right\}\varphi_1\left(s\right)=\tilde{\varphi}(s).\end{aligned} \tag{11}$$

Позначимо через $\Delta(s)$ вираз:

$$\begin{aligned}&\Delta(s)=\tilde{B}_0\left(s\right)+\tilde{B}_1\left(s\right)\exp\left\{t_1\tilde{A}_1(s)\right\}+\ldots+\\&+\tilde{B}_n\left(s\right)\exp\left\{t_1\tilde{A}_1(s)+(t_2-t_1)\tilde{A}_2(s)+\ldots+(T-t_{n-1})\tilde{A}_n(s)\right\}\neq 0,\end{aligned} \tag{12}$$

Нехай $\Delta(s)\neq 0$, тоді $\varphi_1(s)=\Delta^{-1}(s)\tilde{\varphi}(s)$ або $\tilde{u}\left(s,t\right)=Q\left(s,t\right)\tilde{\varphi}(s)$, де функція $Q(s,t)$:

$$Q(s,t)=\begin{cases}\exp\left\{t\tilde{A}_1(s)\right\}\Delta^{-1}(s) \quad \textit{при} \quad t\in[0;t_1];\\ \exp\left\{\left(t-t_1\right)\tilde{A}_2(s)\right\}\Delta^{-1}(s)\exp\left\{t\tilde{A}_1(s)\right\};\\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\\ \exp\left\{(t-t_{n-1})\tilde{A}_n(s)\right\}\Delta^{-1}(s)\exp\left\{t_1\tilde{A}_1(s)+\ldots+\left(t_{n-1}-t_{n-2}\right)\tilde{A}_{n-1}(s)\right\}.\end{cases} \tag{13}$$

Аби $\tilde{u}(s,t)$ належав простору узагальнених функцій потрібно, щоб функція $Q(s,t)$ належала простору нескінченно-диференційованих функцій степеневого зростання.

Після проведених розрахунків отримали, що однорідна крайова задача (1) коректна в просторі узагальнених функцій, якщо функція $Q(s,t)$ належить простору нескінченно-диференційованих функцій степеневого зростання для будь-якого $t \in [0,T]$.

Скористаємося тим, що для будь-яких нескінченно-диференційованих символів псевдодиференціальних операторів $\tilde{A}_k(s)$ степеневого зростання, існують такі нескінченно-диференційовані символи псевдодиференціальних операторів $\tilde{B}_k(s)$ степеневого зростання, що крайова задача (1) коректна в просторі узагальнених функцій.

Використавши результати роботи [8], отримали: якщо виконана оцінка $\left|Re\,\tilde{A}_k(s)\right| \geq c_k |s|^{h_k} - l_k$, при $k = 1,..,n$ на символи псевдодиференціальних операторів $\tilde{A}_k(s)$ і при деяких довільних c_k, h_k і дійсних l_k, тоді існує параболічна крайова задача (1). Окрім того, для будь-якої функції $\varphi(x) \in L_2$ існує нескінченно диференційований за x розв'язок $u(x,t)$ для будь-якого $t \in (t_{k-1}, t_k)$.

Отримані результати лежать в основі подальших досліджень математичних моделей [9–11].

Висновки і перспективи. Автором детально досліджені крайові задачі для диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь в багатошаровому середовищі. Отримано умови коректності крайової задачі з розривними за t диференціальними операторами. Показано, що розв'язок параболічної крайової задачі нескінченно диференційований за просторовою змінною. Це дозволило стверджувати, що виконання зазначених в даній роботі умов коректності крайових задач дасть можливість забезпечити технологічні процеси з меншими втратами досліджуваного матеріалу і ресурсів джерел фізичних полів.

Список використаних джерел

1. Стоян Ю. Г. Оптимизация технических систем с источниками физических полей / Ю. Г. Стоян, В. П. Путятин. К.: Наук. думка, 1988. С. 44–48.

2. Рвачев В. Л. Алгебро-логические и проекционные методы в задачах теплообмена / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – К.: Наук. думка, 1978. – 140 с.

3. Рвачев, В. Л. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах / В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко. – К.: Наук. думка, 1976. 290 с.

4. Douglas-Hamilton, D. H. Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling / D. H. Douglas-Hamilton, J. Conia. // Journal of Biomedical Optics. 2001. Vol. 6, Issue 2. P. 205.

5. Levkin, A. Economic Security as a Result of Modern Biotechnology Implementation. Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC S&T '2019): 2019 IEEE International Scientific-Practical Conference (Kyiv 8-11 October 2019). / A. Levkin, R. Levkina, A. Petrenko, I. Chaliy. Kyiv, 2019. P. 139–142.

6. Modeling of reliability of logistic systems of urban freight transportation taking into account street congestion / V. Vojtov, O. Kutiya, N. Berezhnaja, M. Karnaukh, O. Bilyaeva. // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2019. Vol. 4, No. 3. P. 15–21.

7. Макаров А. А. Существование корректной двухточечной краевой задачи в слое для систем псевдодифференциальных уравнений [Текст] / А.А. Макаров. // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, №1. С. 144–150.

8. Теоретичні дослідження багатоточкових крайових задач / Д. А. Левкін, О. А. Макаров, О. І. Завгородній, А. В. Левкін. // Вчені записки Таврійського Національного Університету імені В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки. Київ, 2020. Т.31(70), №3., Ч. 1. С. 126–130.

9. Математическое моделирование и оптимизация параметров действия лазерного луча на многослойные биоматериалы / Ю. Е. Мегель, В. П. Путятин, Д. А. Левкин, А. В. Левкин // Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Збірник наукових праць. Серія: Механіко-технологічні системи та комплекси. Х.: НТУ «ХПІ», 2017. № 20(1242). С. 60–64.

10. Левкин А. В. Построение оптимизационной задачи тепловых процессов при лазерном делении эмбриона / А. В. Левкин, Д. А. Левкин. // MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. Мотрол. LUBLIN – RZESZOV, 2013. Vol. 15, No. 7. P. 67–71.

11. Левкин А. В. Технология выбора параметров системы лазерного деления эмбриона крупного рогатого скота / А. В. Левкин, Д. А. Левкин, Я. Н. Котко // Інженерія природокористування. Харків, 2017. № 1(7). С. 40–49.

References

1. Stoyan, Yu. G., Putyatin, V. P. (1988). Optimizaciya tekhnicheskih sistem s istochnikami fizicheskih poley [Optimization of technical systems with sources of physical fields]. Kyiv: Nauk. dumka. 44–48.

2. Rvachev, V. L., Slesarenko, A. P. (1978). Algebro-logicheskie i proektsionnyie metodyi v zadachah teploobmena [Algebraic-logical and projection methods in heat transfer problems]. Kyiv: Nauk. dumka. 140.

3. Rvachev, V. L., Slesarenko, A. P. (1976). Algebra logiki i integralnyie preobrazovaniya v kraevyih zadachah [Algebra of logic and integral transformations in boundary value problems]. Kyiv: Nauk. dumka. 290.

4. Douglas-Hamilton, D. H., Conia, J. (2001).Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling. Journal of Biomedical Optics, 6 (2), 205.

5. Levkin, A., Levkina, R., Petrenko, A., Chaliy, I. (2019). Economic Security as a Result of Modern Biotechnology Implementation. Problems of Infocommunications Science and Technology (PIC S&T ‘2019): 2019 IEEE International Scientific-Practical Conference. October 8-11, 2019, Kyiv. 139–142.

6. Vojtov, V., Kutiya, O., Berezhnaja, N., Karnaukh, M., Bilyaeva, O. (2019). Modeling of reliability of logistic systems of urban freight transportation taking into account street congestion. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 4 (3), 15–21.

7. Makarov, A. A. (1994). Suschestvovanie korrektnoy dvuhtochechnoy kraevoy zadachi v sloe dlya sistem psevdodifferentsialnyih uravneniy [Existence of a well-posed two-point boundary value problem in the layer for systems of pseudodifferential equations]. Differentsialnyie uravneniya, 30 (1), 144–150.

8. Levkin, D. A., Makarov, O. A., Zavgorodniy, A. I., Levkin, A. V. (2020). Teoretychni doslidzhennia bahatotochkovykh kraiovykh zadach [The theoretical research of multi-point boundary tasks]. Vcheni zapysky Tavriiskoho Natsionalnoho Universytetu imeni V.I. Vernadskoho. Seriia: Tekhnichni nauky. Kyiv, 31(70), 3 (1), 126–130.

9. Megel', Yu. E., Putyatin, V. P., Levkin, D. A., Levkin, A. V. Matematycheskoe modelyrovanye y optymyzatsyia parametrov deistvyia lazernoho lucha na mnogosloynyie biomaterialyi [Mathematical modeling and optimization of parameters of action of a laser beam on multilayered biomaterials]. Visnyk Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu «KhPI». Zbirnyk naukovykh prats. Seriia: Mekhaniko-tekhnolohichni systemy ta kompleksy. Kh.: NTU «KhPI», 2017. No20 (1242). 60–64.

10. Levkin, A. V., Levkin, D. A. (2017). Postroyeniye optimizatsionnoy zadachi teplovykh protsessov pri lazernom delenii embriona [Constructing ane optimization problem of thermal processes at laser distribution embryos in animal]. MOTROL. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. Motrol – LUBLIN – RZESZOV, 15 (7), 67–71.

11. Levkin, A. V., Levkin, D. A., Kotko, Y. N. (2017). Tehnologiya vyibora parametrov sistemyi lazernogo deleniya embriona krupnogo rogatogo skota [Technology of Choice of System Parameters of Bovine Livestock Embryo Laser Division]. Inzheneriia pryrodokorystuvannia, 1(7), 40–49.

УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Д. А. Левкин

Аннотация. *Рассмотрены вопросы математического моделирования технологических систем, содержащих источники воздействия физических полей. Считается, что в случае простой пространственной формы исследуемого объекта, краевые задачи будут корректными. Интерес представляют собой математические модели для нелинейных, многослойных объектов под воздействием источников нагружения, для которых, используя традиционную теорию существования и единственности, невозможно гарантировать корректность краевых задач.*

Автором рассмотрены краевые задачи для систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в многослойной среде, описывающих состояние исследуемых систем под воздействием дискретных источников нагружения. Корректность таких задач доказана с использованием теории распределений над пространством обобщенных функций зависящих от времени. Объект исследования – краевые задачи для систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений в многослойной среде.

Цель исследования – построение корректных краевых задач, лежащих в основе расчетных математических моделей процесса воздействия физических полей на многослойные объекты.

В статье получены необходимые и достаточные условия корректности параболической краевой задачи в пространстве обобщенных функций. Показано, что ее решение бесконечно дифференцируемо по пространственной переменной. Результаты проведенных исследований могут быть использованы при получении условий корректности краевой задачи для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Отметим, что, в ряде случаев, корректность расчетных математических моделей влечет корректность прикладных оптимизационных математических моделей.

Применение исследований автора возможно при доказательстве корректности краевых задач для целого ряда технологических процессов. Универсальность проведенных исследований позволяет широко применить полученные в работе результаты для повышения качества технологических процессов.

Ключовые слова: ***краевые задачи, корректность, теория распределений, обобщенные функции***

CORRECTNESS CONDITIONS FOR BOUNDARY VALUE PROBLEMS

D. Levkin

Abstract. *The article deals with the issues of mathematical modeling of technological systems that contain physical fields' sources. It is believed that in the case of a simple spatial form of the object under study, the boundary value problems will be correct. The interest lies in mathematical models for nonlinear, multilayer objects under the influence of load sources, for which, using the traditional theory of existence and unity, it is impossible to guarantee the correctness of boundary value problems.*

The author considers boundary value problems for systems of differential and pseudo differential equations in a multilayer medium which describe the state of the studied systems under the action of discrete load sources. The correctness of such problems is proven using the theory of distributions over the space of generalized functions. The object of research is boundary value problems for systems of differential and pseudo differential equations in a multilayer medium. The aim of the research is to build correct boundary value problems, which underlie the calculated mathematical models of the process of action of physical fields on multilayer objects.

The necessary and sufficient conditions for the correctness of the parabolic boundary value problem in the space of generalized functions are obtained in the article. It is shown that its solution is infinitely differentiated by a spatial variable. The results of the research can be used to obtain the conditions for the correctness of the boundary value problem for differential equations with variable coefficients. Note that, in some cases, the correctness of the calculated mathematical models determines the correctness of applied optimization mathematical models.

The application of the author's research is possible when proving the correctness of boundary value problems for a number of technological processes. The universality of the research allows to widely usage of the results obtained in this work to improve the quality of technological processes.

Key words: ***boundary value problems, correctness, distribution theory, generalized functions***