УДК 621.313 DOI 10.31548/energiya5(81).2025.054

ОПТИМІЗАЦІЯ ШВИДКОДІЇ ПОЗИЦІЙНИХ ЕЛЕКТРОПРИВОДІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМУ

Ю. В. Шуруб, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник

Інститут електродинаміки НАН України

А. А. Руденський, старший викладач

Національний університет біоресурсів і природокористування України

E-mail: *yvshur@ukr.net*

Анотація. *Якість виконання багатьох технологічних процесів залежить у значній мірі від інерційних властивостей виконавчих пристроїв. Як виконавчі пристрої систем автоматичного керування широко застосовуються позиційні електроприводи з серводвигунами, що мають інтегруючі властивості. Оптимізація швидкодії таких електроприводів дозволяє підвищити якість технологічних процесів, зменшити динамічні похибки регулювання, викликані впливом інерційності виконавчого пристрою.*

Принцип максимуму є зручним засобом визначення оптимального закону керування як функції фазових координат, тобто засобом синтезу оптимальних регуляторів у замкнених системах, так і функції часу, тобто засобом пошуку оптимальних програмних керувань у розімкнутих системах, якими є позиційні електроприводи з релейним керуванням.

Метою даної роботи є обґрунтування застосування принципу максимуму для задачі оптимізації швидкодії позиційних електроприводів та пошук аналітичного розв`язку такої задачі.

Ключові слова: ***оптимальне керування, принцип максимуму, електропривод, критерій оптимальності***

Актуальність. Електроприводи, робочий орган яких при виконанні технологічного процесу має у кожний момент часу займати у просторі строго фіксоване положення, називаються позиційними. До таких електроприводів серед інших відносяться виконавчі пристрої систем керування технологічних процесів з інтегруючими серводвигунами, що керують різними клапанами, вентилями, шиберами, заслінками, тощо, та знаходять широке застосування у багатьох галузях як промисловості, так і сільського господарства. При цьому якість виконання технологічного процесу в значній мірі залежить від швидкодії виконавчого пристрою, що обумовлює актуальність задач пошуку оптимальних за швидкодією законів керування позиційних електроприводів технологічних автоматичних систем.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Поширеними методами розв'язку оптимізаційних задач є метод варіаційного числення [1, 2], прямий варіаційний метод [3], методи принципу максимуму [4] та динамічного програмування [5].

В аграрному виробництві значне поширення отримали позиційні системи автоматичного регулювання, які реалізують релейний алгоритм керування, що дозволяє не використовувати вартісні перетворювачі електричної енергії (перетворювачі частоти та напруги) [6]. У такому випадку керуючий сигнал виконавчого пристрою може мати лише три позиції, що відповідають нульовому та номінальному з різною полярністю значенням. У цьому випадку для розв`язку задачі оптимальної швидкодії доцільно застосовувати метод максимуму, що дозволяє сформувати оптимальний закон керування у вигляді кусково-постійної функції [7, 8].

Мета дослідження – пошук аналітичного розв`язку задачі оптимального за швидкодією керування позиційними електроприводами з інтегруючими серводвигунами.

Матеріали та методи дослідження. В основі досліджень за даною роботою лежать диференціальні рівняння серводвигуна позиційного електропривода та гамільтонова система рівнянь для систем, оптимальних за швидкодією.

Результати досліджень та їх обговорення.

Принцип максимуму є зручним засобом визначення оптимального закону керування як функції часу $U(t)$, тобто засобом пошуку оптимальних програмних керувань у розімкнутих системах. Розглянемо, як знайти аналітичний розв'язок оптимізаційної задачі за допомогою принципу максимуму.

Якщо рух об'єкта керування описується системою рівнянь

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_m), \tag{1}$$

де $i = 1, 2, \dots, n$,

або у векторній формі

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{2}$$

де $\mathbf{x}$ – n-мірний вектор змінних стану (координат системи); $\mathbf{u}$ – m-мірний вектор керувань,

а критерієм оптимальності процесу виступає функціонал

$$I(x,u) = \int_{t_0}^{t_k} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt, \tag{3}$$

де $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ - неперервна функція, що має неперервні часткові похідні по x_i,

то у відповідності із принципом максимуму складається гамільтоніан (функція Гамільтона)

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{j=0}^{n} p_j f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{4}$$

де $\mathbf{p}(t)$ - $n+1$-мірна вектор-функція.

Для визначення наперед невідомих допоміжних функцій p_j вводиться додаткова система рівнянь

$$\frac{dp_i}{dt} = -\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_j(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_i} p_j, \tag{5}$$

$i = 0,1,\ldots,n$,

де додаткова координата стану $x_0(t)$ визначається з рівняння

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{6}$$

Системи рівнянь (1) та (5), а також рівняння (6) за допомогою гамільтоніана $H(\mathbf{p}, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ об'єднуються в одну гамільтонову систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \; i = 0,1,\ldots,n; \tag{7}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \; i = 0,1,\ldots,n. \tag{8}$$

Задача оптимальної швидкодії є задачею оптимізації, коли функціоналом, який необхідно мінімізувати, є час переходу системи із стану $\mathbf{x}_{t_0}$ у стан $\mathbf{x}_{t_k}$. Тоді функціонал має вигляд

$$I(x,u)=\int_{t_0}^{t_k} dt = t_k - t_0 = \min . \qquad (9)$$

Отже, при визначенні оптимальної швидкодії підінтегральна функція у (3) $f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})$ дорівнює одиниці. Штучні величини із нульовими індексами у (7) та (8) тоді не потрібні, і гамільтонова система рівнянь при розв`язку задачі про оптимальну швидкодію матиме вигляд

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\ i=1,\ldots,n; \qquad (10)$$

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\ i=1,\ldots,n. \qquad (11)$$

Нехай серводвигун як об`єкт керування позиційного електропривода подається диференціальним рівнянням [9]

$$T\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{dx(t)}{dt}=K\cdot u(t). \qquad (12)$$

Необхідно знайти алгоритм керування, який переводить об`єкт (12) із стану $x(0)=0;\ \frac{dx(0)}{dt}=0$ у стан $x(t_k)=x_k;\ \frac{dx(t_k)}{dt}=0$ за мінімальний час, якщо на керуючу дію накладено обмеження $|u|\le u_{\max}$.

Позначимо регульовану фазову координату $x=x_1$. Запишемо динамічну характеристику об`єкту (12) у просторі станів:

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t); \qquad (13)$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=-\frac{1}{T}x_2(t)+\frac{K}{T}u(t), \qquad (14)$$

де $x_1(t)$ - положення об`єкту, $x_2(t)$ - швидкість руху об`єкту.

Складемо гамільтоніан

$$H = p_1 \cdot x_2 + p_2 \cdot (-\frac{1}{T} x_2 + \frac{K}{T} u). \qquad (15)$$

Рівняння для визначення допоміжних функцій p_1 та p_2 мають вигляд

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \; i = 1{,}2. \qquad (16)$$

Тоді з (15) та (16) отримаємо гамільтонову систему рівнянь:

$$\frac{dp_1}{dt} = 0; \qquad (17)$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -p_1 + \frac{1}{T} p_2. \qquad (18)$$

Розв`язуючи рівняння (17), (18), визначимо p_1 та p_2:

$$p_1 = C_0 = const; \qquad (19)$$

$$p_2 = C_2 e^{\frac{t}{T}} - C_0. \qquad (20)$$

З гамільтоніана (15) видно, що керуюча дія u входить тільки у другий доданок, отже її значення, що доставляє максимум гамільтоніану H, з урахуванням обмеження $|u| \le u_{\max}$ залежить від знаку p_2. Коли p_2 - від`ємний $u = -u_{\max}$, коли p_2 - додатний $u = +u_{\max}$.

Із (20) виходить, що функція p_2 змінює свій знак не більше одного разу за будь-який час τ. Отже закон зміни оптимального керування є кусково-постійною функцією, що має не більше двох знакопостійних інтервалів:

$$u(t) = \pm u_{\max}. \qquad (21)$$

У випадку оптимального керування серводвигунами максимальним значенням керуючої дії зазвичай є номінальна напруга живлення $u_{\max} = U$.

Закон зміни оптимального керування як функції часу знайдемо шляхом розв`язку нелінійного рівняння (12) на вказаних двох інтервалах, використовуючи метод припасування [10]. Тобто, кінцеві значення вихідної величини та її похідної на першій ділянці вважатимемо за початкові умови для другої ділянки.

Розв`язок рівняння (12) на першому інтервалі матиме вигляд:

$$x(t) = C_1' + C_0' t + C_2' e^{-\frac{t}{T}}, \tag{22}$$

де сталі інтегрування $C_0' = KU$, $C_2' = KUT$, $C_1' = -KUT$.

Похідна за часом від регульованої координати:

$$\frac{dx(t)}{dt} = C_0' - \frac{1}{T} C_2' e^{-\frac{t}{T}}. \tag{23}$$

Розв`язок рівняння (12) на другому інтервалі матиме вигляд:

$$x(t) = C_1'' + C_0'' t + C_2'' e^{-\frac{t}{T}}; \tag{24}$$

де сталі інтегрування $C_0'' = -KU$, $C_2'' = -\dfrac{KUT}{e^{-\frac{t_k}{T}}}$, $C_1'' = x_k + KUt_k + KUT$.

Похідна за часом від регульованої координати на другому інтервалі:

$$\frac{dx(t)}{dt} = C_0'' - \frac{1}{T} C_2'' e^{-\frac{t}{T}}. \tag{25}$$

Стикуємо розв`язки (22) та (24), (23) та (25) на двох інтервалах у момент часу t_1, що відповідає зміні полярності напруги живлення:

$$C_1' + C_0' t_1 + C_2' e^{-\frac{t_1}{T}} = C_1'' + C_0'' t_1 + C_2'' e^{-\frac{t_1}{T}}, \tag{26}$$

$$C_0' - \frac{1}{T} C_2' e^{-\frac{t_1}{T}} = C_0'' - \frac{1}{T} C_2'' e^{-\frac{t_1}{T}}. \tag{27}$$

Після підстановки значень сталих інтегрування з (22) та (24) та перенесення правих частину рівнянь (26) та (27) вліво отримаємо:

$$2KUt_1 - x_k - KUt_k - 2KUT + KUT(1 + e^{\frac{t_k}{T}})e^{-\frac{t_1}{T}} = 0, \tag{28}$$

$$2KUT - KUT(1 + e^{\frac{t_k}{T}})e^{-\frac{t_1}{T}} = 0. \tag{29}$$

Після деяких перетворень з (29) отримаємо:

$$e^{\frac{t_k}{T}} - 2e^{\frac{t_1}{T}} + 1 = 0. \tag{30}$$

Додавши до (28) рівняння (29) та скоротивши ліву частину на KU, отримаємо:

$$2t_1 - \frac{x_k}{KU} - t_k = 0, \tag{31}$$

Звідки

$$t_k = 2t_1 - \frac{x_k}{KU}. \qquad (32)$$

Підставимо (32) у (30):

$$e^{\left(\frac{2t_1}{T} - \frac{x_k}{KUT}\right)} - 2e^{\frac{t_1}{T}} + 1 = 0. \qquad (33)$$

Нехай об`єктом керування буде серводвигун, якому треба перемістити клапан на відстань x_k =2,1 *см* із точною зупинкою у цьому місці за мінімальний час. Динаміка серводвигуна описується рівнянням (12) з параметрами K =0,023 *см·(с·В)*$^{-1}$, T =0,6 *с*, номінальна напруга живлення серводвигуна U =220 *В*.

Після підстановки числових значень параметрів об`єкта керування рівняння (33) матиме вигляд

$$e^{\left(\frac{2t_1}{0,6} - \frac{2.1}{0.023 \cdot 220 \cdot 0.6}\right)} - 2e^{\frac{t_1}{0,6}} + 1 = 0. \qquad (34)$$

Його розв`язок у пакеті Mathcad дає час зміни знаку напруги живлення серводвигуна t_1 =0,74 *с*. Тоді час переміщення клапану на відстань x_k =2,1 *см* згідно з (32) дорівнюватиме

$$t_k = 2 \cdot 0,74 - \frac{2,1}{0,023 \cdot 220} = 1,06 \text{ с}. \qquad (35)$$

Закон зміни оптимального керування наведено на рис. 1.

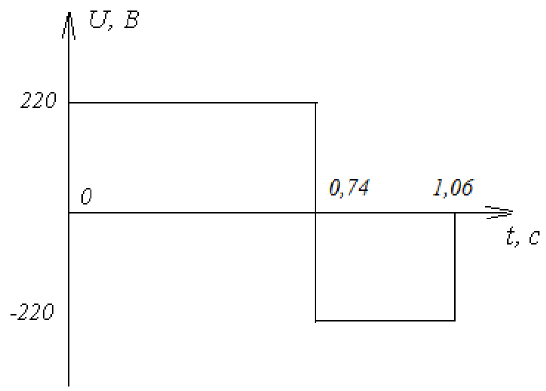

Рис. 1. Закон зміни оптимального керування

Оптимальна траєкторія переміщення клапану наведена на рис. 2.

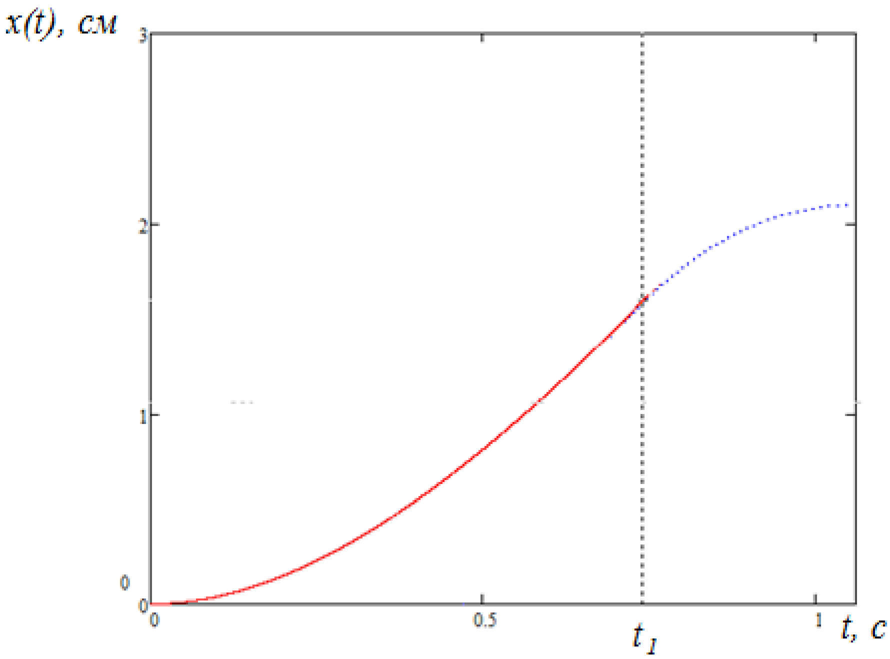

Рис. 2. Оптимальна траєкторія переміщення клапану

Висновки і перспективи. На прикладі задачі отримання максимальної швидкодії позиційного електропривода з релейним керуванням за допомогою принципу максимуму визначено гамільтонову систему рівнянь для задач оптимальної швидкодії. Приведено аналітичну методику знаходження оптимального за критерієм максимальної швидкодії закону релейного керування для таких задач. Узагальнюючи, можна сказати, що будь-яку задачу оптимізації керування можливо розглядати як задачу про швидкодію, якщо до системи рівнянь об\`єкту керування додати додаткову координату стану, чия похідна дорівнює підінтегральній функції заданого критерію оптимальності, і тоді задача мінімізації функціонала, що визначає цей критерій оптимальності стане еквівалентною задачі про оптимальну швидкодію для розширеної системи рівнянь.

Список використаних джерел

1. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. Л: Энергия, 1977. 280 с.
2. Krotov V.F. Global methods in optimal control theory. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1996. 384 p.
3. Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О. Оптимізація перехідних режимів руху механічних систем прямим варіаційним методом. Київ-Ніжин: ПП Лисенко М. М. 2010. 184 с.

4. Григоров О.В., Ловейкін В.С. Оптимальне керування рухом механізмів вантажопідйомних машин. К.: ІЗМН, 1997. 264 с.

5. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О. Оптимізація руху вантажопідйомного крана із траверсною підвіскою вантажу методом динамічного програмування. *Машинобудування*. 2012. №10. С. 15-32.

6. Шуруб Ю.В. Статистична оптимізація частотно регульованих асинхронних електроприводів при скалярному керуванні. *Електротехніка і Електромеханіка.* 2017. №1. С.26–30. https://doi.org/10.20998/2074-272X.2017.1.05

7. Григоров О.В., Петренко Н.О. Вантажопідйомні машини. Х.: НТУ „ХПІ”, 2005. 304 с.

8. Ловейкін В. С., Ромасевич Ю. О. Динаміка і оптимізація режимів руху мостових кранів. Київ: ТЦ Комрінт, 2016. 314 с.

9. Ключев В. И. Теория электропривода. М.: Энергоатомиздат, 2001. 704 с.

10. Головінський Б.Л., Шуруб Ю.В., Лисенко В.П. Теорія автоматичного управління. Київ: Вид. Центр НУБІП України, 2012. 240 с.

References

1. Petrov Ju. P. (1977). Variacionnye metody teorii optimal'nogo upravlenija [Variational methods of optimal control theory]. Energija, 280.

2. Krotov V.F. (1996). Global methods in optimal control theory. New York, Basel, Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 384.

3. Loveykin V. S., Romasevich Yu. O. (2010). Optimizatsiya perehidnih rezhimIv ruhu mehanichnih sistem pryamim variatsiynim metodom [Optimization of transients regim es of movement of mechanical systems with the direct variational method]. Kiyv – Nizhyn, 184.

4. Grigorov O.V., Lovejkin V.S. (1997). Optymalne keruvannia rukhom mekhanizmiv vantazhopidjomnykh mashyn [Optimal control of the movement of lifting machinery mechanisms]. Kyiv: IZMN, 264.

5. Loveykin V. S., Romasevich Yu. O. (2012). Optymizatsiya rukhu vantazhopidyomnoho krana iz traversnoyu pidviskoyu vantazhu metodom dynamichnoho prohramuvannya [Optimization of the movement of a crane with a traverse suspension of the load using the dynamic programming method]. Mechanical engineering, 10, 15-32.

6. Shurub Yu. V. (2017). Statystychna optymizatsiya chastotno rehulʹovanykh asynkhronnykh elektropryvodiv pry skalyarnomu keruvanni [Statistical optimization of frequency regulated induction electric drives with scalar control]. Electrical Engineering & Electromechanics, 1, 26–30. https://doi.org/10.20998/2074-272X.2017.1.05

7. Grigorov O.V., Petrenko V.S. (2005). Vantazhopidjomni mashyny [Lifting machines]. Kharkiv, Ukraine: NTU „KhPI”, 304.

8. LoveykIn V. S., Romasevich Yu. O. (2016). Dinamika i optimizatsiya rezhimiv ruhu mostovih kraniv [Dynamics and optimization of traffic overhead cranes]. Kyiv: TsP KOMPRINT, 314.

9. Kliuchev V.I. (2001). Teoria elektroprivoda [Theory of electric drive]. Moskow: Energoatomizdat, 704.

10. Golovinskyi B.L., Shurub Yu.V., Lysenko V.P. (2012). Teoria avtomatychnogo upravlinnia [Theory of automatic control]. Kyiv: NUBIPU, 240.

SPEED OPTIMIZATION OF POSITIONAL ELECTRIC DRIVES USING THE MAXIMUM PRINCIPLE

Yu. Shurub, A. Rudenskyi

Abstract. *The performance quality of many technological processes depends to a large extent on the inertial properties of executive devices. Positional electric drives with servomotors, which have integrating properties, are widely used as executive devices of automatic control systems. Optimizing the speed of such electric drives makes it possible to improve the quality of technological processes, reduce dynamic adjustment errors caused by the influence of the inertia of the executive device.*

The maximum principle is a convenient means of determining the optimal control law as a function of phase coordinates, that is, a means of synthesizing optimal regulators in closed systems, and a function of time, that is, a means of finding optimal software controls in open systems, which are positional electric drives with relay control.

The purpose of this work is to substantiate the application of the maximum principle for the problem of optimizing the speed of positional electric drives and to find an analytical solution to this problem.

Key words: ***optimal control, maximum principle, electric drive, optimality criterio***