"Енергетика і автоматика", №1, 2025 р.

УДК 621.313 DOI 10.31548/energiya1(77).2025.017

ЗАСТОСУВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ РІВНЯНЬ ДИНАМІЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗАКОНІВ КЕРУВАННЯ АВТОМАТИЧНИХ СИСТЕМ

Ю. В. Шуруб, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник

Інститут електродинаміки НАН України

А. А. Руденський, старший викладач

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: yvshur@ukr.net

Анотація. *Зростання дефіциту енергоресурсів обумовлює необхідність пошуку ефективних технічних засобів зниження енергоспоживання технологічних систем та промислових установок, у тому числі в агропромисловому комплексі, переробній та комунальній галузях. Одним з таких рішень є застосування оптимальних законів керування, що дозволяють забезпечити економію енергетичних та матеріальних ресурсів.*

Серед методів оптимізації автоматичних систем за деяких умов зручним для побудови замкнених систем оптимального керування може виявитись метод динамічного програмування Беллмана в неперервній формі, що дає можливість визначити оптимальний закон керування як функцію вихідних координат об'єкту керування. У рамках цієї роботи в якості об'єкта керування розглядається електропривод, навантажений моментом в'язкого тертя, що може бути як основним моментом навантаження деяких агрегатів, так і значно частіше лінійною складовою моменту опору двигуна, що не виконує корисної роботи, але спричиняє витрати енергії на її подолання.

Метою дослідження є обґрунтування використання неперервних рівнянь динамічного програмування Беллмана для знаходження оптимальних за критерієм мінімуму втрат енергії законів керування електромеханічними об'єктами на прикладі електричних приводів, що працюють під дією моменту в'язкого тертя.

Це обґрунтування базується на пошуку умов існування аналітичних розв'язків рівнянь динамічного програмування та системи диференціальних рівнянь електромеханічного об'єкта у часткових похідних та розв'язку цих рівнянь для пошуку оптимального закону керування об'єктом у функції його вихідних координат.

Ключові слова: ***оптимальне керування, динамічне програмування, електропривод, часткові похідні, критерій оптимальності***

Актуальність. Задача визначення оптимальних законів керування технологічними автоматичними системами та їх об'єктами керування є актуальною через необхідність економії енергоресурсів.

Основою оптимізації законів керування автоматичних систем є математична модель об'єкта, критерій оптимальності, що характеризує мету керування, та обмеження на керування та на фазові координати об'єкта. За критерій оптимальності приймають функціонал, що мінімізує якийсь показник якості. Широке застосування знаходять квадратичні критерії, зокрема критерій мінімальних втрат енергії.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Найбільш загальним методом оптимізації законів керування автоматичними системами є метод варіаційного числення [1,2], але він є й найбільш трудомістким та таким, що може не мати рішення при накладанні обмежень на керування та на фазові координати об'єкта. Для подолання цих перешкод при розв'язку оптимізаційних задач були розроблені прямий варіаційний метод [3], методи принципу максимуму [4] та динамічного програмування [5].

Використання принципу максимуму, як правило, призводить до необхідності розв'язку крайової задачі [6]. Застосування динамічного програмування до варіаційних задач теорії оптимального керування знімає складність розв'язку крайової задачі, однак при цьому можуть виникати значні обчислювальні складності. Перевагою методу динамічного програмування є можливість отримання оптимального керування у вигляді зворотного зв'язку, що дозволяє застосовувати оптимальне керування в умовах дії на об'єкт керування стохастичних збурень [7], як стаціонарних [8], так і нестаціонарних [9].

Мета дослідження – пошук умов існування аналітичного розв'язку неперервних рівнянь динамічного програмування, що дозволили б отримувати оптимальні за критерієм мінімуму втрат енергії закони керування електромеханічними об'єктами та визначення цих законів на прикладі електричних приводів, що працюють під дією моменту в'язкого тертя.

Матеріали та методи дослідження. В основі досліджень за даною роботою лежать диференціальні рівняння оптимізації роботи електропривода у часткових похідних, визначені за методом динамічного програмування. Цей метод базується на принципі оптимальності, сформульованому Р. Беллманом:

Майбутня поведінка системи при оптимальному керуванні залежить тільки від стану системи в даний момент часу і мети керування та не залежить від «передісторії», або поведінки системи у минулому.

У рамках цієї роботи розглядатимемо скалярні форми рівнянь динамічного програмування одномірних систем оптимального керування об'єктами першого порядку. Але отримані результати можуть бути розповсюджені і на багатомірні системи оптимального керування об'єктами вищих порядків при заміні у рівняннях динамічного програмування скалярних величин векторними.

Методика визначення оптимальних алгоритмів керування розглядається на прикладі електропривода постійного струму, чия залежність моменту навантаження від швидкості є лінійною, наприклад, електроприводи первинних двигунів автономних генераторів.

Результати досліджень та їх обговорення. Основна сфера застосування методу динамічного програмування лежить в області оптимізації дискретних автоматичних систем. При цьому варіаційна задача розглядається як багатокроковий процес розв'язку більш простих задач, а оптимальне керування знаходиться послідовно крок за кроком, що вимагає значного обсягу обчислень.

При деяких припущеннях метод динамічного програмування може бути застосований для дослідження неперервних систем. У цьому випадку варіаційна задача зводиться до задачі розв'язку диференціальних рівнянь у часткових похідних. Аналітичний розв'язок рівнянь динамічного програмування існує у деяких окремих випадках, однак його існування може значно спростити пошук оптимальних законів керування у цих випадках.

Нехай рух об'єкту керування описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), \tag{1}$$

а критерій оптимальності заданий функціоналом

$$Q = \int_{t_0}^{T} G(x,u,t)dt\,. \tag{2}$$

Припустимо, що є оптимальна траєкторія $x^*(t)$, яка веде з точки $x(0)$ у точку $x(T)$. Мінімальне значення функціоналу Q, що відповідає оптимальній траєкторії, позначимо через $S(x(0),t_0)$.

Розіб'ємо оптимальну траєкторію $x^*(t)$ на дві ділянки: перша від t_0 до t, друга від t до T. У відповідності із принципом оптимальності, якщо траєкторія від t_0 до t оптимальна, то друга ділянка оптимальної траєкторії теж є оптимальною. Мінімальне значення функціоналу $Q_{\min}$ на ділянці $t..T$ запишеться як $S(x(t),t)$. Візьмемо малу ділянку траєкторії між t та $t+\Delta t$ і позначимо мінімальне значення функціоналу в інтервалі від $x(t+\Delta t)$ до $x(T)$ як $S(x(t+\Delta t),t+\Delta t) = S(x(t'),t')$.

Співвідношення між $S(x(t),t)$ та $S(x(t'),t')$ відповідає принципу оптимальності Беллмана. Тоді можна записати

$$S(x,t) = \min_{u(t)\in\Omega(u)} \left\{ \int_{t}^{t+\Delta t} G(x,u,t)d\tau + S(x(t'),t') \right\} \tag{3}$$

Після інтегрування отримаємо

$$S(x,t) = \min_{u(t)\in\Omega(u)} \left\{ G(x,u,t)\Delta t + S(x(t'),t') \right\}. \tag{4}$$

Розкладемо $x(t')$ у ряд Тейлора по Δt та, враховуючи (1), отримаємо:

$$x(t') = x(t+\Delta t) = x(t) + \frac{dx}{dt}\Delta t + \theta_1(t) = x(t) + f(x(t),u(t),t)\Delta t + \theta_1(t)\,, \tag{5}$$

де $\theta_1(t)$ - величина вищого порядку малості.

Припустимо, що функція S дійсно існує, неперервна та має часткові похідні по x та по t.

Розкладемо $S(x(t'),t')$ у ряд Тейлора навколо точки (x,t):

$$S(x(t'),t') = S(x(t+\Delta t),t+\Delta t) = S[x(t) + f[x(t),u(t),t]\Delta t + \theta_2(t), t+\Delta t] =$$

$$= S(x,t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} f(x,u,t)\Delta t + \frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\Delta t + \theta_2(t)\,, \tag{6}$$

де $\theta_2(t)$ - величина вищого порядку малості.

Підставимо (6) у (4)

$$S(x,t) = \min_{u(t)\in\Omega(u)} \left\{ G[x,u,t]\Delta t + S(x,t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} f(x,u,t)\Delta t + \frac{\partial S(x,t)}{\partial t}\Delta t + \theta_3(t) \right\}. \quad (7)$$

Віднімемо з обох частин рівності (7) $S(x,t)$ та поділимо на Δt:

$$0 = \min_{u(t)\in\Omega(u)} \left\{ G[x,u,t] + S(x,t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} f(x,u,t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{\theta_2(t)}{\Delta t} \right\}. \quad (8)$$

Спрямуємо $\Delta t \to 0$ та отримаємо граничне значення:

$$-\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = \min_{u(t)\in\Omega(u)} \{ G(x,u,t) + \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} f(x,u,t) \}. \quad (9)$$

Рівняння (9) має назву *рівняння Беллмана*. Для знаходження правої частини цього рівняння необхідно взяти похідну по u від виразу у фігурних дужках та прирівняти її до нуля.

Аналітичний розв'язок рівняння (9) існує у деяких окремих випадках, а, як правило, воно розв'язується чисельними методами. Після знаходження функції $S(x,t)$ можна визначити керування, що відповідає оптимальній траєкторії.

Випадок аналітичного розв'язку рівняння Беллмана розглянемо за припущення, що мінімальним значенням виразу у фігурних дужках формули (9) є нуль. Для одержання мінімуму по u продиференціюємо праву частину (9) по u та прирівняємо до нуля. Тоді матимемо кінцеві функціональні рівняння:

$$G(x,u,t) + f(x,u,t) \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial G(x,u,t)}{\partial u} + \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial u} \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Застосування функціональних рівнянь (10), (11) для визначення оптимального закону керування як функції фазової координати $u = f(x)$ розглянемо на такому прикладі.

Електричний привод з двигуном постійного струму незалежного збудження, навантажений моментом в'язкого тертя $M_н = k_1\omega$, працює в режимі низьких швидкостей, коли падіння напруги $U_1 = i \cdot r$ на сумарному опорі ланки якоря $r = r_я + r_д$ є значно більшим величини електрорушійної сили протиобертання $e = c_e \cdot \omega$. Необхідно визначити закон керування електродвигуном $U = f(\omega)$, за яким сумарна енергія втрат, що витрачається на переборення моменту в'язкого тертя та на нагрівання, буде мінімальною. Впливом індуктивності у ланці якоря слід знехтувати. Момент інерції ротора з об'єктом $J = 1{,}96 \cdot 10^{-5}$ $кг{\cdot}м^2$, коефіцієнти пропорційності двигуна за ЕРС $c_e = 0{,}096$ $В{\cdot}с$ та за електромагнітним моментом $c_м = 2{,}94 \cdot 10^{-3}$ $Н{\cdot}м{\cdot}А^{-1}$, $k_1 = 0{,}98 \cdot 10^{-3}$ $Н{\cdot}м{\cdot}с$, $r = 5$ $Ом$.

Рівняння моментів двигуна має вигляд

$$J\frac{d\omega}{dt} + k_1\omega = c_м i. \tag{12}$$

Згідно з умовами задачі індуктивністю ланки якоря можна знехтувати. Тому відповідно до закону Кірхгофа

$$i \cdot r + c_e\omega = U. \tag{13}$$

Також згідно з умовами $i \cdot r >> c_e\omega$. Тоді наближено отримаємо:

$$i = \frac{U}{r}. \tag{14}$$

Підставимо (14) у (12) та отримаємо наближене рівняння динаміки об'єкта:

$$J\frac{d\omega}{dt} = -k_1\omega + \frac{c_м}{r}U. \tag{15}$$

Підставимо числові значення параметрів електроприводу та після спрощення матимемо:

$$\frac{d\omega}{dt} = b \cdot \omega + m \cdot U, \tag{16}$$

де $b = -\frac{k_1}{J} = -50$ с$^{-1}$, $m = \frac{c_М}{J \cdot r} = 30$ В$^{-1}\cdot$с$^{-2}$.

Далі слід визначити U як функцію ω. Потужність електричних втрат обчислюється за формулою

$$P_e = i \cdot U = \frac{U^2}{r}. \tag{17}$$

Потужність втрат на в'язке тертя складає:

$$P_м = M_н \cdot \omega = k_1 \cdot \omega^2. \tag{18}$$

Тоді функціонал, що мінімізується та визначає сумарну енергію втрат, має вигляд:

$$Q = \int_0^\infty (a_1 \cdot \omega^2 + a_0 \cdot U^2)dt\,, \tag{19}$$

де $a_1 = k_1 = 0{,}98 \cdot 10^{-3}$ *Н·м·с,* $a_0 = \frac{1}{r} = 0{,}2$ *Вт·В*$^{-2}$.

Задачу визначення оптимального керування, що забезпечує мінімум інтеграла (19), розв'яжемо методом динамічного програмування. Для системи, що розглядається, рівняння динамічного програмування матимуть вигляд:

$$a_1 \cdot \omega^2 + a_0 \cdot U^2 + (b \cdot \omega + m \cdot U) \cdot \frac{\partial S}{\partial \omega} = 0\,, \tag{20}$$

$$2a_0 \cdot U + m \cdot \frac{\partial S}{\partial \omega} = 0\,. \tag{21}$$

де S - функція, що відповідає мінімальному значенню функціонала Q.

З рівняння (21) знайдемо:

$$\frac{\partial S}{\partial \omega} = -\frac{2a_0}{m} \cdot U\,. \tag{22}$$

Після підстановки цього значення у рівняння (20), отримаємо:

$$U^2 + \frac{2b \cdot \omega}{m} \cdot U - \frac{a_1}{a_0} \cdot \omega^2 = 0\,. \tag{23}$$

Розв'язок квадратного рівняння (23) матиме вигляд:

$$U = k \cdot \omega\,, \tag{24}$$

де $k = -\frac{b}{m} + \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 + \frac{a_1}{a_0}} = -\frac{50}{30} + \sqrt{\left(\frac{50}{30}\right)^2 + \frac{0{,}98 \cdot 10^{-3}}{0{,}2}} = 0{,}87 \cdot 10^{-1}$ *В·с*.

Тобто оптимальний з точки зору мінімуму втрат закон керування (24) буде лінійним.

Дійсний розв'язок системи рівнянь (20)-(21) існує, отже припущення (10) про те, що мінімальним значенням правої частини рівняння Беллмана (9) є нуль, для даного об'єкту є справедливим.

Висновки і перспективи.

Аналітичний розв'язок неперервного рівняння динамічного програмування можна отримати, якщо зробити припущення про те, що мінімальним значенням правої частини рівняння Беллмана є нуль. Тоді алгоритм оптимального керування може бути отриманий шляхом розв'язку двох функціональних диференціальних рівнянь. Наявність дійсного розв'язку цих рівнянь дозволяє визнати вказане припущення справедливим, отже оптимальне керування, визначене за методом динамічного програмування у неперервній формі, існує. Отримані методика визначення оптимальних алгоритмів керування та результати досліджень можуть бути також розповсюджені на деякі види електроприводів змінного струму [10], чиї моменти навантаження мають лінійну складову.

Роботу виконано за підтримки Національного фонду досліджень України (договір № 175/0075 «Електромеханічні системи підвищеної енергоефективності для енергетики, технологій і транспорту»).

Список використаних джерел

1. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л: Энергия, 1977. 280 с.

2. Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1996. 384 p.

3. Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом. Київ-Ніжин: ПП Лисенко М. М. 2010. 184 с.

4. Григоров О.В. , Ловейкін В.С. Оптимальне керування рухом механізмів вантажопідйомних машин. К.: ІЗМН, 1997. 264 с.

5. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. Оптимізація руху вантажопідйомного крана із траверсною підвіскою вантажу методом динамічного програмування. Машинобудування. 2012. №10. С. 15-32.

6. Григоров О.В., Петренко Н.О. Вантажопідйомні машини. Х.: НТУ „ХПІ”, 2005. 304 с.

7. Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О. Динаміка і оптимізація режимів руху мостових кранів. Київ: ТЦ Компринт. 2016. 314 с.

8. Шуруб Ю.В. Розробка системи керування трифазно-однофазних асинхронних електроприводів при випадкових навантаженнях. Електромеханічні і енергозберігаючі системи. 2012. Вип.1(17). С. 12-15.

9. Shurub Y., Dudnyk A., Vasilenkov V., Lavinskiy D. Application of a Kalman filter in scalar form for discrete control of electromechanical systems. *IEEE International Conference on Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP)*. Kremenchuk, Ukraine, September 21-25, 2020. Pp. 1-4. https://doi.org/10.1109/PAEP49887.2020.9240805

10. Шуруб Ю.В. Статистична оптимізація частотно регульованих асинхронних електроприводів при скалярному керуванні. Електротехніка і Електромеханіка. 2017. №1. С. 26–30. https://doi.org/10.20998/2074-272X.2017.1.05

References

1. Petrov, Ju. P. (1977). Variacionnye metody teorii optimal'nogo upravlenija [Variational methods of optimal control theory]. Energija, 280.

2. Krotov, V.F. (1996). Global methods in optimal control theory. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 384.

3. Loveykin, V. S., Romasevich, Yu. O. (2010). Optimizatsiya perehidnih rezhimIv ruhu mehanichnih sistem pryamim variatsiynim metodom [Optimization of transients regim es of movement of mechanical systems with the direct variational method]. Kiyv – Nizhyn, 184.

4. Grigorov, O.V., Lovejkin, V.S. (1997). Optymalne keruvannia rukhom mekhanizmiv vantazhopidjomnykh mashyn [Optimal control of the movement of lifting machinery mechanisms]. Kyiv: IZMN, 264.

5. Loveykin, V. S., Romasevich, Yu. O. (2012). Optymizatsiya rukhu vantazhopidyomnoho krana iz traversnoyu pidviskoyu vantazhu metodom dynamichnoho prohramuvannya [Optimization of the movement of a crane with a traverse suspension of the load using the dynamic programming method]. Mechanical engineering, 10, 15-32.

6. Grigorov, O.V., Petrenko, V.S. (2005). Vantazhopidjomni mashyny [Lifting machines]. Kharkiv: NTU „KhPI”, 304.

7. LoveykIn, V. S., Romasevich, Yu. O. (2016). Dinamika i optimizatsiya rezhimiv ruhu mostovih kraniv [Dynamics and optimization of traffic overhead cranes]. Kiyv: TsP KOMPRINT, 314.

8. Shurub, Yu.V. (2012). Rozrobka systemy keruvannya tryfazno-odnofaznykh asynkhronnykh elektropryvodiv pry vypadkovykh navantazhennyakh [Working out of system of control of three-one phase induction electric drives at random loads]. Electromechanical and energy saving systems, 1, 12-15.

9. Shurub, Y., Dudnyk, A., Vasilenkov, V., Lavinskiy, D. (2020). Application of a Kalman filter in scalar form for discrete control of electromechanical systems. *IEEE International Conference on Problems of Automated Electrodrive. Theory and Practice (PAEP).* Kremenchuk, Ukraine, September 21-25, 2020, 1-4. https://doi.org/10.1109/PAEP49887.2020.9240805

10. Shurub, Yu. V. (2017). Statystychna optymizatsiya chastotno rehulʹovanykh asynkhronnykh elektropryvodiv pry skalyarnomu keruvanni [Statistical optimization of frequency regulated induction electric drives with scalar control]. Electrical Engineering & Electromechanics, 1, 26–30. https://doi.org/10.20998/2074-272X.2017.1.05

APPLICATION OF CONTINUOUS DYNAMIC PROGRAMMING EQUATIONS TO DETERMINE OPTIMAL CONTROL LAWS OF AUTOMATED SYSTEMS

Yu. Shurub, A. Rudenskyi

Abstract. *The growing shortage of energy resources necessitates the search for effective technical means of reducing the energy intensity of technological systems and industrial installations, including in the agro-industrial complex, processing and utility industries. One of these solutions is the application of optimal control laws that allow saving energy and material resources.*

Among the methods of optimization of automatic systems, under certain conditions, the Bellman dynamic programming method in continuous form may be convenient for constructing closed-loop optimal control systems, which makes it possible to determine the optimal control law as a function of the initial coordinates of the control object. In this work, an electric drive loaded with a viscous friction torque is considered as a control object, which can be both the main load moment of some units and, much more often, a linear component of the motor resistance torque, which does not perform useful work, but causes energy consumption to overcome it.

The purpose of this work is to justify the use of continuous Bellman dynamic programming equations to find optimal, according to the criterion of minimum energy losses, control laws for electromechanical objects using the example of electric drives operating under the action of a viscous friction moment.

This justification is based on finding the conditions for the existence of analytical solutions to dynamic programming equations, obtaining and solving a system of differential equations of an electromechanical object in partial derivatives and solving these equations to find the optimal control law for the object as a function of its initial coordinates.

Key words: ***optimal control, dynamic programming, electric drive, partial derivatives, optimality criterion***