"Енергетика і автоматика", №1, 2013 р.

УДК 621.316.1

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ РАСЧЕТОВ СИСТЕМ ЭЛЕКТРОСНАБЖЕНИЯ. ЦЕНТР ГРАФА. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПОДСТАНЦИИ В ЭЛЕКТРОСЕТИ

В.В. Козырский, Ю.Б. Гнучий, доктора технических наук,
А.В. Гай, кандидат технических наук,
В.А. Костюк, инженер

Проведено обоснование целесообразности применения теории графов для рационализации структуры системы электроснабжения среднего класса напряжения. Осуществлен теоретико-практический поиск центра графа и реализована оптимизация расположения подстанции в электросети. Поставлены задачи дальнейших исследований.

Система электроснабжения, теория графов, кратчайший остов графа, сеть с наименьшей протяженностью линий электропередачи.

Теория графов является эффективным аппаратом формализации современных инженерных и научных задач, возникающих при изучении больших и сложных систем, а язык теории графов достаточно разработан и удобен. В настоящее время теория графов получила широкое практическое применение. Графы используются при анализе и проектировании систем электро-, водо-, газо-, теплоснабжения, транспортных сетей и пр. При этом особый интерес представляют решения оптимизационных задач на графах.

Можно сказать, что слова «граф» и «сеть» являются родственными, и вместо понятия граф часто используется понятие сеть. Это особенно относится к случаям, когда кроме основных чисто структурных соотношений в графе задаются некоторые количественные характеристики точек и линий, образующих граф. Такой взвешенный граф называют просто сетью.

Цель исследований – провести теоретико-практический поиск центра графа, осуществить оптимизацию расположения подстанции в электросети и сформировать задачи дальнейших исследований.

Материалы и методика исследований.

В [14] на основе применения теории графов для рационализации структуры системы электроснабжения при неизменном составе, месторасположения и величинах установленной мощности потребителей, базируясь на теоретико-практическом поиске кратчайших остовов графа, была сокращена протяженность линий электропередачи на 7 км (на 16,5%). Показано, что используя этот метод можно оптимизировать структуру как новопроектируемых электрических сетей, так и существующих при необходимости структурной реконструкции.

В качестве объекта исследований выбрана конкретная схема сети электроснабжения (рис. 1), иллюстрирующая таким образом взвешенный граф.

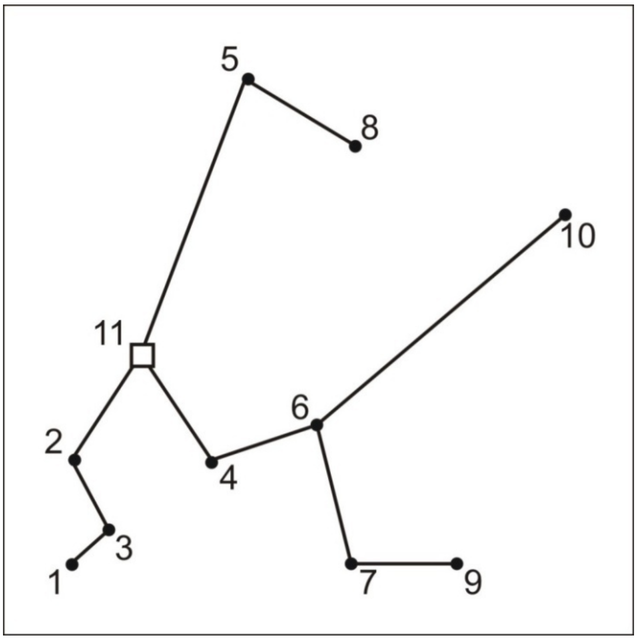


Рис. 1. Схема сети электроснабжения: ● – места потребления электрической энергии; □ – питающая подстанция

Пронумерованные вершины 1,2,…,10 символизируют места потребления электрической энергии (потребителей), а вершина 11 соответствует питающей подстанции. В табл. 1 приведены координаты вершин и потребляемая мощность, которая является нагрузкой для подстанции, в табл. 2 длины ребер. Отметим, что общая протяженность сети составляет **42,52** км.

Территориальное размещение подстанции зависит от нагрузки и расположения электропотребителей. Подстанцию необходимо размещать по возможности ближе к центрам сосредоточения нагрузок.

Приближение подстанции к нагрузкам позволяет повысить экономичность и надежность электроснабжения потребителей, так как сокращается протяженность сети, уменьшаются потери электроэнергии и отклонения напряжения, сокращаются зоны возможных аварий и пр.

Таблица 1

Координаты вершин и потребляемая мощность. Координаты вершины 11 (подстанции): $x_{11} = 4$; $y_{11} = 8$

Верш-ины v_i	Координаты вершин: x_i ; y_i, км	Потребляемая мощность P_i , кВт	Верш-ины v_i	Координаты вершин: x_i ; y_i, км	Потребляемая мощность P_i , кВт
1	2; 2	750	6	9; 6	700
2	2; 5	1000	7	10; 2	800
3	3; 3	500	8	10; 14	1000
4	6; 5	250	9	13; 2	430
5	7; 16	630	10	16; 12	500

Таблица 2

Длины ребер в данной электросети

Ребра (v_i, v_j)	Длины ребер d_{ij}, км	Ребра (v_i, v_j)	Длины ребер d_{ij}, км
(11,2)	3,61	(11,4)	3,61
(2,3)	2,24	(4,6)	3,16
(3,1)	1,41	(6,10)	9,22
(11,5)	8,54	(6,7)	4,12
(5,8)	3,61	(7,9)	3,00

Базируясь на исследованиях проведенных в [14] было построено (рис. 2) кратчайшее остовное дерево или сеть с наименьшей протяженностью.

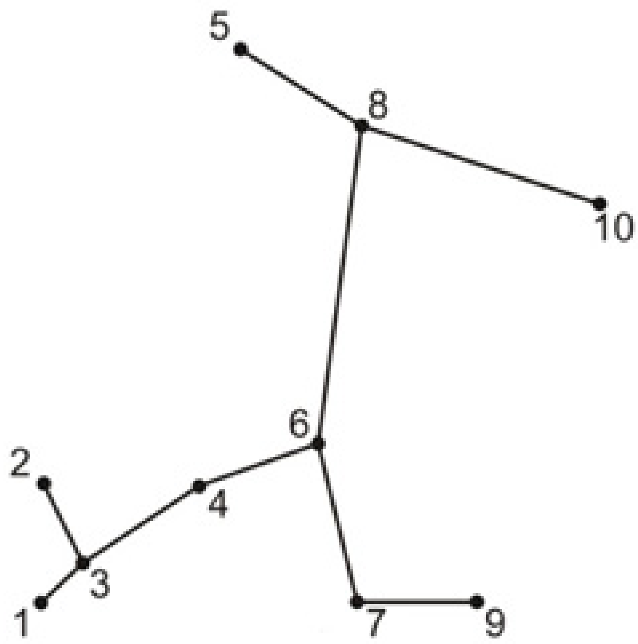


Рис. 2. Кратчайшее остовное дерево или сеть с наименьшей протяженностью на основе алгоритма Краскала

Определим «центральную» вершину графа с кратчайшими путями ко всем остальным вершинам и решим задачу оптимального размещения подстанции с использованием алгоритма Краскала.

В практической деятельности часто возникают задачи «наилучшего» размещения оборудования (или средств обслуживания) в сетях или графах. В частности, если граф представляет собой сеть дорог и вершины соответствуют отдельным районам, то можно поставить задачу оптимального размещения различных крайне необходимых предприятий и служб в этом графе. В таких случаях критерий оптимальности может состоять в минимизации расстояния (или времени проезда) от пункта обслуживания до самой отдаленной вершины графа, т.е. в оптимизации «наихудшего варианта». Иногда, по некоторым причинам (наличие определенных ресурсов или других удобств) пункт обслуживания должен быть размещен в одном из этих районов, а не в произвольной точке какой-либо дороги. В более общей задаче требуется разместить несколько таких пунктов обслуживания (а не только один). При этом самая отдаленная вершина графа должна находится по крайней мере от одного пункта обслуживания на минимально возможном расстоянии. К таким задачам относятся задачи размещения, например, аварийных служб, и поэтому объективным требованием здесь является минимизация наибольшего расстояния от произвольной вершины графа до ближайшего к ней пункта обслуживания. По очевидным причинам задачи такого типа называются минимаксными задачами размещения. Полученные при решении этих задач места размещения пунктов обслуживания называются центрами графа.

В некоторых задачах размещения лучше всего было бы минимизировать сумму всех расстояний от вершин графа до центра обслуживания. Такой критерий является наиболее подходящим, например, в задаче о выборе места расположения телефонных коммутаторов, подстанций в электросетях, баз снабжения (складов) в сети дорог. Задачи такого типа вообще относятся к минисуммным задачам размещения, хотя целевая функция является часто не просто суммой расстояний, а суммой различных функций от расстояний. Места размещения пунктов обслуживания, полученные в результате решения минисуммной задачи, также называются центрами графа. Иногда их называют медианами графа.

В более общем виде минисуммные задачи формулируются, когда речь идет об оптимальном размещении двух, трех или нескольких пунктов обслуживания (например, подстанций) в сети. При этом сумма кратчайших расстояний от вершин графа до ближайших к ним пунктов должна принимать минимально возможное значение. Задача может быть несколько обобщена, если каждой вершине сопоставить некоторый вес (представляющий, например, электрическую нагрузку); тогда целевой функцией, подлежащей минимизации, станет сумма «взвешенных» расстояний.

Пусть *G* – связный граф. Под длинной маршрута в связном графе подразумевается количество ребер (с возможными повторениями), образующих этот маршрут. Если имеется маршрут $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, то его длина совпадает с числом входящих в маршрут ребер и равна *k*. Длина кратчайшего маршрута между вершинами v_i и v_j (он, естественно, является простой цепью) называется расстоянием между этими вершинами и обозначается, обычно, как $d(v_i, v_j)$.

Назовем отклоненностью вершины $\mathrm{v_i}$ число

$$L(v_i) = \underset{v_j \epsilon V}{\mathrm{MAX}} \; d(v_i, v_j). \qquad (1)$$

Число $L(v_i)$ соответствует расстоянию от вершины v_i до вершины (или вершин), наиболее удаленной от v_i. Интуитивно понятно, что вершина v_i является относительно центральной, если $L(v_i)$ относительно мало.

Вершина, в которой достигается наименьшая из всех отклоненностей, носит название центра графа. Вершина с наибольшей отклоненностью называется периферийной точкой графа. Граф может иметь много центров, и множество всех центральных вершин называется центром графа.

Можно рассмотреть такие понятия как радиус и диаметр графа.

Максимальная среди всех отклоненностей вершин называется диаметром графа *G:*

$$D(G) = \underset{v_i \epsilon V}{\text{MAX}} \underset{v_j \epsilon V}{\text{MAX}} d(v_i, v_j). \tag{2}$$

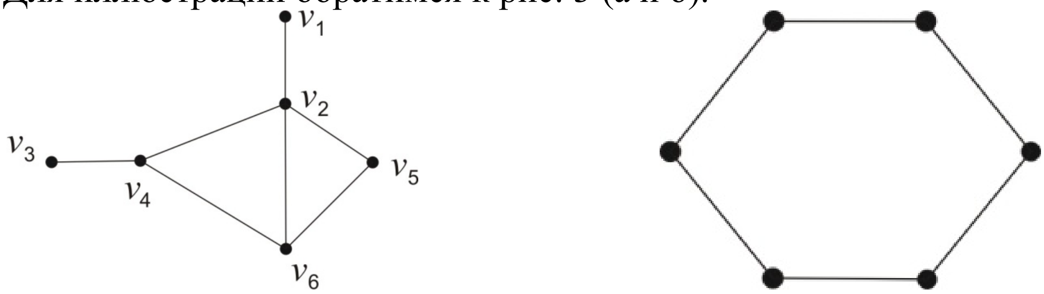
Вершина называется периферийной, если $L(v_i) = D(v_i)$.

Минимальная из всех отклоненностей вершин называется радиусом графа и обозначается через $R(G)$.

$$R(G) = \underset{v_i \epsilon V}{\text{MIN}} \underset{v_j \epsilon V}{\text{MAX}} d(v_i, v_j). \tag{3}$$

Вершина называется центральной, если $L(v_i) = R(v_i)$.

Для иллюстрации обратимся к рис. 3 (а и б).



а) б)

Рис. 3. Примеры графов

Диаметр графа на рис. 4 $D(G) = 3$. $L(v_1) = 3$, $L(v_2) = 2$, $L(v_3) = 3$, $L(v_4) = 2$, $L(v_5) = 3$, $L(v_6) = 2$. Следовательно, радиус графа $R(G) = 2$. Центры графа: v_2, v_4, v_6.

На рис. 3, б радиус графа $R(G) = 3$ и каждая вершина является центром.

Как следует из формул (1) – (3), для определения центра графа нужно найти кратчайшие пути (расстояния) между всеми парами имеющихся вершин. Одним из возможных решений этой задачи будет последовательное применение алгоритма Дейкстры с выбором каждой вершины графа в качестве начальной. Алгоритм Дейкстры позволяет построить в каждой вершине графа дерево кратчайших путей от выбранной вершины до всех остальных вершин.

Следует отметить, что дерево кратчайших путей не имеет никакого отношения к кратчайшему остову графа (минимальному остовному дереву). Так для графа, показанного на рис. 4, а, где числа, стоящие около ребер, являются их весами, дерево, дающее все кратчайшие пути, выходящие из вершины v_1, изображено на рис. 4, б, а кратчайший остов – на рис. 4, в.

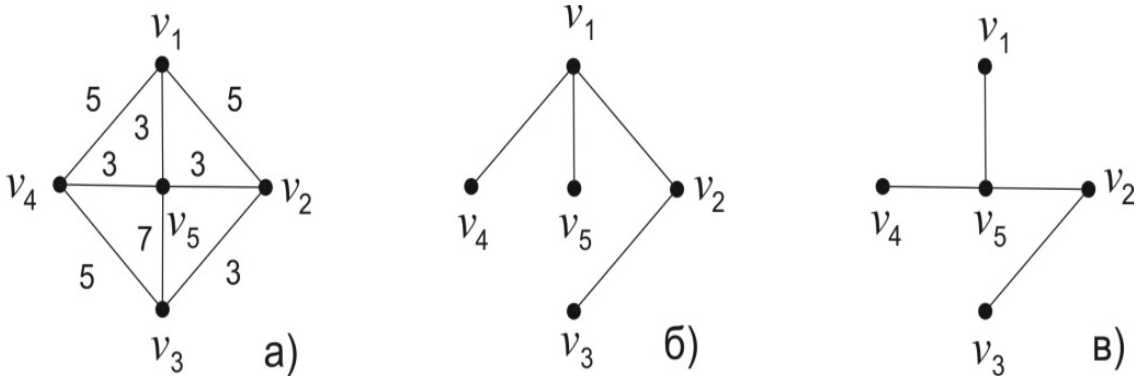


Рис. 4. Граф *G* (а), дерево кратчайших путей из v_1 (б) и кратчайший остов графа (в)

Более эффективным алгоритмом для нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин является алгоритм Флойда-Уоршалла. Известно, что применение алгоритма Флойда-Уоршалла менее трудоемко и сэкономит почти 50% времени по сравнению с использованием алгоритма Дейкстры [5].

Алгоритмы Флойда-Уоршалла и Дейкстры принадлежат к числу общеизвестных алгоритмов, описание которых можно найти в большинстве учебников по дискретной математике, в частности [10].

Деревья являются в некотором смысле простейшим классом графов, и применительно к деревьям многие доказательства и рассуждения оказываются намного проще. Деревья выделяются, наряду с другими своими свойствами тем, что их центр всегда оправдывает свое название – центр дерева состоит из одной вершины или из двух смежных вершин (так формулируется одна из теорем теории графов). Если дерево имеет одну центральную вершину, то оно называется центральным. Если дерево имеет две смежные центральные вершины, то оно называется бицентральным.

Для деревьев нет необходимости в рассмотрении сложных алгоритмов нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин, и вся алгоритмизация упрощается, поскольку в дереве каждая пара вершин соединена одной и только одной простой цепью. А выбор какой-нибудь вершины сразу же определяет дерево кратчайших расстояний от этой выбранной вершины до всех остальных вершин.

Результаты исследований. Возвращаясь к рассматриваемой задаче, мы должны определить центр графа, представленного на рис. 2, построенного в результате нахождения минимального остовного дерева с использованием алгоритма Краскала.

Мы имеем взвешенный граф, в котором при определении пути, представленного последовательностью ребер, за его вес (длину) принимается число, равное сумме весов ребер, входящих в этот путь. Если путь $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, v_k$, то длина пути $d(v_0, v_k)$ будет определяться суммой длин его ребер $d(e_1) + d(e_2) + \cdots + d(e_k)$. Таким образом, не вводя новых обозначений, далее через $d(v_i, v_j)$ будем обозначать длину взвешенного пути между вершинами v_i и v_j . Как и ранее, взвешенной вершине v_i будем ставить в соответствие потребляемую мощность P_i .

Для каждой вершины $v_i \in V$ определим число

$$c(v_i) = \sum_{v_j \in V} P_j \, d\,(v_i, v_j), \tag{4}$$

которое назовем передаточным, и задача о нахождении центра графа будет состоять в поиске наименьшего числа среди всех передаточных чисел:

$$\mathrm{MIN}_{v_i \in V}\, c(v_i) = \underset{v_i \in V}{\mathrm{MIN}} \sum_{v_j \in V} P_j \, d\left(v_i, v_j\right). \tag{5}$$

Это и есть минисумная задача о размещении пункта обслуживания, который должен быть на минимальном расстоянии до всех других вершин графа.

Вершину $v_ц$, в которой этот минимум достигается, назовем центром (медианой) графа,

$$c(v_ц) = \ \mathrm{MIN}_{v_i \in V}\, c(v_i) = \underset{v_i \in V}{\mathrm{MIN}} \sum_{v_j \in V} P_j \, d\left(v_i, v_j\right). \tag{6}$$

Для вершины v_6 передаточное число

$c(v_6)$ = 750·(3,16+3,61+1,41)+1000·(3,16+3,61+2,24)+500·(3,16+3,61)+250·3,16+800·4,12+430·(4,12+3,0)+1000·6,71+500·(6,71+3,61)+630·(6,71+5,00)=44925.

Для вершин v_4, v_7 и v_8, смежных с вершиной v_6, передаточные числа соответственно равны: 49854, 61817, 60360.

Следовательно, мы имеем центральный граф, а вершина v_6 является единственным центром графа.

Говоря о содержательной интерпретации и о вершине v_6 как центре графа, можно отметить, что в формулах (6) – (8) каждая длина пути $d(v_6, v_j)$ – это длина плеча действующей загрузки P_j , и на рис. 5 для наглядности каждое это плечо показано отдельно от других.

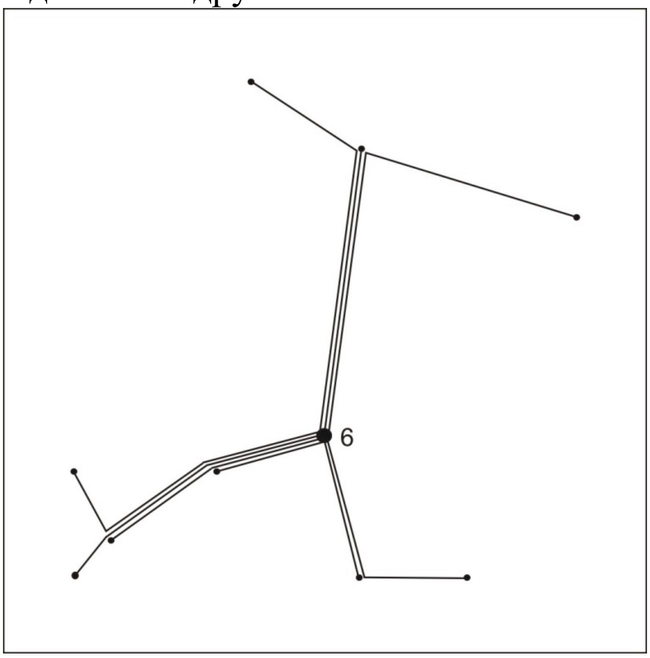


Рис.5. В вершине v_6 достигается минимум: $c(v_6) = \ \mathrm{MIN}_{v_i \in V}\, c(v_i)$

Таким образом, подстанцию следует разместить в пределах местности потребления, отмеченной вершиной v_6 с координатами $x_6 = 9, \;\; y_6 = 6$ (рис. 6). Отметим, что это расположение подстанции не очень сильно отличается от центра электрических нагрузок ($x_0 = 7{,}44; \;\; y_0 = 7{,}01$), найденного без учета структурной составляющей графа.

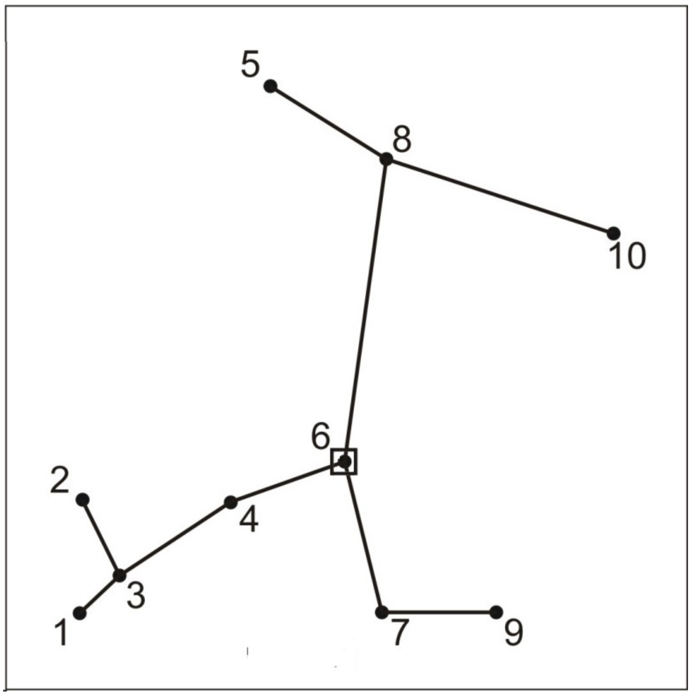


Рис. 6. Размещение подстанции в центре графа

В вершине v_6 достигается минимум:

$$c(v_6) = \underset{v_i \in V}{\mathrm{MIN}}\, c(v_i),$$

но в этой вершине не выполняется уравнение равновесия

$$\sum_{i=1}^{10} P_i \vec{r_i} = 0 \; ,$$

как это было в центре электрических нагрузок. Если подстанцию разместить в найденном центре графа и провести радиус-векторы от подстанции (как из начала координат) ко всем вершинам (рис. 7), то получим, что

$$\sum_{i=1}^{10} P_i \vec{r_i} \neq 0 \; .$$

Однако векторная сумма $\sum_{i=1}^{10} P_i \vec{r_i}$ близка к нулю, поскольку центр графа и центр электрических нагрузок близки.

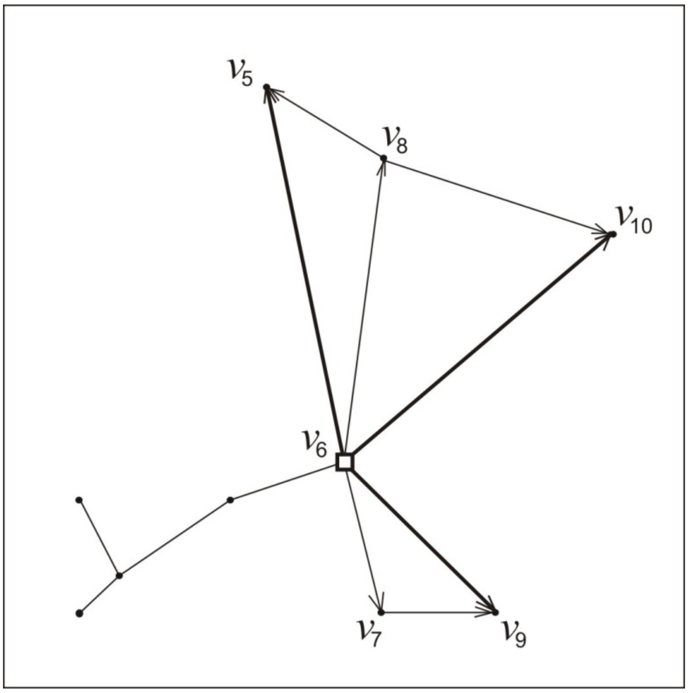


Рис. 7. Все требуемые радиус-векторы определяются через векторную суму путей в графе

На рис. 7 показано, для примера, только радиус-векторы $\overrightarrow{r_5}, \overrightarrow{r_9}, \overrightarrow{r_{10}}$, направленные от вершины v_6 соответственно к вершинам v_5, v_9, v_{10}. Из рисунка видно, что радиус-векторы $\overrightarrow{r_5}, \overrightarrow{r_9}, \overrightarrow{r_{10}}$ получены в результате векторных сумм: $\overrightarrow{r_5} = \overrightarrow{v_6 v_8} + \overrightarrow{v_8 v_5}$;$\overrightarrow{r_9} = \overrightarrow{v_6 v_7} + \overrightarrow{v_7 v_9}$; $\overrightarrow{r_{10}} = \overrightarrow{v_6 v_8} + \overrightarrow{v_8 v_{10}}$.

Таким образом, определены оптимальные координаты размещения подстанции с учетом структурной составляющей графа. Необходимо отметить о рациональности проведения практических расчетов основываясь на теоретических положениях сформированных в рамках данной статьи.

Выводы

В результате применения теории графов для рационализации структуры системы электроснабжения при неизменном составе, месторасположения и величинах установленной мощности потребителей, базируясь на теоретико-практическом поиске центра графа осуществлена оптимизация расположения подстанции в электросети и указаны соответствующие координаты её размещения. Таким образом, используя этот метод можно оптимизировать структуру как новопроектируемых электрических сетей, так и существующих при необходимости структурной реконструкции.

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов / Харари Ф. –М.: Мир, 1973. – 304 с.
2. Басакер Р. Конечные графы и сети / Басакер Р., Саати Т. –М.: Наука, 1974. – 368 с.
3. Свами М. Графы, сети и алгоритмы / Свами М., Тхуласираман К. –М.: Мир, 1984. – 456 с.

4. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Майника Э. –М.: Мир, 1981. – 328 с.
5. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Кристофидес Н. –М.: Мир, 1978. – 432 с.
6. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Пападимитриу Х., Стайглиц К. – М.: Мир, 1985. – 512 с.
7. Скиена С. Алгоритмы. Руководство по разработке / Скиена С. – СПб.: БХВ – Петербург, 2011. – 720 с.
8. Алгоритмы: построение и анализ / Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. –М.: Изд. дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.
9. Седжвик Р. Алгоритмы на С++ / Седжвик Р. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2011. – 1056 с.
10. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Андерсон Дж. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2004. – 960 с.
11. Основы электротехники / под ред. К.А. Круга. – М.-Л.: Гос. энергетическое изд-во, 1952. – 432 с.
12. Справочник по электроснабжению промышленных предприятий: в 2 кн. / под общ. ред. А.А. Федорова и Г.В. Сербиновского. – М.: Энергия, 1973. – Кн. 1. Проектно-расчетные сведения.– 520 с.
13. Справочник по электроснабжению промышленных предприятий: в 2-х кн. / под общ. ред. А.А. Федорова и Г.В. Сербиновского. – М.: Энергия, 1973. – Кн. 2. Проектно-расчетные сведения. – 520 с.
14. Козырский В.В., Ю.Б. Гнучий, А.В. Гай Применение теории графов для расчетов систем электроснабжения. Кратчайший остов графа. Сеть с наименьшей протяженностью линий электропередачи // Науковий вісник НУБІП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». – 2013. – №1. С. 11 – 19.

Проведене обґрунтування доцільності застосування теорії графів для раціоналізації структури системи електропостачання середнього класу напруги. Здійснений теоретико-практичний пошук центру графа та реалізована оптимізація розташування підстанції в електромережі. Поставлені завдання подальших досліджень.

Система електропостачання, теорія графів, найкоротший остов графа, мережа з найменшою протяжністю ліній електропередачі.

The justification of the usefulness of the graph theory to rationalize the structure of a medium-voltage power supply. Carried out theoretical and practical center of the graph and search optimization implemented in the electrical substation location. Set targets for further research.

Power supply system, graph theory, the shortest skeleton graph, the network with the least length of transmission lines.