

**РЕАЛІЗАЦІЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ В УМОВАХ
НЕВИЗНАЧЕНОСТІ І МОЖЛИВИХ РИЗИКІВ**

А. Г. Кравцов, кандидат технічних наук, доцент

Д. А. Левкін, кандидат технічних наук, доцент

Державний біотехнологічний університет

О. А. Макаров, кандидат фізико-математичних наук, доцент

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

E-mail: dimalevkin23@gmail.com

Анотація. У статті наведені теоретико-методологічні засади для прогнозування і математичного моделювання виникнення можливих ризиків в технологічних і біотехнологічних системах. Авторами детально досліджений можливий підхід до здійснення розрахунку функції мети і її параметрів. Значну увагу приділено обґрунтуванню коректності крайових задач і задач Коші.

У механіці, техніці, біології для моделювання фізичних процесів застосовують задачі Коші і крайові задачі диференціальних рівнянь. Важливо, щоб диференціальні рівняння мали єдиний фізично обґрунтований розв'язок. Авторами цієї статті досліджені специфічні особливості крайових задач і задач Коші з крайовими умовами в двоточковому середовищі, визначені умови коректності таких задач в просторах функцій степеневого зростання. Для доказу коректності крайових задач використали теорію псевдодиференціальних операторів у просторі узагальнених функцій. Застосування отриманих результатів дасть можливість гарантувати коректність математичних моделей побудованих в умовах невизначеності і можливих ризиків.

Як приклад розрахункової математичної моделі, яка описує стан досліджуваного об'єкта нестандартної форми, автори розглянули крайову задачу системи диференціальних рівнянь теплопровідності для ембріона під дією лазерного променя. Для такої крайової задачі неможливо гарантувати існування і єдиність розв'язку системи диференціальних рівнянь. Аби бути впевненими в наявності єдиного розв'язку необхідно або не враховувати тришарову структуру мікробіологічного об'єкта, або визначити умови коректності крайової задачі. Застосувавши отримані авторами результати, доведена коректність крайової задачі систем диференціальних рівнянь теплопровідності для ембріона з урахуванням тришарової будови мікробіологічного об'єкта. Це дає можливість підвищити точність і швидкість її реалізації на комп'ютері.

Ключові слова: *прогнозування, ризик, коректність, крайові задачі, умови невизначеності*

Актуальність. Для підвищення точності і швидкості реалізації розрахункових і прикладних оптимізаційних математичних моделей на комп'ютерах потрібно гарантувати коректність крайових задач. Питання про виконання умов коректності виникає в зв'язку з тим, що досить часто через багаточарову, нелінійну структуру досліджуваного об'єкта і нелінійні обмеження на технічні параметри джерел впливу неможливо гарантувати існування і єдиність розв'язку крайової задачі або задачі Коші. Необхідно, щоб отримана задача Коші або крайова задача була коректна, тобто існував єдиний розв'язок, який неперервно буде залежить від початкових або крайових умов. Однак, як відомо, такі задачі не завжди коректні в просторах гладких функцій степеневого зростання чи спадання. Для доказу коректності крайової задачі або задачі Коші автори пропонують скористатися методами, заснованими на теорії псевдодиференціальних і диференціальних рівнянь.

У статті отримані умови коректності двоточної крайової задачі і задачі Коші в просторі гладких функцій степеневого зростання чи спадання. Після вдосконалення результати статті можна застосувати для доказу коректності крайових задач і задач Коші з багатоточковими умовами. Результати досліджень широко застосовуються для розв'язання різних прикладних задач. Як приклад, авторами показано, що коректна крайова задача систем диференціальних рівнянь теплопровідності, яка описує стан ембріона під дією джерел лазерного випромінювання.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Деякі питання математичного моделювання для прогнозування можливих ризиків в умовах ринкової економіки розглянуті в роботах [1–9]. Роботи [1–3] містять фундаментальні дослідження стосовно до реалізації розрахункових і прикладних оптимізаційних математичних моделей для цілої низки технічних систем. У публікаціях [2, 3] наведені умови коректності нелокальних крайових задач у багаточаровому середовищі. Питання оптимізації ризиків при управлінні технологічними інноваціями в умовах ринкової економіки розглянуті в публікаціях [4, 5]. На основі отриманої математичної моделі підвищена ефективність управління транспортним підприємством в публікації [6]. Важливість результатів публікації [6] для досліджень цієї статті полягає в

застосуванні методів математичного моделювання для розв'язку прикладних задач, які виникають в інших наукових областях. У публікаціях [7, 8] здійснені розрахунок і оптимізація біотехнологічних систем без врахування багат шарової структури досліджуваного об'єкта. Питання виживання ембріону під час кріоконсервування в рідкому азоті досліджені в публікації [9].

У статті отримані умови коректності задач Коші і крайових задач з двоточковими крайовими умовами. Результати статті можна застосувати для здійснення математичного моделювання технологічних процесів в умовах невизначеності і можливих ризиків.

Мета дослідження – постановка коректних крайових задач, які описують стан модельованих систем в умовах невизначеності, задля прогнозування і контролю можливих ризиків.

Матеріали і методи дослідження. У дослідженнях використовувалися крайові задачі і задачі Коші основних диференціальних рівнянь математичної фізики та умови їх коректності для побудови математичної моделі в умовах невизначеності; методи математичного моделювання технологічних і біотехнологічних процесів для реалізації розрахункових математичних моделей.

Результати досліджень та їх обговорення. Як відомо [2], задача Коші не завжди коректна в просторі гладких функцій степеневого зростання чи спадання. Необхідною і достатньою умовою коректності диференціального рівняння в частинних похідних з постійними коефіцієнтами є умова Петровського, тобто необхідно щоб дійсні частини характеристичних коренів даного рівняння були обмежені зверху. Так, у хвильовому рівнянні:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a \Delta u(x,t) + f(x,t), \quad (1)$$

де $t \in [0, T]$, $x \in R^n$,

характеристичні корені $\lambda_j(s) = \pm \sqrt{-a|s|^2}$, $j=1,2$ за $a > 0$ будуть уявними і задовольнятимуть умову Петровського, а за $a < 0$ будуть дійсними необмеженими ні

зверху ні знизу, а, отже, умова Петровського не виконана. Будемо розглядати крайові задачі такого виду:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{i\partial x}\right)u(x,t) = f(x,t), \quad (2)$$

$$\begin{cases} \alpha u(x,0) + \beta u(x,T) = \varphi(x), \\ \alpha \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} + \beta \frac{\partial u(x,T)}{\partial t} = \phi(x), \end{cases} \quad (3)$$

де α, β – дійсні числа.

Має місце такий результат.

Якщо $\lambda_j(s)$ – дійсні корені рівняння $\lambda^2 + P(s)\lambda + Q(s) = 0$ за будь-яких $j = 1, 2$ і $s \in R^n$, і α, β додатні, тоді дана крайова задача буде коректною в просторі диференційованих функцій степеневого зростання чи спадання.

Так, в розглянутому раніше прикладі при $a < 0$ характеристичні корені дійсні і, отже, крайова задача при додатних α, β є коректною в зазначених просторах. При $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ фізичний зміст крайових умов полягає в тому, що задані середні значення функції в початковий і кінцевий моменти часу.

Для окремого випадку однієї просторової змінної має місце результат:

Для будь-якого рівняння (2) при $x \in R$ існують крайові умови (3), за яких дана крайова задача коректна в зазначених вище просторах. Як бачимо, рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + Ku(x,t) = f(x,t), \quad (4)$$

коректне при крайових умовах (3) з α, β додатними.

Крім двоточкових умов досліджуються також багатоточкові крайові умови [10], при чому рівняння розглядаються вже в багатошаровому середовищі і ці задачі також є коректними за певних умов. Як більш загальний випадок, коректна крайова задача для диференціальних і псевдодиференціальних рівнянь в багатошаровому середовищі.

Як приклад, коректна крайова задача системи диференціальних рівнянь теплопровідності для ембріона, який піддається лазерному впливу:

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r_1} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + q_1 = 0; \\ \rho_2 c_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} - \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r_2} \frac{\partial T_2}{\partial r} \right) + q_2 = 0; \\ \rho_3 c_3 \frac{\partial T_3}{\partial t} - \lambda_3 \left(\frac{\partial^2 T_3}{\partial r^2} + \frac{2}{r_3} \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) + q_3 = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Граничні умови Діріхле:

$$\begin{cases} T(r_0, t_0) = T_0; \\ T(r_n, t_n) = T_n. \end{cases} \quad (6)$$

Граничні умови теплового обміну:

$$\left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} - A(T_1 - T_{env}) \right) \Big|_{r=0} = 0. \quad (7)$$

Рівності розділу середовищ:

$$\begin{cases} T_1(r_1, t_1) = T_2(r_2, t_2), & -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}; \\ T_2(r_2, t_2) = T_3(r_3, t_3), & -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = -\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r}. \end{cases} \quad (8)$$

Рівності неперервності температурних полів:

$$\begin{cases} T(r_1; t_1 - 0) = T(r_1; t_1 + 0); \\ T(r_2; t_2 - 0) = T(r_2; t_2 + 0); \\ T(r_3; t_3 - 0) = T(r_3; t_3 + 0). \end{cases} \quad (9)$$

Застосування методів математичного моделювання для розв'язання інших прикладних задач розглядалося раніше в публікаціях [11, 12]. У них відмічені цікаві підходи до оптимізації деяких технологічних і транспортних систем.

Висновки і перспективи. У статті розглянуті крайові задачі і задачі Коші з двоточковими крайовими умовами, які виникають при моделюванні низки технологічних і біотехнологічних систем. Визначені умови коректності таких задач в просторі гладких функцій степеневого зростання чи спадання. Результати

досліджень можна застосувати для доказу адекватності розрахункових і прикладних оптимізаційних математичних моделей в умовах невизначеності і можливих ризиків, які виникають при моделюванні фізичних процесів в різних наукових областях.

Список використаних джерел

1. Стоян Ю. Г., Путятин В. П. Оптимизация технических систем с источниками физических полей. К.: Наук. думка, 1988. С. 44–48.
2. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. К.: Наук. думка, 1958. 276 с.
3. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кмить І. Я, Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними К.: Наукова думка, 2002. 416 с.
4. Babenko V., Nazarenko O., Nazarenko I., Mandych O., Krutko M. Aspects of program control over technological innovations with consideration of risks Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2018. Vol. 3, No. 4(93). P. 6–14. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.133603
5. Levkina R. V., Kravchuk I. I., Sakhno I. V., Kramarenko K. M., Shevchenko A. A. The economic-mathematical model of risk analysis in agriculture in conditions of uncertainty. Financial and credit activity: problems of theory and practice. 2019. Vol. 3, No. 30. P. 248–255.
6. Volkov V., Taran I., Volkova T., Pavlenko O., Berezhnaja N. Determining the efficient management system for a specialized transport enterprise. Scientific Bulletin of National Mining University. 2020. Vol. 4. P. 185–191. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-4/185>
7. Douglas-Hamilton D. H., Conia J. Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling. Journal of Biomedical Optics. 2001. Vol. 6, Issue 2. P. 205. doi: 10.1117/1.1353796
8. Levkina R., Levkin A., Petrenko A., Kolomiets N. Current approaches to biotechnology in animal husbandry. International Journal of Advanced Science and Technology. 2020. Vol. 29, Issue 8, Special Issue. P. 2463–2469.
9. Shakhova Yu. Yu., Paliy A. P., Paliy A. P., Shigimaga V. O., Kis V. M., Ivanov V.I. [Use of multicomponent cryoprotective media during cryopreservation of murine embryos by vitrification](#). Problems of Cryobiology and Cryomedicine. 2020. Vol. 30, No. 2. P. 203–206. <https://doi.org/10.15407/cryo30.02.203>
10. Makarov A. A., Levkin D. A. Boundary-value problems in a layer for evolutionary pseudo-differential equations with integral conditions. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: «Математика, прикладна математика і механіка». Х.: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2018. Т. 87. С. 61–68.
11. Muzylyov D., Kravcov A., Karnaukh M., Berezhnaja N., Kutya O. Development of a methodology for choosing conditions of interaction between harvesting and transport complexes Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016. Vol. 2, No. 3 (80). – P. 11–21. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.65670.

12. Skoblo T. S., Sidashenko O. I., Saichuk O. V., Klochko O. Y., Levkin D. A. Influence of Stresses on Structural Changes in Gray Cast Iron. *Materials Science*. 2020. Vol. 56, Issue 3. P. 347–358.

References

1. Stoyan, Yu. G., Putyatin, V. P. (1988). Optimizaciya tekhnicheskikh sistem s istochnikami fizicheskikh poley [Optimization of technical systems with sources of physical fields]. Kyiv: Nauk. dumka. 44–48.
2. Gelfand, I. M., Shilov, G. E. (1958). Nekotoryie voprosy teorii differentsialnykh uravneniy [Some questions of the differential equations theory]. Kyiv.: Nauk. dumka. 276.
3. Ptashnyk, B.Y., Ilkyv, V.S., Kmyt, I.Ya., Polishchuk, V.M. (2002). Nelokalni kraiovi zadachi dlia rivnian iz chastynnykh pokhidnykh [Non-local boundary value problems for equations with partial derivatives]. Kyiv: Nauk. dumka. 416.
4. Babenko, V., Nazarenko, O., Nazarenko, I., Mandych, O., Krutko, M. (2018). Aspects of program control over technological innovations with consideration of risks. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Vol. 3, No. 4(93), 6–14. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.133603.
5. Levkina, R.V., Kravchuk, I.I., Sakhno, I.V., Kramarenko, K.M., Shevchenko, A.A. (2019). The economic-mathematical model of risk analysis in agriculture in conditions of uncertainty. *Financial and credit activity: problems of theory and practice*, 3 (30), 248–255.
6. Volkov, V., Taran, I., Volkova, T., Pavlenko, O., Berezhnaja, N. (2020). Determining the efficient management system for a specialized transport enterprise. *Scientific Bulletin of National Mining University*, 4, 185–191. <https://doi.org/10.33271/nvngu/2020-4/185>
7. Douglas-Hamilton, D.H., Conia, J. (2001). Thermal effects in laser-assisted pre-embryo zona drilling. *Journal of Biomedical Optics*, 6 (2), 205. doi:10.1117/1.1353796
8. Levkina, R., Levkin, A., Petrenko, A., Kolomiets, N. (2020). Current approaches to biotechnology in animal husbandry. *International Journal of Advanced Science and Technology*, 29 (8), Special Issue, 2463–2469.
9. Shakhova, Yu. Yu., Paliy, A. P., Paliy, A. P., Shigimaga, V. O., Kis, V. M., Ivanov, V. I. (2020). [Use of multicomponent cryoprotective media during cryopreservation of murine embryos by vitrification](https://doi.org/10.15407/cryo30.02.203). *Problems of Cryobiology and Cryomedicine*, 30 (2), 203–206. <https://doi.org/10.15407/cryo30.02.203>
10. Makarov, A. A., Levkin, D. A. (2018). Boundary-value problems in a layer for evolutionary pseudo-differential equations with integral conditions. *Visnyk Kharkivskoho natsionalnoho universytetu imeni V.N. Karazina. Seriya: «Matematyka, prykladna matematika i mekhanika»*, 87, 61–68.
11. Muzylyov, D., Kravcov, A., Karnaukh, M., Berezhnaja, N., Kutya, O. (2016). Development of a methodology for choosing conditions of interaction between harvesting and transport complexes. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, Vol. 2, no. 3 (80), 11–21. DOI: 10.15587/1729-4061.2016.65670

12. Skoblo, T.S., Sidashenko, O.I., Saichuk, O.V., Klochko, O.Y., Levkin, D.A. (2020). Influence of Stresses on Structural Changes in Gray Cast Iron. Materials Science, 56 (3), 347–358.

РЕАЛИЗАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И ВОЗМОЖНЫХ РИСКОВ

А. Г. Кравцов, Д. А. Левкин, А. А. Макаров

Аннотация. В статье приведены теоретико-методологические основы для прогнозирования и математического моделирования возникновения возможных рисков в технологических и биотехнологических системах. Авторами подробно исследован возможный подход к расчету функции цели и ее параметров. Значительное внимание уделено обоснованию корректности краевых задач и задач Коши.

В механике, технике, биологии для моделирования физических процессов применяют задачи Коши и краевые задачи дифференциальных уравнений. Важно, чтобы дифференциальные уравнения имели единственное физически обоснованное решение. Авторами данной статьи исследованы специфические особенности краевых задач и задач Коши с краевыми условиями в двухточечной среде, определены условия корректности таких задач в пространствах функций степенного возрастания. Для доказательства корректности краевых задач использовали теорию псевдодифференциальных операторов в пространстве обобщенных функций. Применение полученных результатов даст возможность гарантировать корректность математических моделей, построенных в условиях неопределенности и возможных рисков.

В качестве примера расчетной математической модели, которая описывает состояние исследуемого объекта нестандартной формы, авторы рассмотрели краевую задачу системы дифференциальных уравнений теплопроводности для эмбриона под воздействием лазерного луча. Для такой краевой задачи невозможно гарантировать существование и единственность решения системы дифференциальных уравнений. Чтобы быть уверенными в существовании единственного решения необходимо или не учитывать трехслойное строение микробиологического объекта, или определить условия корректности краевой задачи. Применив полученные авторами результаты, доказана корректность краевой задачи систем дифференциальных уравнений теплопроводности для эмбриона с учетом трехслойного строения микробиологического объекта. Это дает возможность повысить точность и скорость ее реализации на компьютере.

Ключевые слова: прогнозирования, риск, корректность, краевые задачи, условия неопределенности

MATHEMATICAL MODEL IMPLEMENTATION IN CONDITIONS OF UNCERTAINTY AND POSSIBLE RISKS

A. Kravtsov, D. Levkin, O. Makarov

Abstract. The article presents the theoretical and methodological principles for forecasting and mathematical modeling of possible risks in technological and

biotechnological systems. The authors investigated in details the possible approach to the calculation of the goal function and its parameters. Considerable attention is paid to substantiating the correctness of boundary value problems and Cauchy problems.

In mechanics, engineering, and biology, Cauchy problems and boundary value problems of differential equations are used to model physical processes. It is important that differential equations have a single physically sound solution. The authors of this article investigate the specific features of boundary value problems and Cauchy problems with boundary conditions in a two-point medium, and determine the conditions for the correctness of such problems in the spaces of power growth functions. The theory of pseudo-differential operators in the space of generalized functions was used to prove the correctness of boundary value problems. The application of the obtained results will make it possible to guarantee the correctness of mathematical models built in conditions of uncertainty and possible risks.

As an example of a computational mathematical model that describes the state of the studied object of non-standard shape, the authors considered the boundary value problem of the system of differential equations of thermal conductivity for the embryo under the action of a laser beam. For such a boundary value problem, it is impossible to guarantee the existence and uniqueness of the solution of the system of differential equations. To be sure of the existence of a single solution, it is necessary either not to take into account the three-layer structure of the microbiological object, or to determine the conditions for the correctness of the boundary value problem. Applying the results obtained by the authors, the correctness of the boundary value problem of systems of differential equations of thermal conductivity for the embryo is proved taking into account the three-layer structure of the microbiological object. This makes it possible to increase the accuracy and speed of its implementation on the computer.

Key words: *forecasting, risk, correctness, boundary value problems, conditions of uncertainty*