

УДК 621.548.5

DOI 10.31548/energiya1(83).2026.110

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВОРОТНО-ЛОПАТЕВИХ ВІТРОЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК ЗА УМОВ СТОХАСТИЧНОГО ВІТРОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ**В. Ю. Рамиш, кандидат технічних наук, доцент****Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України "Бережанський агротехнічний інститут"**<https://orcid.org/0000-0002-1279-7585>E-mail: ramsh_v@ukr.net**М. В. Потапенко, кандидат технічних наук, доцент****Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України "Бережанський агротехнічний інститут"**<https://orcid.org/0000-0003-2880-613X>E-mail: m.potapenko19@gmail.com**В. Л. Шаршонь, старший викладач****Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України "Бережанський агротехнічний інститут"**<https://orcid.org/0000-0001-9153-4734>E-mail: vsharshon@gmail.com

Анотація. Інтеграція поворотно-лопатевиx вітроенергетичних установок в сучасні енергетичні системи набуває все більшого значення у зв'язку зі стрімким зростанням частки відновлюваних джерел енергії. Водночас робота вітроенергетичних установок значно відрізняється від традиційних джерел генерації, оскільки її продуктивність безпосередньо залежить від швидкості та напрямку вітру, які мають випадковий характер. Це призводить до значних коливань механічних та електричних параметрів системи, ускладнює процес регулювання частоти та активної потужності генератора і створює підвищені вимоги до стабільності роботи енергосистеми..

Метою дослідження є розробка математичної моделі поворотно-лопатевої вітроенергетичної установки з урахуванням стохастичного вітрового навантаження для аналізу динаміки установки та налаштування алгоритмів керування частотою вітрогенератора.

Математичне моделювання базується на рівняннях обертального руху ротора та вітроколеса, описаних через крутний момент і момент сил опору, а також на рівняннях руху повітряного потоку з урахуванням турбулентності та випадкових змін швидкості і напрямку. Для цифрової реалізації алгоритмів керування використовується дискретизація рівнянь і рекурентні співвідношення для кутової швидкості ротора та кута орієнтації лопатей. Спрошене подання крутного моменту та моменту опору у вигляді поліноміальних залежностей забезпечує достатню точність при мінімальних обчислювальних витратах і дозволяє ефективно тестувати алгоритми керування у режимі реального часу.

Запропонована модель адекватно відтворює динамічні характеристики установки, враховує стохастичні фактори вітру та дозволяє реалізувати цифрові системи керування з високою точністю орієнтації лопатей. Використання моделі забезпечує підвищення стабільності та ефективності роботи поворотно-лопатевиx вітроенергетичних установок в реальних умовах експлуатації, гарантує надійне виробництво електроенергії за змінних погодних умов та зберігає ключові динамічні властивості системи при мінімальних витратах ресурсів.

Ключові слова: вітроенергетична установка, математична модель, стохастичне вітрове навантаження, орієнтація лопатей, алгоритм керування

Вступ. Стрімке зростання частки відновлюваних джерел енергії в енергетичних балансах різних країн зумовлює підвищені вимоги до забезпечення стабільності роботи вітроенергетичних установок (ВЕУ). На відміну від традиційних джерел генерації, робота

ВЕУ визначається випадковим і непередбачуваним характером вітрового потоку [1-4], що призводить до суттєвих коливань механічних і електричних параметрів системи.

За умов інтеграції ВЕУ в енергосистему особливого значення набувають алгоритми регулювання кута орієнтації лопатей та системи повороту установки за напрямком вітру. Ефективність таких алгоритмів безпосередньо залежить від наявності адекватної математичної моделі, здатної відтворювати реальні динамічні процеси за мінімальної обчислювальної складності.

Запропонований підхід дозволяє поєднати врахування стохастичних факторів із можливістю реалізації моделі в цифрових системах керування, що підвищує надійність і ефективність роботи поворотно-лопатевих ВЕУ в реальних умовах експлуатації.

Огляд літературних джерел. При аналізі роботи вітроенергетичних установок застосовуються різні підходи до їх моделювання, що включають високоточні аеродинамічні моделі, спрощені динамічні моделі та врахування стохастичних характеристик вітру [5-9]. Високоточні моделі дозволяють детально оцінювати турбулентність потоку та розподіл навантажень на лопаті, але потребують значних ресурсів для моделювання. Спрощені підходи зберігають ключові динамічні властивості системи і дозволяють ефективно реалізовувати алгоритми керування у режимі реального часу. Врахування випадкових змін швидкості та напрямку вітру забезпечує більш точне відтворення поведінки вітроенергетичної установки.

Крім того, застосування адаптивних методів керування кутом лопатей та частотою обертання ротора підвищує стабільність роботи та ефективність виробництва електроенергії [10-12].

Мета дослідження – розробка математичної моделі поворотно-лопатевої вітроенергетичної установки з урахуванням стохастичного вітрового навантаження для аналізу динаміки установки та налаштування алгоритмів керування частотою вітрогенератора.

Матеріали і методи дослідження. Математичне моделювання перехідних процесів у вітроенергетичних установках базується на використанні рівнянь аеродинаміки та рівнянь Нав'є-Стокса у поєднанні з рівнянням нерозривності [13-14]. Таке моделювання дозволяє враховувати вплив змінних крайових умов, що залежать від часу, на поведінку потоку повітря та динаміку лопатей вітротурбіни.

Для перевірки ефективності алгоритмів керування сервоприводами лопатей вітроенергетичних установок доцільно застосовувати спрощену математичну модель, яка забезпечує достатню точність при мінімальній складності обчислень. Параметри цієї моделі визначаються експериментально і дозволяють адекватно відтворювати основні динамічні властивості установки без необхідності вирішення повної системи диференціальних рівнянь. Це забезпечує ефективне тестування алгоритмів керування та оцінку їх впливу на роботу вітроенергетичної установки в реальних умовах.

Результати досліджень та їх обговорення. Рівняння динаміки обертального руху вітроколеса та ротора генератора має вигляд [15]:

$$J_h \frac{d\omega}{dt} = M_k(t) - M_o(t), \quad (1)$$

де J_h – сумарний момент інерції вітроколеса, ротора генератора та горизонтального валу відносно осі вітроколеса; $M_k(t)$ – крутний момент, що діє на вітроколесо з сторони повітряного потоку; $M_o(t)$ – момент сил опору.

У режимі холостого ходу генератора момент сил опору створюється силами внутрішнього тертя ВЕУ. У навантаженому режимі $M_o(t)$ має складову, викликану електромагнітною взаємодією ротора та статора [16].

У загальному випадку крутний момент можна представити поліномом ступеня n відносно об'ємної витрати $Y(t)$ повітря, що проходить через площу S проекції вітроколеса на площину, перпендикулярну повітряному потоку:

$$M_k(t) = k_n \cdot Y^n(t) + k_{n-1} \cdot Y^{n-1}(t) + \dots + k_2 \cdot Y^2(t) + k_1 \cdot Y(t). \quad (2)$$

У виразі (2) коефіцієнти $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n$ залежить від кількості лопатей, їх форми та кута орієнтації θ відносно власної осі обертання.

Момент сил опору представимо поліномом ступеня m відносно кутової швидкості обертання:

$$M_o(t) = l_m \cdot \omega^m(t) \pm l_{m-1} \cdot \omega^{m-1}(t) \pm \dots \pm l_2 \cdot \omega^2(t) \pm l_1 \cdot \omega(t) \pm l_0, \quad (3)$$

де $l_0, l_1, l_2, \dots, l_m$ – коефіцієнти опору генератора та редуктора.

Таким чином, рівняння (1) є нелінійним диференціальним рівнянням відносно кутової швидкості обертання вітроколеса $\omega(t)$.

Після дискретизації часу $t_q = q \cdot \Delta t + t_0$ при малому Δt кутове прискорення можна замінити відношенням:

$$\varepsilon(t_q) \approx \frac{w_{q+1} - w_q}{\Delta t}, \quad (4)$$

де q – крок дискретизації.

Рівняння (1) з урахуванням виразів (2) - (4) приводить до рекурентної формули:

$$w_{q+1} = w_q + \frac{\Delta t}{J_h} \cdot [(k_n \cdot Y_q^n + k_{n-1} \cdot Y_q^{n-1} + \dots + k_2 \cdot Y_q^2 + k_1 \cdot Y_q) - (l_m \cdot w_q^m \pm l_{m-1} \cdot w_q^{m-1} \pm \dots \pm l_2 \cdot w_q^2 \pm l_1 \cdot w_q \pm l_0)]. \quad (5)$$

Частота обертання ротора генератора становить $f_q = w_q / 2\pi$.

У математичній моделі першого порядку $n = m = 1$, а тому залежності (2) та (3) набувають лінійного вигляду:

$$M_\kappa(t) = k_1[\theta(t)] \cdot Y(t); \quad (6)$$

$$M_o(t) = \begin{cases} l_1 \cdot \omega(t) + l_0, & \omega(t) > 0; \\ l_1 \cdot \omega(t) - l_0, & \omega(t) < 0; \\ M_\kappa(t), & \omega(t) = 0, |M_\kappa(t)| \leq l_0; \\ l_0, & \omega(t) = 0, M_\kappa(t) > l_0; \\ -l_0, & \omega(t) = 0, M_\kappa(t) < -l_0, \end{cases} \quad (7)$$

Переорієнтація лопатей вітроколеса за допомогою сервоприводів призводить до зміни коефіцієнта $k_1[\theta(t)]$ пропорційності між крутним моментом і витратою повітря через площу S . Функціональна залежність $k_1(\theta)$, а також коефіцієнти l_0 і l_1 визначаються експериментальним шляхом. Об'ємні витрати повітря через площу S рівні:

$$Y(t) = \pi \cdot R^2 \cdot u(t) \cdot \cos(\beta(t) - \alpha(t)), \quad (8)$$

де R – радіус вітроколеса; $u(t)$ – миттєва швидкість повітряного потоку, усереднена за площею S ; $\alpha(t)$ – кут орієнтації хвоста ВЕУ відносно нерухомої горизонтальної осі; $\beta(t)$ – кут орієнтації вектора швидкості повітряного потоку.

Поведінка характеристик повітряного потоку задається рекурентними співвідношеннями:

$$u(t_{q+1}) = u(t_q) + A_q \cdot \Delta t, \quad (9)$$

$$\gamma(t_{q+1}) = \gamma(t_q) + C_q \cdot \Delta t, \quad (10)$$

де A_q – миттєве прискорення повітряного потоку, усереднене за площею S ; C_q – миттєва швидкість зміни кута орієнтації вектора швидкості повітряного потоку.

Величини A_q і C_q представляють собою випадкові послідовності, що задані за нормальним законом розподілу з нульовим математичним сподіванням. Значення A_q є мірою поривчастості вітру, C_q характеризує завихреність повітряного потоку [17].

Стабілізатор хвостової частини ВЕУ орієнтується відповідно до напрямку вітру, а його кутове положення задається диференціальним рівнянням:

$$J_z \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M_1(t) - M_2(t), \quad (11)$$

де J_z – момент інерції ВЕУ відносно вертикальної осі опори; $M_1(t)$ – крутний момент, що створюється повітряним потоком на хвостовій частині установки; $M_2(t)$ – момент сил опору ВЕУ.

Крутний момент $M_1(t)$ визначається як:

$$M_1(t) = \Phi \cdot L \cdot \rho(t) \cdot u^2(t) \cdot \sin(\beta(t) - \alpha(t)), \quad (12)$$

де Φ – площа хвостової частини ВЕУ; L – довжина плеча хвостової частини; $\rho(t)$ – усереднена густина повітря.

Момент опору ВЕУ при повороті навколо вертикальної осі у лінійному наближенні рівний:

$$M_2(t) = \begin{cases} \sigma_1 \cdot \frac{d\alpha}{dt} + \sigma_0, & \frac{d\alpha}{dt} > 0; \\ \sigma_1 \cdot \frac{d\alpha}{dt} - \sigma_0, & \frac{d\alpha}{dt} < 0; \\ M_1(t), & \frac{d\alpha}{dt} = 0, |M_1(t)| \leq \sigma_0; \\ \sigma_0, & \frac{d\alpha}{dt} = 0, M_1(t) > \sigma_0; \\ -\sigma_0, & \frac{d\alpha}{dt} = 0, M_1(t) < -\sigma_0, \end{cases} \quad (13)$$

де σ_0 – статичний момент опору поворотного механізму ВЕУ; σ_1 – коефіцієнт динамічного опору поворотного механізму ВЕУ.

Алгоритм керування сервоприводом лопатей вітроколеса є рекурентним співвідношенням для кута $\theta(t_q)$ орієнтації лопатей:

$$\theta_{q+1} = \begin{cases} \theta_q - \Delta\theta, & \text{якщо } (w_q > \Omega) \cap (0 < \theta_q \leq \Theta); \\ \theta_q + \Delta\theta, & \text{якщо } (w_q > \Omega) \cap (0 \leq \theta_q < \frac{\pi}{2}); \\ \theta_q + \Delta\theta, & \text{якщо } (w_q < \Omega) \cap (0 \leq \theta_q < \Theta); \\ \theta_q - \Delta\theta, & \text{якщо } (w_q < \Omega) \cap (0 < \theta_q \leq \frac{\pi}{2}); \\ \theta_q, & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad (14)$$

де Ω – кутова швидкість обертання вітроколеса, при якій досягається стандартна частота $f = 50$ Гц струму на виході генератора; Θ – кут орієнтації лопатей вітроколеса, що відповідає максимуму функції $k_1(\theta)$.

При цьому кутова швидкість обертання вітроколеса становить:

$$\Omega = \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{p \cdot N}, \quad (15)$$

де p – кількість пар полюсів генератора; N – передатне число редуктора.

Орієнтація лопатей вітроколеса на основі даного дискретного алгоритму керування є можливою за допомогою крокових серводвигунів. Кроковий електропривод забезпечує високу точність кутової орієнтації лопатей і здатний працювати в режимі утримання лопатей у заданому положенні.

Висновки. Розроблена математична модель динаміки поворотного-лопатевої вітроенергетичної установки з урахуванням стохастичного вітрового навантаження, яка адекватно відтворює вплив швидкості та напрямку вітру на роботу системи. Модель забезпечує точність відтворення основних динамічних характеристик із мінімальним

ресурсним навантаженням, що робить її придатною для використання в цифрових системах керування та при налаштуванні алгоритмів регулювання кутів лопатей і частоти обертання ротора.

Спрощене подання крутного моменту та моменту сил опору у вигляді поліноміальних залежностей дозволяє ефективно оцінювати динамічні реакції ВЕУ без необхідності розв'язання повної системи нелінійних диференціальних рівнянь, значно прискорюючи процес тестування алгоритмів керування. Використання такого підходу зберігає ключові динамічні властивості системи та забезпечує ефективну реалізацію алгоритмів керування в режимі реального часу.

Запропонована математична модель може бути використана для оптимізації налаштування регуляторів частоти та активної потужності поворотно-лопатевих вітроенергетичних установок, забезпечуючи підвищення їх стабільності та ефективності роботи.

Список використаних джерел

1. Кузнецов М.П. Особливості комбінованих енергосистем з відновлюваними джерелами енергії: монографія. К.: ІВЕ, 2022. 142 с.
2. Васьо П.Ф. Розрахунок показників технічної ефективності застосування вітроелектричних установок за результатами строкових вимірювань швидкості вітру. Технічна електродинаміка. 2001. №6. С. 45-49.
3. Carta J. A., Ramirez P., Bueno C. A joint probability density function of wind speed and direction for wind energy analysis. *Energy Conversion and Management*. 2008. Vol. 49. P.1309–1320.
4. Eisenhut C., Krug F. Wind-turbine model for system simulations near cut-in wind speed. *IEEE Trans. on Energy Conversion*. 2007. Vol. 22. No. 2. P. 414-420.
5. Olsson M., Perninge M., Soder L. Modeling real-time balancing power demands in wind power systems using stochastic differential equations. *Electric Power Systems Research*. 2010. № 80. P. 966–974.
6. Кравчишин В.С., Медиковський М.О., Галуцак М.О. Моделювання енергетичного потенціалу вітрової електричної станції. Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Інформаційні системи та мережі. 2016. № 854. С. 80-87.
7. Alexiadis M., Dokopoulos P., Sahsamanoglou H. Wind speed and power forecasting based on spatial correlation models. *IEEE Trans. Energy Convers.* 1991. Vol. 14, No. 3. P. 836-842.
8. Spalart P. R., Allmaras S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *AIAA Paper*. 1992. Vol. 12. № 1. P. 439–478.
9. Кузнецов М. П. Моделювання параметрів роботи енергосистеми, які носять випадковий характер. Відновлювана енергетика. 2012. № 3. С. 5–9.
10. Gary L. *Wind Energy Systems*. Manhattan KS.: Electronic edition, 2006. 446 p.
11. Козирський В. В., Трегуб М. І., Петренко А. В. Обґрунтування принципів адаптивного регулювання навантаження сільськогосподарських автономних вітроелектричних установок. Науковий вісник Національного університету біоресурсів та природокористування України. Серія «Техніка та енергетика АПК». 2013. Вип. 166. Ч.3. С. 22 – 31.
12. Щур І. З., Щур В. І. Оптимальне керування вітроустановками різної потужності в умовах турбулентних вітрів. Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Електроенергетичні та електромеханічні системи. 2012. № 736. С. 146- 152
13. Редчиць Д.О., Моїсеєнко С.В., Дешко Г.Є. Математичне моделювання аеродинаміки роторів вертикально-осьових вітроенергетичних установок на основі нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса. Прикладні питання математичного моделювання. 2024. Том 7. №2. С. 221-231.
14. Rogers S. E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations. *AIAA Journal*. 1990. Vol. 28, № 2. P. 253–262.
15. Кузьо І.В. Корендій В.М. Теоретичні аспекти моделювання вітроенергетичних установок. Вісник Тернопільського національного технічного університету. 2011. Том 16. № 3. С. 85 - 94.
16. Пекур П.П. Режимні обмеження на параметри роботи вітроелектричних установок під навантаженням: навчальний посібник. К.: Технічна електродинаміка, 2013. 175 с.
17. Лук'яненко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В., Геращенко О.В. Аналіз впливу вітрового навантаження на стохастичну поведінку паливного резервуара. Опір матеріалів і теорія споруд. 2016. Вип. 97. С. 152-171.

MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC CHARACTERISTICS OF ROTARY-BLADES WIND POWER INSTALLATIONS UNDER STOCHASTIC WIND LOADING CONDITIONS

V. Ramsh, M. Potapenko, V. Sharshon

Abstract. *The integration of rotary-blades wind power installations into modern energy systems is becoming increasingly important due to the rapid growth of the share of renewable energy sources. At the same time, the operation of wind power installations is significantly different from traditional sources of generation, as their performance directly depends on the speed and direction of the wind, which are random in nature. This leads to significant fluctuations in the mechanical and electrical parameters of the system, complicates the process of regulating the frequency and active power of the generator, and creates increased requirements for the stability of the power system as a whole.*

The purpose of the study is to develop a mathematical model of a rotary-blade wind power installation taking into account stochastic wind load for analyzing the dynamics of the installation and tuning the wind generator frequency control algorithms.

Mathematical modeling is based on equations of rotational motion of the rotor and wind wheel, described through torque and moment of resistance forces, as well as on equations of air flow motion, taking into account turbulence and random changes in speed and direction. For the digital implementation of control algorithms, discretization of equations and recurrence relations for the rotor angular velocity and blade orientation angle are used. A simplified representation of torque and resistance in the form of polynomial dependencies provides sufficient accuracy with minimal computational costs and allows for effective testing of control algorithms in real time.

The proposed model adequately reproduces the dynamic characteristics of the installation, takes into account stochastic wind factors, and allows for the implementation of digital control systems with high blade orientation accuracy. The use of the model ensures increased stability and efficiency of rotary-blade wind power installations in real operating conditions, guarantees reliable electricity production under variable weather conditions, and preserves the key dynamic properties of the system with minimal resource consumption.

Keywords: *wind power installation, mathematical model, stochastic wind load, blade orientations, control algorithm.*

References

1. Kuznetsov, M.P. (2022). *Features of combined energy systems with renewable energy sources: monograph.* Kyiv: IBE.
2. Vasko, P.F. (2001). Calculation of technical efficiency indicators of wind power plants based on the results of real-time wind speed measurements. *Technical Electrodynamics*, 6, 45-49.
3. Carta, J. A., Ramirez, P., Bueno, C. (2008). A joint probability density function of wind speed and direction for wind energy analysis. *Energy Conversion and Management*, 49, 1309–1320.
4. Eisenhut, C., Krug, F. (2007). Wind-turbine model for system simulations near cut-in wind speed. *IEEE Trans. on Energy Conversion*, 22(2), 414-420.
5. Olsson, M., Perninge, M., Soder, L. (2010). Modeling real-time balancing power demands in wind power systems using stochastic differential equations. *Electric Power Systems Research*, 80, 966–974.
6. Kravchyshyn, V.S., Medykovskyi, M.O., Galushchak, M.O. (2016). Modeling the energy potential of a wind power plant. *Herald of the National University "Lviv Polytechnic". Information Systems and Networks*, 854, 80-87.
7. Alexiadis, M., Dokopoulos, P., Sahsamanoglou, H. (1991). Wind speed and power forecasting based on spatial correlation models. *IEEE Trans. Energy Convers.*, 14(3), 836-842.
8. Spalart, P. R., Allmaras, S. R. (1992). A one-equation turbulence model for aerodynamic flow. *AIAA Paper*, 12(1), 439-478.
9. Kuznetsov, M. P. (2012). Modeling of power system operation parameters that are of a random nature. *Renewable Energy*, 3, 5–9.
10. Gary, L. (2006). *Wind Energy Systems.* Manhattan KS.: Electronic edition.
11. Kozyrskyi, V. V., Tregub, M. I., Petrenko, A. V. (2013). Substantiation of the principles of adaptive load regulation of agricultural autonomous wind power plants. *Scientific Herald of the National University of Life Resources and Environmental Management of Ukraine. Technology and Energy of the Agricultural Complex*, 166(3), 22-31.

12. Shchur I. Z., Shchur V. I. (2012). Optimal control of wind turbines of different power in turbulent wind conditions. *Herald of the National University "Lviv Polytechnic". Electrical power and electromechanical systems*, 736, 146-152.
13. Redchyts, D.O., Moiseyenko, S.V., Deshko, G.E. (2024). Mathematical modeling of aerodynamics of rotors of vertical-axis wind power plants based on unsteady Navier-Stokes equations. *Applied problems of mathematical modeling*, 7(2), 221-231.
14. Rogers, S. E., Kwak, D. (1990) An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations. *AIAA Journal*, 28(2), 253-262.
15. Kuzio, I.V. Korendiy, V.M. (2011). Theoretical aspects of modeling wind power plants. *Herald of the Ternopil National Technical University*, 16(3), 85-94.
16. Pekur, P.P. (2013). Operating restrictions on the parameters of wind power plants under load: study guide. Kyiv: Tekhnichna elektrodinamika.
17. Lukyanchenko, O.O., Vorona, Yu.V., Kostina, O.V., Gerashchenko, O.V. (2016). Analysis of the influence of wind load on the stochastic behavior of a fuel tank. *Strength of materials and theory of structures*, 97, 152-171.