"Енергетика і автоматика", №2, 2022 р.

UDC 631.312:514.18 DOI 10.31548/energiya2022.02.094

CONSTRUCTION OF GEODESIC LINES AS BOUNDARY TRAJECTORYS OF MATERIAL PARTICLES MOVEMENT ON THE SURFACE

S. Pylypaka, doctor of technical science, professor

A. Nesvidomin, candidate of technical science, docent

National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine

E-mail: *a.nesvidomin@gmail.com*

Abstract. *Geodetic lines on the surface play the role of straight lines on the plane. From a point on the surface you can draw a bunch of geodetic lines, among which can be straight lines (generating surfaces if the surface is linear) and curves (flat and spatial). An important feature of geodetic lines is that they involve the movement of material particles on surfaces. The greater the speed of movement of a material particle on the surface, the greater its trajectory approaches the geodetic line of the surface.*

Finding geodetic lines on the surfaces of tillage bodies and other tools that move the processed material, gives an idea of the possible trajectories of this material. There are practical methods of approximate finding of geodetic lines on the surface in a given direction. To do this, you need to have a model of the surface and a narrow strip of thick paper, which must be pushed in a given direction on the surface so that it does not come off it. The line of contact of the strip to the surface will be a geodetic line.

If there is no model of the surface, but there is its equation, then there are theoretical methods for finding geodetic lines, which are reduced to solving second-order differential equations.

The aim of the research is to find geodetic lines on the surface according to its given parametric equations.

Theoretical methods of finding geodetic lines on a surface given by parametric equations are considered. Differential equations were solved by numerical methods and geodetic lines were constructed on the surface of a hyperbolic paraboloid.

It is established that the middle geodetic line is a rectilinear generating surface, the extreme - flat cross-sections of the surface planes X = 0 and Y = 0, the rest of the geodetic - spatial curves. The reliability of the integration of the differential equation by numerical methods and the error-free visualization of the obtained results are proved.

Key words: ***geodetic line, trajectory, geodetic curvature, hyperbolic paraboloid***

Introduction. Geodetic lines on the surface play the role of straight lines on the plane - they are the shortest path between two points on the surface. Just as a bundle of straight lines can be drawn in all directions from a point on a plane, a bundle of geodesics can be drawn from a point on a surface, which can include straight lines (generating surfaces if the surface is linear) and curves (flat and spatial). An important feature of geodetic lines is that they involve the movement of material particles on surfaces. The greater the speed of movement of a material particle on the surface, the greater its trajectory approaches the geodetic line of the surface. If you imagine a situation where the particle is not affected by gravity and it moves in a straight line (for example, in a state of weightlessness), then when it meets the surface, it will change its trajectory and will move along the geodetic line of the surface. This is explained by the fact that the centrifugal force will be balanced by the reaction force of the surface, which is directed normally to the surface, ie the centrifugal force will also be directed along the normal to the surface. Such a property (when the main normal of the curve along which the centrifugal force is directed coincides in the direction of the normal to the surface) has a geodetic line of the surface.

Analysis of recent research and publications. P. M. Vasilenko pointed out that in the case of motion of a material point by inertia instead of solving the differential equation of motion of a point to determine the trajectory of this motion can be used to solve the differential equation of a geodetic line [1]. The force of gravity acting on the particle makes its adjustments to its movement on the surface. But due to the fact that the weight of the particle is constant and the velocity can be changed, it turns out that with increasing particle velocity, the percentage force acting on it increases quadratically by the formula $F=mv^2/R$, where m – is the mass of the particle, v – velocity, R – radius of curvature of the trajectory at a certain point. Then at high speeds the centrifugal force increases so much that the mass of the particle can be neglected to some extent, ie the trajectory of the particle approaches the geodetic line of the surface. This well-known fact L.V. Gyachev [2] based the calculation of the plow shelf on the upper boundary trajectory of the chip, which is the geodetic line of the shelf surface. Knowing the geodetic line of the shelf, it can be argued that at high speeds of plowing the trajectory of the chips will approach it, but can not pass higher. Thus, finding geodetic lines of surfaces of tillage bodies and other tools on which the processed material moves, gives idea of possible trajectories of movement on them of this material. There are practical methods of approximate finding of geodetic lines on the surface in a given direction. To do this, you need to have a model of the surface and a narrow strip of thick paper, which must be pushed in a given direction on the surface so that it does not come off it. The line of contact of the strip to the surface will be a geodetic line. For scanning surfaces, the geodetic line is converted to a straight line on the scan.

If there is no model of the surface, but there is its equation, then there are theoretical methods for finding geodetic lines, which are reduced to solving second-order differential equations.

The aim of the article is finding geodetic lines on the surface according to its given parametric equations.

Materials and methods. Look for geodetic lines on the surface of the hyperbolic paraboloid given by the equations:

$$X = a(v+u); \quad Y = a(v-u); \quad Z = 2uv, \tag{1}$$

where *a* – is a constant value; *u, v* – variables - independent surface parameters.

If two independent parameters of the surface *u* and *v* are related by a certain dependence, for example, *u=u(v)*, then equation (1) will depend on one variable *v*, ie on the surface (1) they will describe a certain line. We consider the function *u=u(v)* to describe a geodetic line on the surface. Having written down the differential equation of a geodetic line, we find from it the dependence *u=u(v)*.

Any line on the surface has a geodetic curvature, which is a projection of the curvature of the curve at a given point on a plane tangent to the surface at this point. For a geodetic line, the geodetic curvature at all points is zero.

Results and discussion. Find the expression of the geodetic curvature and equate it to zero.

The geodetic curvature of the line on the surface can be found from the determinant [2]:

$$k_г = \left(\frac{dv}{ds}\right)^3 \begin{vmatrix} N_x & N_y & N_z \\ X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z'' \end{vmatrix}, \tag{2}$$

where $\frac{dv}{ds}$ - derivative of the parameter *v* along the length of the arc of the geodetic line *s*;

N_x, N_y, N_z – coordinates of the unit vector normal to the surface;

X', Y', Z', X'', Y'', Z'' - the first and second derivatives of equations (1) on the parameter *v*.

Find the partial derivatives of equations (1):

$$\frac{\partial X}{\partial v} = a; \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = a; \quad \frac{\partial Z}{\partial v} = 2u; \quad \frac{\partial X}{\partial u} = a; \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = -a; \quad \frac{\partial Z}{\partial u} = 2v. \tag{3}$$

The normal to the surface is found from the vector product:

$$\overline{N} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Substituting (3) into (4) and normalizing the vector $\overline{N}$ to one, we write its projections:

$$N_x = -\frac{u+v}{\sqrt{a^2 + 2(u^2+v^2)}};\ N_y = -\frac{u-v}{\sqrt{a^2 + 2(u^2+v^2)}};\ N_z = \frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(u^2+v^2)}}. \tag{5}$$

Bearing in mind that *u* is a function of *v*, ie *u=u(v)*, we differentiate (1) by *v* and find the first and second derivatives:

$$\begin{aligned} &X' = a(1+u'); && Y' = a(1-u'); && Z' = 2(u'v+u); \\ &X'' = au''; && Y'' = -au''; && Z'' = 2(u''v+2u'). \end{aligned} \tag{6}$$

Find the derivative of the line arc by the formula:

$$\frac{ds}{dv} = \sqrt{X'^2 + Y'^2 + Z'^2} = \sqrt{2(a^2+2u^2) + 4u'uv + 2u'^2(a^2+2v^2)}. \tag{7}$$

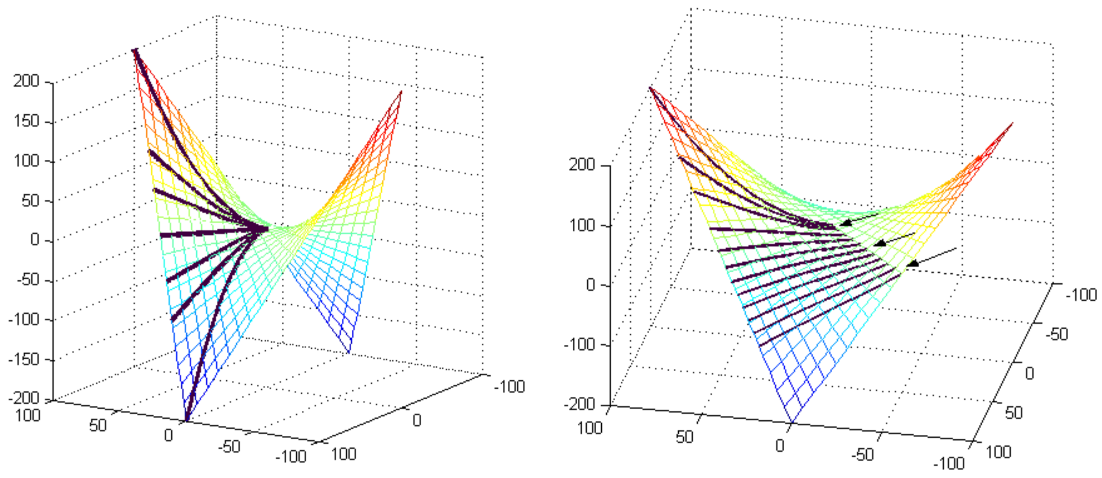
To substitute in expression (2) we need a derivative $\dfrac{dv}{ds}$, which we find from (7): $\dfrac{dv}{ds} = 1 : \dfrac{ds}{dv}$. In (2) we also substitute the coordinates of the unit vector of normal from (5) and the first and second derivatives from (6). After simplifications we will receive:

$$k_z = \frac{8au'(uu'-v) - 2au''\left[a^2 + 2(u^2+v^2)\right]}{\sqrt{a^2+2(u^2+v^2)}\left(\sqrt{2(a^2+2u^2)+4u'uv+2u'^2(a^2+2v^2)}\right)^3}. \tag{8}$$

Equating (8) to zero, we obtain the differential equation of geodetic lines:

$$u'' = \frac{4u'(uu'-v)}{a^2 + 2(u^2+v^2)}. \tag{9}$$

If we managed to integrate (9) and obtain the dependence *u=u(v)*, then by substituting it in (1) we would obtain the equation of the geodesic line. And although in our case this cannot be done, modern software products integrate similar equations with the visualization of results. The integration of equation (9) was performed using the *MatLAB* system, the use of which to solve similar problems was shown in [3]. Using this system, the surface of a hyperbolic paraboloid was constructed according to equations (1), and only then geodetic lines were plotted on the obtained graph of the surface (see Fig.)



a *b*

Fig. Surface of a hyperbolic paraboloid with drawn geodetic lines:
a – geodetic lines come from one point; *b* – geodetic lines come from different points on the surface

When integrating equation (9), it is necessary to set the initial values of the variables *u* and *u′*. The location of a point on the surface from which the geodetic line begins depends on the initial value of the parameter *u*, and its direction at this point depends on the initial value of *u′*. In Fig. on the left geodetic lines are constructed at the same initial value *u* and at different initial values *u′*, and in Fig. on the right - on the contrary. The arrows in Fig. the right shows the direction of entry of material particles to the surface, and geodetic lines - the probable trajectories of their further movement at high speeds.

Conclusions and prospects for further research. From fig. on the left we can conclude that the middle geodetic line is a rectilinear generating surface, the extreme - flat cross-sections of the surface planes $X=0$ and $Y=0$, the rest of the geodetic - spatial curves. In fact, the generating surface will stand out on it at $u = const$, and for the extreme generators we find the dependences $u=u(v)$, equating the first two equations (1) to zero: $u=-v$ and $u=v$. It is easy to see that the three dependencies: $u = const$; $u=-v$ and $u=v$ satisfy the differential equation (9), which indicates the reliability of its integration by numerical methods and error-free visualization of the obtained results.

List or references

1. Василенко П. М. Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. К.: УАСХН, 1960. 283 с.

2. Гячев Л. В. Теория лемешно-отвальной поверхности. Зерноград, 1961. 317 с.

3. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Знаходження траєкторії руху матеріальної частинки по гравітаційних лінійчатих поверхнях із горизонтальними твірними. Збірник наукових праць Національного аграрного університету "Механізація сільськогосподарського виробництва". 2002. Т.12. С. 58-69.

References

1. Vasilenko, P. M. (1960). Teoriya dvizheniya chastitsy po sherokhovatym poverkhnostyam sel'skokhozyaystvennykh mashin [Theory of particle motion on rough surfaces of agricultural machines]. Kyiv: UASKhN, 283.

2. Gyachev, L. V. (1961). Teoriya lemeshno-otval'noy poverkhnosti [Theory of the share-dump surface]. Zernograd, 1961, 317.

3. Voitiuk, D. H., Pylypaka, S. F. (2002). Znakhodzhennia traiektorii rukhu materialnoi chastynky po hravitatsiinykh liniichatykh poverkhniakh iz horyzontalnymy tvirnymy [Finding the trajectory of a material particle on gravitational linear surfaces with horizontal generators]. Zbirnyk naukovykh prats Natsionalnoho ahrarnoho universytetu "Mekhanizatsiia silskohospodarskoho vyrobnytstva", 12, 58-69.

ПОБУДОВА ГЕОДЕЗИЧНИХ ЛІНІЙ, ЯК ГРАНИЧНИХ ТРАЄКТОРІЙ РУХУ МАТЕРІАЛЬНИХ ЧАСТИНОК ПО ПОВЕРХНІ

С. Ф. Пилипака, А. В. Несвідомін

Анотація. *Геодезичні лінії на поверхні відіграють роль прямих ліній на площині. Із точки на поверхні можна провести пучок геодезичних ліній, серед яких можуть бути прямі лінії (твірні поверхні, якщо поверхня лінійчата) і криві (плоскі та просторові). Важливою властивістю геодезичних ліній є те, що із ними зв'язаний рух матеріальних частинок по поверхнях. Чим більша швидкість руху матеріальної частинки по поверхні, тим більшою мірою її траєкторія наближається до геодезичної лінії поверхні.*

Знаходження геодезичних ліній поверхонь ґрунтообробних органів і інших знарядь, якими рухається оброблюваний матеріал, дає уявлення про можливі траєкторії руху по них цього матеріалу. Існують практичні методи наближеного знаходження геодезичних ліній на поверхні в заданому напрямі. Для цього потрібно мати модель поверхні і вузьку смужку цупкого паперу, яку необхідно в заданому напрямі просувати по поверхні так, щоб вона не відривалась від неї. Лінія дотику смужки до поверхні і буде геодезичною лінією.

Якщо моделі поверхні немає, але є її рівняння, то існують теоретичні методи знаходження геодезичних ліній, які зводяться до розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку.

Метою дослідження є знаходження геодезичних ліній на поверхні за заданими її параметричними рівняннями.

Розглянуто теоретичні методи знаходження геодезичних ліній на поверхні, яка задана параметричними рівняннями. Чисельними методами розв'язано диференціальні рівняння і побудовано геодезичні лінії на поверхні гіперболічного параболоїда.

Встановлено, що середньою геодезичною лінією є прямолінійна твірна поверхні, крайніми – плоскі перерізи поверхні площинами X=0 і Y=0, решта геодезичних – просторові криві. Доведено достовірність інтегрування диференційного рівняння чисельними методами і безпомилкову візуалізацію одержаних результатів.

Ключові слова: *геодезична лінія, траєкторія руху, геодезична кривина, гіперболічний параболоїд*

ПОСТРОЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ, КАК ПРЕДЕЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ ПО ПОВЕРХНОСТИ

С. Ф. Пилипака, А. В. Несвидомин

Аннотация. *Геодезические линии на поверхности играют роль прямых линий на плоскости. Из точки на поверхности можно провести пучок геодезических линий, среди которых могут быть прямые линии (образующие поверхности, если линейчатая поверхность) и кривые (плоские и пространственные). Важным свойством геодезических линий есть то, что с ними связано движение материальных частиц по поверхностям. Чем больше скорость движения материальной частицы по поверхности, тем в большей степени ее траектория приближается к геодезической линии поверхности.*

Нахождение геодезических линий поверхностей почвообрабатывающих органов и других орудий, по которым движется обрабатываемый материал, дает представление о возможных траекториях движения по ним этого материала. Имеются практические способы приближенного нахождения геодезических линий на поверхности в заданном направлении. Для этого нужно иметь модель поверхности и узкую полоску плотной бумаги, которую необходимо в заданном направлении продвигать по поверхности так, чтобы она не отрывалась от нее. Линия прикосновения полоски к поверхности и будет являться геодезической линией.

Если модели поверхности нет, но есть ее уравнения, существуют теоретические методы нахождения геодезических линий, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений второго порядка.

Целью исследования является нахождение геодезических линий на поверхности по заданным ее параметрическим уравнениям.

Рассмотрены теоретические методы нахождения геодезических линий на поверхности, заданной параметрическими уравнениями. Численными методами решены дифференциальные уравнения и построены геодезические линии на поверхности гиперболического параболоида.

Установлено, что средней геодезической линией является прямолинейная образующая поверхности, крайними – плоские сечения поверхности плоскостями X=0 и Y=0, остальные геодезические – пространственные кривые. Доказана достоверность интегрирования дифференциального уравнения численными методами и безошибочная визуализация полученных результатов.

Ключевые слова: *геодезическая линия, траектория движения, геодезическая кривизна, гиперболический параболоид*