"Енергетика і автоматика", №2, 2021 р.

UDC 514.18 DOI 10.31548/energiya2021.02.146

CONSTRUCTION OF A FAMILY OF FLAT CURVES ACCORDING TO THE EQUATIONS OF ISOMETRIC GRIDS

A. V. Nesvidomin, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor

O. V. Nesvidomina, Candidate of Technical Sciences

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

E-mail: a.nesvidomin@gmail.com

Abstract. *The article reveals an analytical description of the formation of families of orthogonal flat curved lines in the implicit form based on the analysis of the parametric equation of a flat isometric grid constructed by separating the real and imaginary parts of the function of a complex variable. This problem is due to the fact that flat isometric grids, as two families of orthogonal coordinate lines with square cells, are used in conformal mappings, for example, when drawing images on curved surfaces with the least distortion. At the same time, families of flat parallel lines are widely used in geometric modeling of heat transfer, electric fields, fluid flow, etc. There is a connection between these geometric images, which is explained by specific examples. Analytical calculations of deriving the parametric equation of an isometric grid are quite time-consuming, so they are performed in the environment of symbolic algebra Maple. For this purpose, the corresponding software of the interactive model of derivation of parametric equations of isometric grids for any initial function of a complex variable with the subsequent separation of its real and imaginary parts was created. It was found that the values of the abscissa and ordinates of the parametric equation of a flat isometric grid can be represented as explicit surface equations. For integer values of the power of the exponential function of the complex variable, the values of the abscissa and the ordinate will be represented by algebraic surfaces in the explicit form. The projections of the cross sections of the abscissa and ordinate surfaces by horizontal cutting planes on the horizontal plane form two families of curved lines, the equations of which can be obtained only implicitly. By the example of the quadratic function of a complex variable, it is proved that these families of lines are mutually perpendicular. The practical application of building a family of lines for geometric modeling of fluid flow lines that flow around the barrier in the form of a semicircle is shown.*

Key words: *isometric grids, functions of a complex variable, families of orthogonal lines, geometric flow modeling*

Topicality. Geometric modeling of processes in heat engineering, hydrodynamics and other technical fields involves the construction of sets of parallel lines. One possible way is to use the parametric equations of flat isometric grids.

Analysis of recent research and publications. The formation and use of flat isometric grids by functions of a complex variable are given in [1, 2]. In [3], a method for constructing families of parallel lines with respect to the visualization of solutions of problems of modeling heterogeneous processes is revealed.

The purpose of research is to reveal a method of forming a family of parallel curves in a plane as a set of combined projections of surface cross-section curves by horizontal planes based on the analysis of the parametric equation of a flat isometric grid.

Research results and their discussion. Suppose we have an exponential function $f(z)$ of the complex variable z:

$$f = z^k, \tag{1}$$

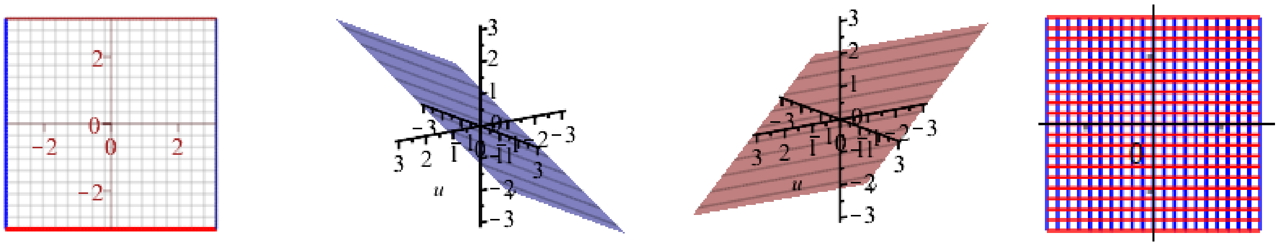
where $z = u + I\,v$ – complex number, $I = \sqrt{-1}$ – imaginary unit.

By separating the real $Re(f(z))$ and the imaginary $Im(f(z))$ parts of the function $f(z)$ we obtain a flat isometric grid of the form:

$$\boldsymbol{R}(u, v) = [Re(f(z)), Im(f(z)), 0]. \tag{2}$$

For the value of $k = 1$ of the function $f(z)$ of the complex variable z we obtain the simplest Cartesian grid (Fig. 1, a):

$$\boldsymbol{R}(u, v) = [u, v, 0]. \tag{3}$$



a) b) c) d)

Fig.1. Construction of the simplest family of lines on a plane

The *x* coordinate of equation (3) represents the plane $\boldsymbol{Z}_x(u, v) = u$ with the axis Oy with an angle of inclination of 45 ° to the plane Oxy (Fig. 1, b), and the coordinate *y* - the plane $\boldsymbol{Z}_y(u, v) = v$ with the axis Ox (Fig. 1, c). The horizontal sections of these planes $\boldsymbol{Z}_x(u, v) = z_i$ and $\boldsymbol{Z}_y(u, v) = z_i$ form two families of lines on the Oxy plane (Fig. 1, c). In contrast to the parametric equation of the plane grid (2), in this case we have implicit equations of curves:

$$\boldsymbol{Z}_x(u, v) - z_i = 0, \boldsymbol{Z}_y(u, v) - z_i = 0, \tag{4}$$

where $z_i = z_o..z_n$ – position of the cutting horizontal plane.

1. Surfaces and families of flat lines depending on the indicator k

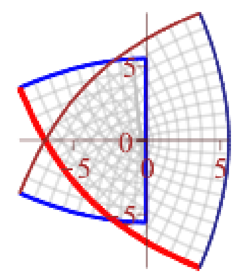
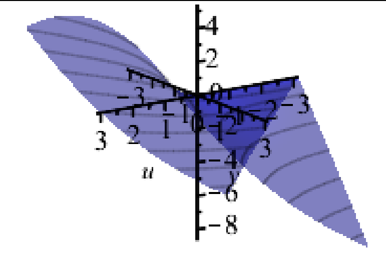
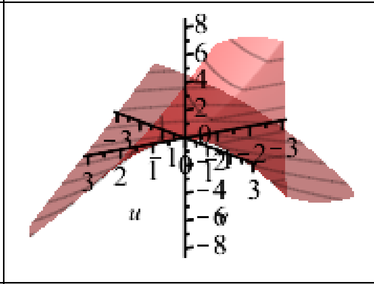
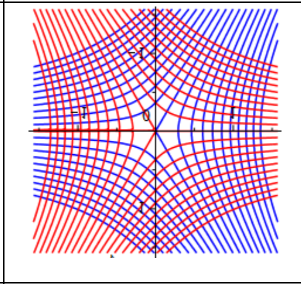
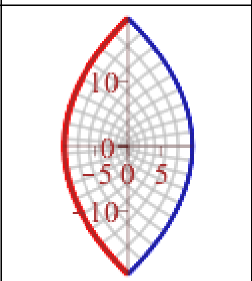
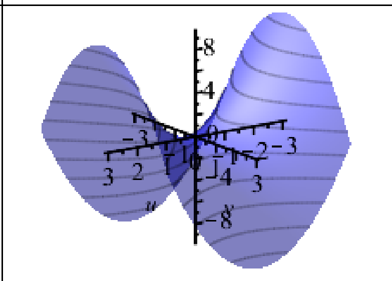
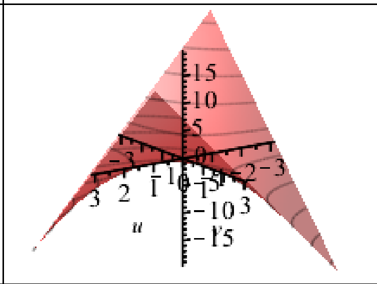
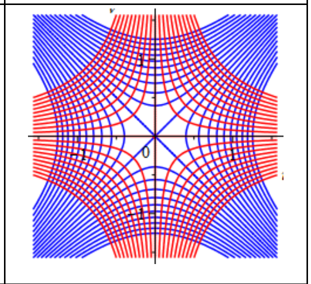
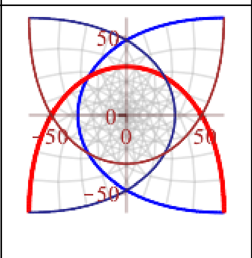
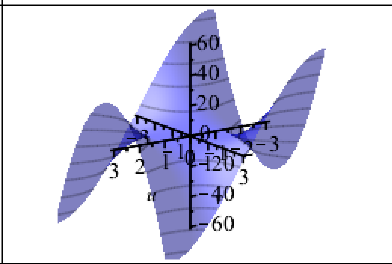
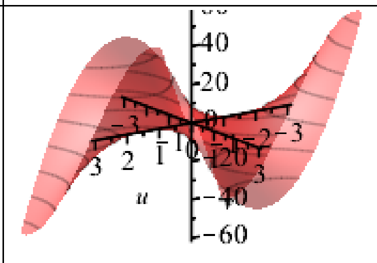
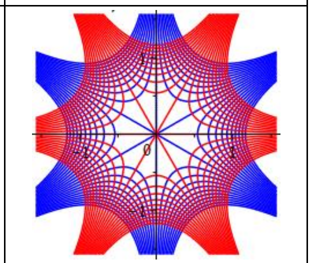
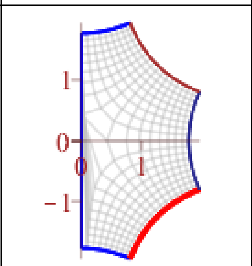
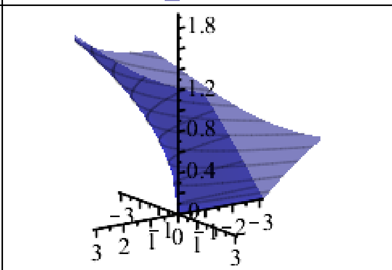
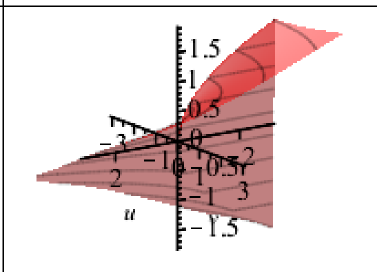
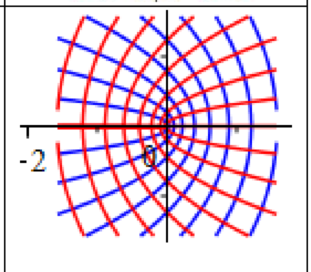
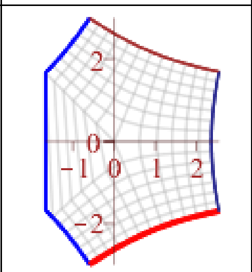
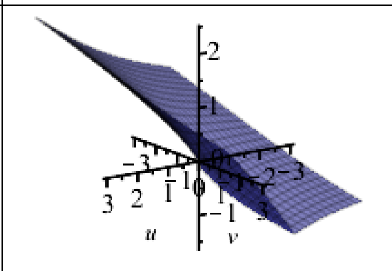
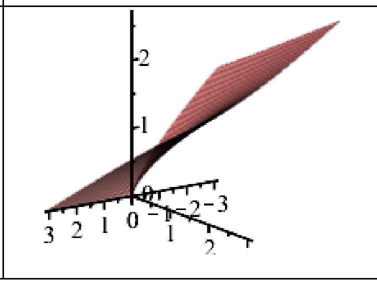
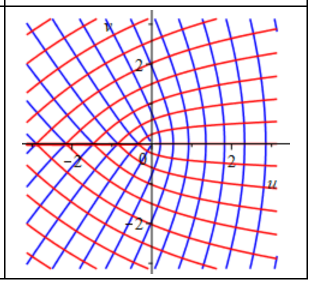
k	$\boldsymbol{R}(u,v)$	z_x	z_y	Line families
$\frac{3}{2}$				
2				
3				
$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{3}$				

Table 1 constructs isometric grids $\boldsymbol{R}$ *(u, v)*, the surface $\boldsymbol{Z}_x(u,v)$, $\boldsymbol{Z}_y(u,v)$ and two families of lines (4) for the index $k=\frac{3}{2},2,\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.

For the value of the index $k=2$ of the function of the complex variable $f(z)=z^2$ we obtain a quadratic flat isometric grid (line 2 of table 1):

$$\boldsymbol{R}(u,v)=\left[u^2-v^2,2uv,0\right], \tag{5}$$

the coordinates *x* and *y* are surfaces of hyperbolic paraboloids:

$$\boldsymbol{Z}_x(u,v) = u^2 - v^2, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{Z}_y(u,v) = 2uv. \tag{7}$$

The cross sections of the plane z_i of the surface (6) are hyperbolas with asymptotes of the bisectors of the coordinate system *Oxy*, and the surfaces (7) are hyperbolas with asymptotes of the axes of the *Oxy* coordinate axes, respectively:

$$u^2 - v^2 - z_i = 0, \tag{8}$$

$$2uv - z_i = 0. \tag{9}$$

The partial derivatives of hyperbola (8) and (9) are equal to:

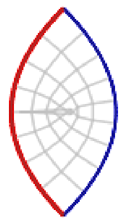
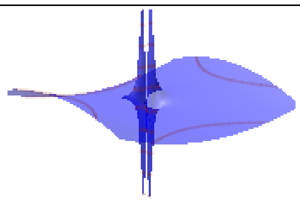
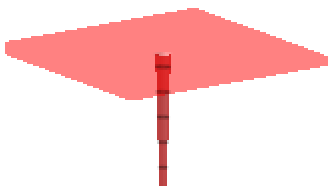
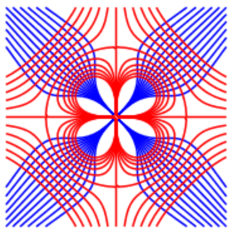
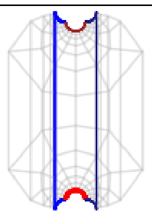
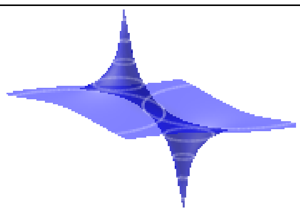
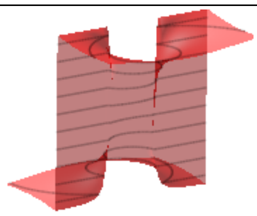
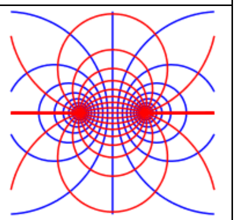
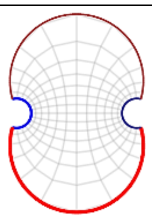
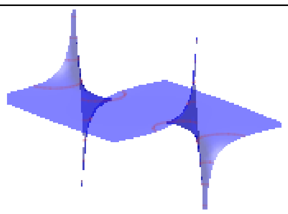
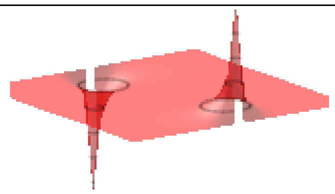
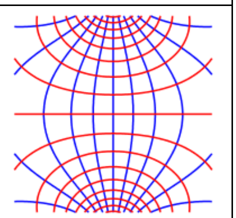
$$\frac{\partial}{\partial u}(u^2 - v^2 - z_i) = 2u, \quad \frac{\partial}{\partial v}(u^2 - v^2 - z_i) = -2v, \tag{10}$$

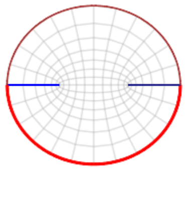
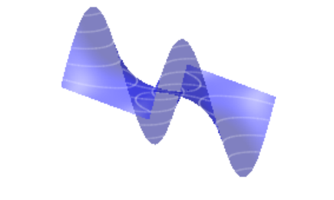
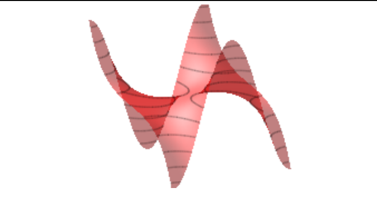
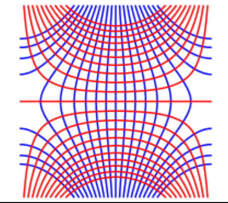
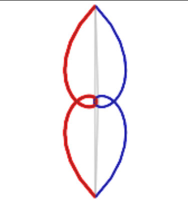
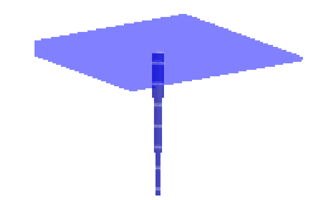
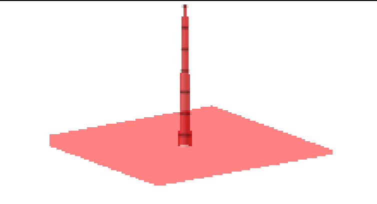
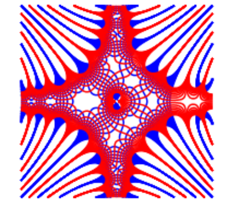
$$\frac{\partial}{\partial u}(2uv - z_i) = 2v, \quad \frac{\partial}{\partial v}(2uv - z_i) = 2u, \tag{11}$$

confirming the mutual orthogonality of the family (8) and (9) hyperbola.

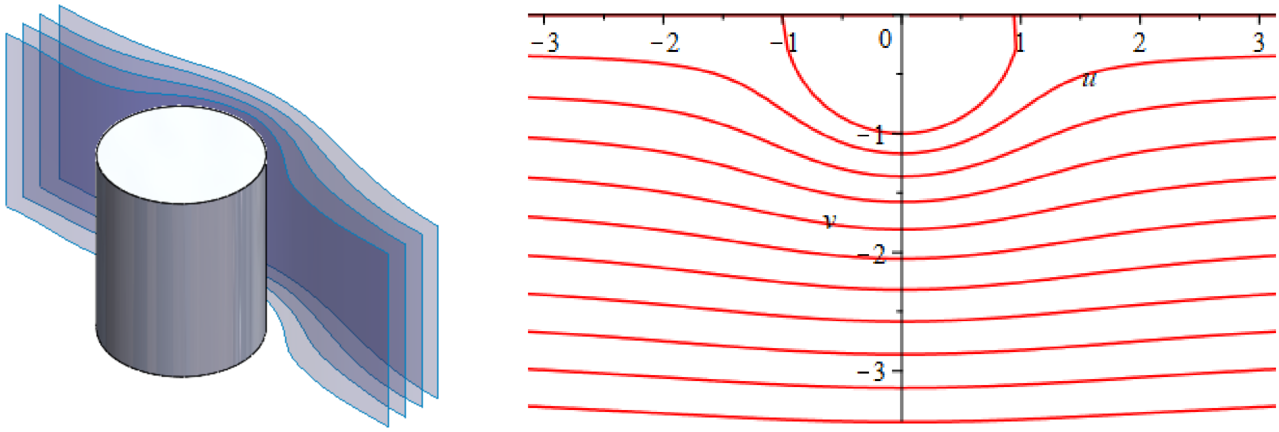
Table 2 constructs flat isometric grids ***R*** *(u, v)*, the surface $\boldsymbol{Z}_x(u,v)$ and $\boldsymbol{Z}_y(u,v)$ depending on the function *f (z)* of the complex variable *z*.

2. Surfaces and families of flat lines depending on the function *f (z)*

$f(z)$	$\boldsymbol{R}(u,v)$	$\boldsymbol{Z}_x(u,v)$	$\boldsymbol{Z}_y(u,v)$	Line families
$z^2 + \frac{1}{z^2}$				
$\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$				
$\frac{e^z - 1}{e^z + 1}$				

$sin(z)$				
$sin(z^2)-\frac{e^z}{z}$				

One of the applications of line families is the modeling of fluid flow lines that move around certain obstacles, in particular, in the form of a cylinder (Fig. 2, a).



a *b*

Fig.2 Modeling of fluid flow lines

For the function of the complex variable $f(z) = z + \frac{1}{z}$ we obtain a flat isometric grid with the parametric equation:

$$R(u, v) = \left[\frac{u(u^2+v^2+1)}{u^2+v^2}, \frac{u(u^2+v^2+1)}{u^2+v^2}, 0\right]. \qquad (12)$$

The cross sections of the surface by the horizontal planes z_i allow to obtain implicit equations of the family of lines that flow around the semicircle:

$$\frac{u(u^2+v^2+1)}{u^2+v^2} - z_i = 0, \qquad (13)$$

where $z_i = -9\pi..0$ – line parameter.

Conclusions. The mutual perpendicularity of two families of lines obtained in cross section by horizontal planes of surfaces expressing the coordinates of the abscissa and the ordinate of the parametric equation of a flat isometric grid is proved. An implicit equation of the family of curved lines flowing around the semicircle is derive

List of references

1. Несвідоміна О. В. Побудова плоских ізометричних сіток за наперед заданими плоскими кривими. Вісник Херсонського національного технічного університету. 2017. Вип. 3(62). Том 2. С. 298-302.

2. Пилипака С. Ф., Кремець Т. С., Несвідоміна О. В. Конформне відображення растрових написів на плоскі криволінійні області. Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць МДПУ ім. Б. Хмельницького. Мелітополь: МДПУ, 2018. Вип. 13. С. 124–130.

3. Шоман О. В., Даниленко В. Я. Розв’язання задач формоутворення двовимірних геометричних множин у тривимірному просторі. Сучасні проблеми моделювання. Мелітополь, 2014. Вип. 3. С. 147-152.

References

1. Nesvidomina, O. V. (2017). Pobudova ploskykh izometrychnykh sitok za napered zadanymy ploskymy kryvymy. [Construction of flat isometric grids according to predefined flat curves]. Visnyk Khersonskoho natsionalnoho tekhnichnoho universytetu, 3(62), Vol. 2, 298-302.
2. Pylypaka, S. F., Kremets, T. S., Nesvidomina, O. V. (2018). Konformne vidobrazhennia rastrovykh napysiv na ploski kryvoliniini oblasti [Conformal mapping of raster inscriptions on flat curved areas]. Suchasni problemy modeliuvannia: zb. nauk. prats MDPU im. B. Khmelnytskoho. Melitopol: MDPU, 13, 124–130.
3. Shoman, O. V., Danylenko, V. Ya. (2014). Rozv’iazannia zadach formoutvorennia dvovymirnykh heometrychnykh mnozhyn u tryvymirnomu prostori [Solving problems of forming two-dimensional geometric sets in three-dimensional space]. Suchasni problemy modeliuvannia. Melitopol, 3, 147-152.

ПОБУДОВА СІМ'Ї ПЛОСКИХ КРИВИХ ЗА ДОПОМОГОЮ РІВНЯННЯ ІЗОМЕТРИЧНОЇ СІТКИ

А. В. Несвідомін, О. В. Несвідоміна

Анотація. *У статті розкрито аналітичний опис формування сімейства ортогональних плоских кривих ліній у неявному вигляді на основі аналізу параметричного рівняння плоскої ізометричної сітки, побудованої відділенням дійсної та уявної частин функції комплексної змінної. Така постановка задач пов'язана з тим, що плоскі ізометричні сітки, як дві сім'ї ортогональних координатних ліній з квадратними осередками, використовуються в конформних відображення, наприклад, при нанесенні зображень на криволінійні поверхні з найменшими спотвореннями. У той же час, сім'ї плоских паралельних ліній широко застосовують в геометричному моделюванні теплопереносу, електричних полів, течії рідини тощо. Між цими геометричними образами є певний зв'язок, пояснення якого показано на конкретних прикладах. Аналітичні викладки виведення параметричного рівняння ізометричної сітки є досить трудомісткими, тому їх виконання здійснюється в середовищі символьної алгебри Maple. З цією метою було створено відповідне програмне забезпечення інтерактивної моделі виведення параметричних рівнянь ізометричних сіток для будь-якої вихідної функції комплексної змінної з наступним відділенням дійсної та уявної її частин. Було* *встановлено, що значення абсцис і ординат параметричного рівняння плоскої ізометричної сітки можна представити у вигляді явних рівнянь поверхонь. Для цілих ступенів показникової функції комплексної змінної залежності величин абсцис і ординат будуть представлятися алгебраїчними поверхнями в явному вигляді рівнянь. Проекції перетинів поверхонь абсцис і ординат горизонтальними січними площинами на горизонтальну площину формують дві сім'ї кривих ліній, рівняння яких можна отримати тільки в неявному вигляді. На прикладі квадратичної функції комплексної змінної доведено, що ці сім'ї ліній є взаємно ортогональними. Залежно від складності функції комплексної змінної, отримані сім'ї плоских ліній можуть мати різні форми. Показано практичне застосування побудови сім'ї ліній для геометричного моделювання ліній потоку рідини, які обтікають перешкоду у вигляді півкола.*

Ключові слова: ***ізометричні сітки, функції комплексної змінної, сім'ї ортогональних ліній, геометричне моделювання***

ПОСТРОЕНИЕ СЕМЬИ ПЛОСКИХ КРИВЫХ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЯ ИЗОМЕТРИЧЕСКОЙ СЕТКИ

А. В. Несвидомин, А. В. Несвидомина

Аннотация. *В статье раскрыто аналитическое описание формирования семей ортогональных плоских кривых линий в неявном виде на основе анализа параметрического уравнения плоской изометрической сетки, построенной отделением действительной и мнимой частей функции комплексной переменной. Такая постановка задач связана с тем, что плоские изометрические сетки, как две семьи ортогональных координатных линий с квадратными ячейками, используются в конформных отображения, например, при нанесении изображений на криволинейные поверхности с наименьшими искажениями. В то же время, семьи плоских параллельных линий широко применяют в геометрическом моделировании теплопереноса, электрических полей, течения жидкости и т. д. Между этими геометрическими образами есть определенная связь, объяснение которого показано на конкретных примерах. Аналитические выкладки вывода параметрического уравнения изометрической сетки являются достаточно трудоемкими, поэтому их выполнение осуществляется в среде символьной алгебры Maple. С этой целью было создано соответствующее программное обеспечение интерактивной модели вывода параметрических уравнений изометрических сеток для любой исходной функции комплексной переменной с последующим отделением действительной и мнимой ее частей. Было обнаружено, что значение абсцисс и ординат параметрического уравнения плоской изометрической сетки можно представить в виде явных уравнений поверхностей. Для целых степеней показательной функции комплексного переменного зависимости величин абсцисс и ординат будут представляться алгебраическими поверхностями в явном виде уравнений. Проекции сечений поверхностей абсцисс и ординат горизонтальными секущими плоскостями на горизонтальную плоскость формируют две семьи кривых линий, уравнения которых можно получить только в неявном виде. На примере квадратичной функции комплексного переменного доказано, что эти семьи линий является* *взаимно ортогональными. В зависимости от сложности функции комплексной переменной, полученные семьи плоских линий могут иметь различные формы. Показано практическое применение построения семьи линий для геометрического моделирования линий потока жидкости, которые обтекают препятствие в виде полукруга.*

Ключевые слова: ***изометрические сетки, функции комплексной переменной, семьи ортогональных линий, геометрическое моделирование***

CONSTRUCTION OF A FAMILY OF FLAT CURVES ACCORDING TO THE EQUATIONS OF ISOMETRIC GRIDS

V. Nesvidomin, S. Pylypaka, A. Nesvidomina

The article reveals an analytical description of the formation of families of orthogonal flat curved lines in the implicit form based on the analysis of the parametric equation of a flat isometric grid constructed by separating the real and imaginary parts of the function of a complex variable. This formulation is due to the fact that flat isometric grids, as two families of orthogonal coordinate lines with square cells, are used in conformal mappings, for example, when applying images to curved surfaces with the least distortion. At the same time, families of flat parallel lines are widely used in geometric modeling of heat transfer, electric fields, fluid flow, etc. There is a connection between these geometric images, which is explained by specific examples. Analytical calculations of deriving the parametric equation of an isometric grid are quite time-consuming, so their implementation is carried out in the environment of symbolic algebra Maple. For this purpose, the corresponding software of the interactive model of the derivation of parametric equations of isometric grids for any initial function of a complex variable with the subsequent separation of its real and imaginary parts was created. It was found that the values of the abscissa and ordinates of the parametric equation of a flat isometric grid can be represented as explicit surface equations. For the exponential function of the complex variable, the abscissa and ordinate values will be represented by algebraic surfaces explicitly. The projections of the sections of the abscissa and ordinate surfaces by horizontal cutting planes on the horizontal plane form two families of curved lines, the equations of which can be obtained only implicitly. By the example of the quadratic function of a complex variable, it is proved that these families of lines are mutually perpendicular. Depending on the complexity of the function of the variable, families of lines can have different shapes. The practical application of building a family of lines for geometric modeling of fluid flow lines that flow around the barrier in the form of a semicircle is shown.

Keywords*: isometric grids, functions of a complex variable, families of orthogonal lines, geometric flow modeling.*