

УДК 514.18

MAPLE-МОДЕЛІ РУХУ ЧАСТИНКИ ПО НЕРУХОМИХ ШОРСТКИХ ПОВЕРХНЯХ 2-ГО ПОРЯДКУ

А. В. Несвідомін, кандидат технічних наук

e-mail: vit1986@ua.fm

Анотація. Розглянуто використання розроблених моделей в середовищі символної алгебри Maple при дослідженнях траєкторно-кінематичних властивостей руху частинки по всіх поверхнях 2-го порядку.

Ключові слова: *матеріальна частинка, шорстка поверхня, циліндр, однопорожнинний гіперболоїд обертання, параболоїд обертання*

Рух частинок матеріалу по шорстких робочих поверхнях складної форми має місце при переміщенні сипкої сировини трубопроводами, подачі мінеральних добрив туконапрямниками до розсіювального диска, сепарування зернового вороху нахиленими коливальними площинами. Розуміння закономірностей руху частинки по шорсткій поверхні довільного положення в тривимірному просторі дозволяє цілеспрямовано провести розрахунок конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів.

Аналітичне виведення закону руху частинки по шорсткій поверхні зводиться до складання системи диференціальних рівнянь 2-го порядку, шуканими залежностями яких є траєкторія частинки, її швидкість, прискорення, довжина пройденого шляху, сила нормальної реакції, час руху до її зупинки та інші траєкторно-кінематичні характеристики. Послідовність аналітичного виведення системи диференціальних рівнянь і способи її розв'язку є досить трудомісткими.

На противагу, комп'ютерне моделювання руху частинки по поверхні дозволяє зняти громіздкі аналітичні перетворення та забезпечити науковця зручним діалоговим режимом для проведення необхідних обчислювальних експериментів з аналізу руху частинки за різними вихідними умовами її кидання по будь-якій шорсткій поверхні. Але розробка комп'ютерних моделей

руху частинки по поверхні потребує вирішення низки питань теоретичного і практичного характеру, які складають актуальність досліджень. Насамперед, це розробка загального алгоритму автоматичного виведення диференціальних рівнянь закону руху частинки по будь-якій поверхні, яка довільно розташована в просторі; аналіз траєкторно-кінематичних характеристик руху частинки не тільки у часі, але і залежно від положення частинки на поверхні та напрямку її переміщення по поверхні; унаочнення результатів досліджень у вигляді числових даних, графічних зображень та імітаційних моделей відтворення руху частинки по поверхні.

Мета досліджень – розробка Maple-моделей руху частинки по всіх поверхнях 2-го порядку.

Матеріали та методика досліджень. Для циліндра обертання довільного положення:

$$R(u, v) = R[a \cos(u), a \sin(u) \cos(\xi) - v \sin(\xi), a \sin(u) \sin(\xi) + v \cos(\xi)] \quad (1)$$

розроблено три моделі руху частинки, які дозволяють дослідити її траєкторно-кінематичні властивості відповідно від часу t , положення u та напрямку руху a . Виведені закони руху частинки по циліндру від часу t мають такий вигляд:

– в проєкціях на орти u і v тригранника $OuvN$:

$$\begin{cases} Ou := m \frac{a^2}{dt^2} u(t) = - \frac{mf a \frac{d}{dt} u(t) \left(a \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 - g \sin(u(t)) \sin(\xi) \right)}{\sqrt{a^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} - mg \cos(u(t)) \sin(\xi) \\ Ov := m \frac{a^2}{dt^2} v(t) = - \frac{mf \frac{d}{dt} v(t) \left(a \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 - g \sin(u(t)) \sin(\xi) \right)}{\sqrt{a^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} - mg \cos(\xi) \end{cases}, \quad (2)$$

– в проєкціях на орти T і P тригранника $OTPN$:

$$\begin{cases} OT := \frac{m \left(a^2 \frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right)}{\sqrt{a^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} = \frac{-mg \left(a \cos(u(t)) \frac{d}{dt} u(t) \sin(\xi) + \frac{d}{dt} v(t) \cos(\xi) \right)}{\sqrt{a^2 \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left(\frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} \\ \quad mf \left(a \left(\frac{d}{dt} u(t) \right)^2 - g \sin(u(t)) \sin(\xi) \right) \\ OP := -ma \left(\frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) - \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) \right) = mg \left(a \frac{d}{dt} u(t) \cos(\xi) - \frac{d}{dt} v(t) \cos(u(t)) \sin(\xi) \right). \end{cases} \quad (3)$$

Результати досліджень. Окремі результати обчислювальних експериментів з аналізу траєкторій $r(t)$ частинки та її швидкості $V(t)$ залежно від радіуса циліндра a , кута його нахилу $\xi - 90^\circ$, початкової швидкості V_0 та напрямку α_0 кидання частинки, її початкового положення u_0, v_0 та коефіцієнта тертя f представлено на рис. 1. Так, форма траєкторій $r(t)$ частинок по вертикальному циліндру суттєво залежить від кута $\alpha_0 = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ їх кидання, з часом t всі частинки набирають швидкість $V(t)$ вільного падіння (рис. 1,а). Для горизонтального циліндра $\xi = 90^\circ$ характер руху частинки до її повної зупинки суттєво залежить від її початкового положення $[u_0, v_0]$ на поверхні, що впливає на можливий відрив частинки від поверхні (рис. 1, б). Так, частинки з початковим положенням $u_0 = 0.9\pi$ і кутом кидання $\alpha_0 = 60^\circ, 90^\circ$ відірвуться від поверхні горизонтального циліндра в момент $t \approx 0.24c$ - почнуть вільне падіння. В цей момент сила нормальної реакції $F_N(t)$ дорівнює нулю, а графіки швидкості $V(t)$ показують величину швидкості її відриву від поверхні. Частинки з кутом кидання $\alpha_0 = 0^\circ, 30^\circ$ не відірвуться від поверхні горизонтального циліндра. Характер руху частинки по внутрішній поверхні похилого циліндра включає властивості як по вертикальному циліндру, так і по горизонтальному, на що суттєво впливає величина кута ξ відхилення його від вертикального положення [1]. Наприклад, кинуті частинки по похилому $\xi = 80^\circ$ циліндру з однаковим кутом кидання $\alpha_0 = 60^\circ$, початковою швидкістю $V_0 = 4 \text{ м/с}$ і коефіцієнтом тертя $f = 0,3; 0,45$ зупиняться на його поверхні, а частинки з коефіцієнтом тертя $f = 0,01; 0,15$ після зигзагоподібного зменшення їх швидкості до певної величини почнуть її набирати (рис. 1, в). Для горизонтального та похилого циліндрів ймовірний рух частинки по його зовнішній поверхні, де відцентрова сила $F_c = m V^2 / k$ вже не буде притискувати її до поверхні [2], а навпаки, відриватиме її у верхній частині циліндра (рис. 1, г).

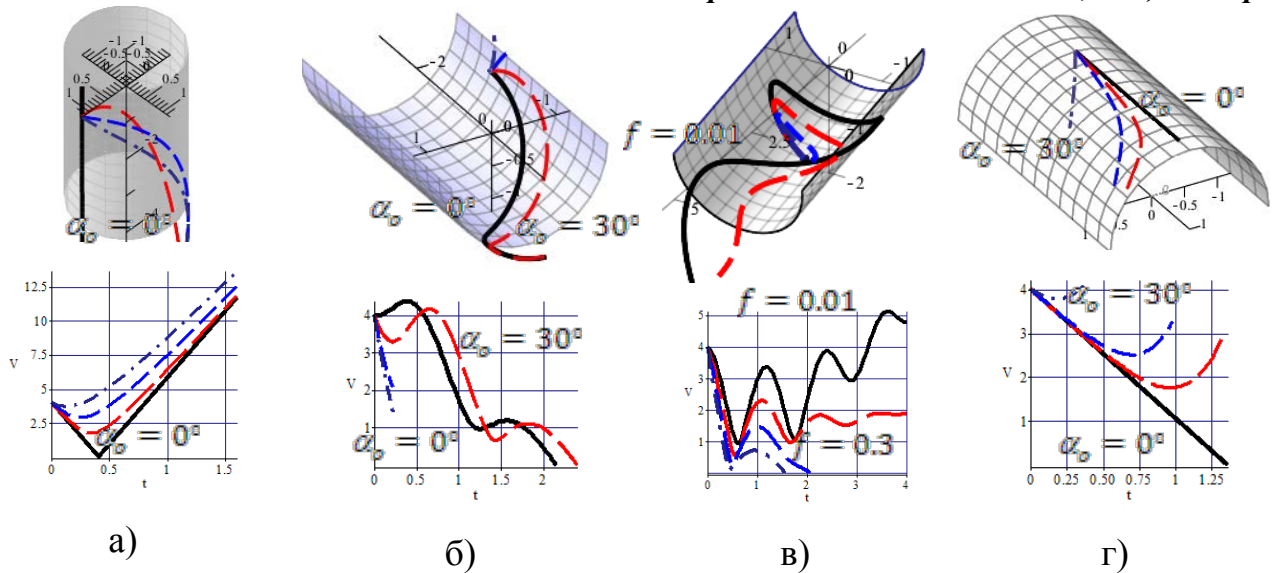


Рис. 1. Траєкторії $r(t)$ та графіки швидкості $V(t)$ частинки по шорсткій поверхні циліндра обертання для різного його положень в просторі

Для вертикального циліндра існує однозначна відповідність між положенням частинки на поверхні і параметрами: u – відстані на прямолінійній твірній; α - напрямом переміщення (кута між дотичною $\tau(\alpha)$ і прямолінійними твірними). Виведено наступні закони руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні вертикального циліндра в проекція на орти T і P тригранника $OTPN$ відповідно у функції параметра u :

$$\begin{cases} OT := m V(u) \frac{d}{du} V(u) = -m g \frac{d}{du} v(u) - \frac{m f a V(u)^2}{a^2 + \left(\frac{d}{du} v(u)\right)^2}, \\ OP := m V(u)^2 = - \frac{m g \left(a^2 + \left(\frac{d}{du} v(u)\right)^2\right)}{\frac{d^2}{du^2} v(u)} \end{cases}, \quad (4)$$

та у функції параметра α :

$$\begin{cases} OT := m V(u) \frac{d}{du} V(u) = -a m g \operatorname{ctg}(\alpha(u)) - f V(u)^2 \sin(\alpha(u)), \\ OP := m V(u)^2 = \frac{a m g}{\frac{d}{du} \alpha(u)} \end{cases}. \quad (5)$$

Траєкторії $r(u)$ та графіки швидкості $V(u)$ частинки по шорсткій поверхні вертикального циліндра залежно від: а) кута кидання $\alpha_0 = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ при постійних значеннях $f = 0,3$, $V_0 = 8 \text{ м/с}$ і $a = 1,2$; б) коефіцієнта тертя $f = 0,01 \ 0,15; 0,3; 0,45$ при постійних значеннях $V_0 = 8 \text{ м/с}$ і $\alpha_0 = 60^\circ$; в)

початкової швидкості $V_0 = 2, 4, 8, 12$ м/с при постійних значеннях $f = 0.3$ і $\alpha_0 = 60^\circ$, побудовано на рис. 2. Можемо бачити, що для частинки кинуті під кутом $\alpha_0 = 30^\circ$ мінімальна швидкість дорівнює $V_{min} \approx 2.8$ м/с в момент, коли частинка знаходилася на відстані $u \approx 4.9$ прямолинійної твірної. Частинка, кинута перпендикулярно до прямолинійних твірних циліндра ($\alpha_0 = 90^\circ$), спочатку зменшує свою швидкість до певної величини $V_{min} \approx 5.8$ м/с, а потім її набирає. Чим більший коефіцієнт тертя f , тим менша величина мінімальної швидкості частинки, і тим швидше вона впаде. Зі зменшенням початкової швидкості V_0 частинки вкорочується час до її падіння. На рис. 7,г побудовано траєкторії $r(\alpha)$ та графіки швидкості $V(\alpha)$ частинки по внутрішній поверхні вертикального циліндра на інтервалі $[\alpha_0; 180^\circ - \alpha_0]$ в залежності від кута кидання $\alpha_0 = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ при постійних значеннях $f = 0.3$, $V_0 = 8$ м/с і $a = 1.2$, які на відміну від попередніх випадків графіки швидкості $V(\alpha)$ є симетричними.

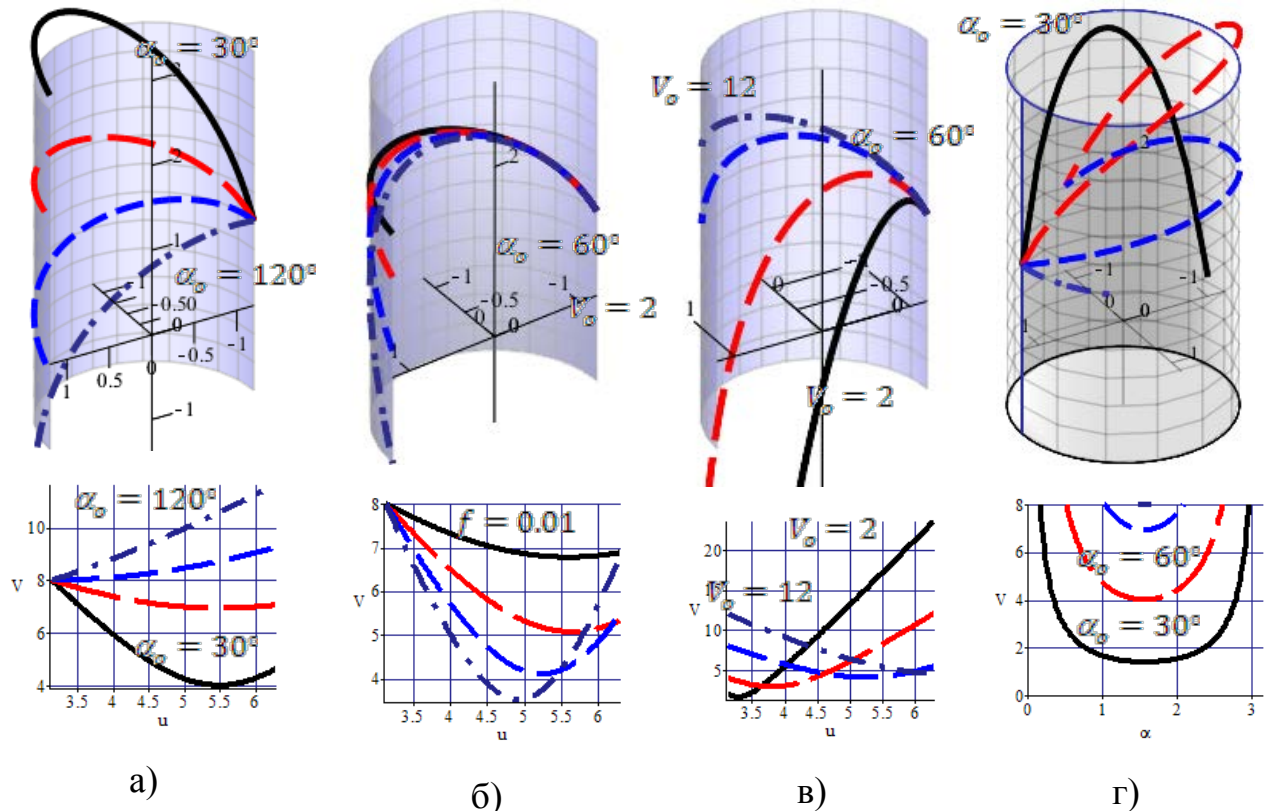


Рис. 2. Траєкторії та графіки швидкості частинки по внутрішній поверхні вертикального циліндра від параметрів:

а,б,в) u - положення; г) α - напрямку

На основі запропонованого методу формування законів руху частинки по шорстких поверхнях у внутрішніх їх координатах в проекціях на орти супровідних тригранників траєкторії було створено набір Maple-моделей руху частинки по всіх лінійчатих шорстких поверхнях 2-го порядку. З метою оцінки кожної із цих поверхонь для здійснення сепарації або ж переміщення сипкого матеріалу було проведено комплекс обчислювальних експериментів з аналізу траєкторно-кінематичних властивостей руху частинки за різних вихідних умов. Зокрема, траєкторії $r(t)$ по вертикальному однопорожнинному гіперболоїду обертання не перетинають його горловину, оскільки частинки відриваються (рис. 3, а). Однопорожнинний гіперболоїд з горизонтальною віссю при певних співвідношеннях початкової швидкості V_0 частинки, її положення $[u_0, v_0]$, кута кидання α_0 та коефіцієнта тертя f , можливо використати для поділу сипучого матеріалу на дві окремі фракції, розділені горловиною (рис. 3, б,в). Сипкий матеріал, кинутий у верхній частині нахиленого однопорожнинного гіперболоїда [3], спочатку буде скупчуватися біля горловини, після переходу якої траєкторії частинок будуть наближатися одна до одної (рис. 3,г).

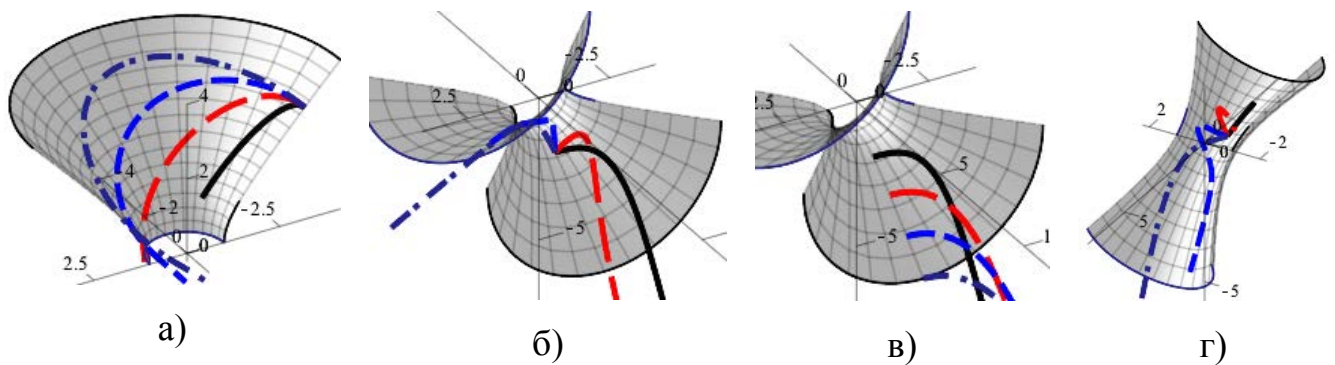


Рис. 3. Траєкторії $r(t)$ частинки по шорсткій поверхні однопорожнинного гіперболоїда обертання різного положення в просторі

Автоматичне здійснення аналітичних перетворень при формуванні закону руху частинки по шорсткій поверхні сфери, еліпсоїда, параболоїда [4] та двопорожнинного гіперболоїда обертання довільного положення є настільки громіздким, що їх унаочнення є недоцільним – користувач задає тільки вихідні умови експерименту та вибирає вигляд представлення результату (рис. 4).

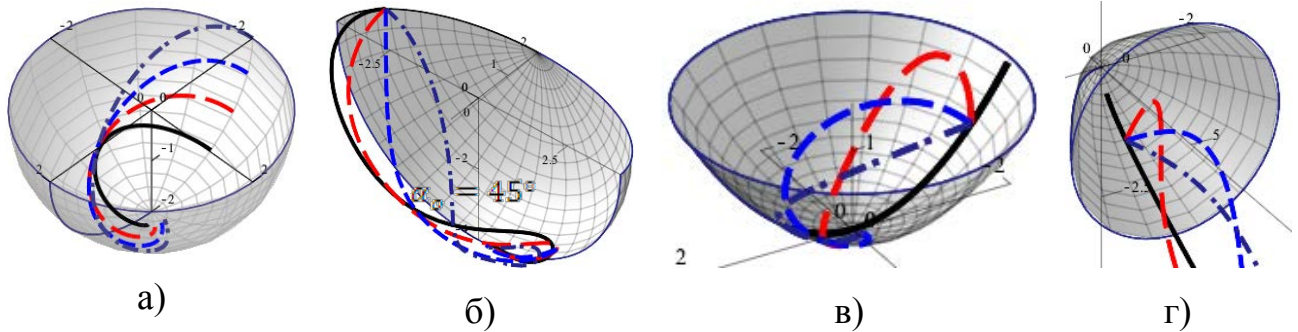


Рис. 9. Траєкторії $r(t)$ частинки по шорсткій поверхні:

а) сфери; б) еліпсоїда;

б) параболоїда; в) двопорожнинного гіперболоїда обертання

Висновки

Створено набір комп'ютерних моделей автоматичного формування закону руху частинки у вигляді системи із двох диференціальних рівнянь 2-го порядку для будь-якої шорсткої поверхні довільно розташованої в просторі. Саме завдяки розробленому комп'ютерному інструментарію стало можливим в інтерактивному режимі виконати дослідження траєкторно-кінематичних характеристик руху частинки по всіх поверхнях 2-го порядку, циліндричних поверхнях з ортогональними перерізами у вигляді трансцендентних кривих, гвинтових поверхнях.

Список літератури

1. Пилипака С. Ф. Maple-модель руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні вертикального циліндра / С. Ф. Пилипака, А. В. Несвідомін // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2011. – Вип.28. – С.19-24.

2. Несвідомін А. В. Моделювання руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні горизонтального циліндра в проекціях на орти локальних систем координат / А. В. Несвідомін // Геометричне та комп'ютерне моделювання. – Харків: ХДУХТ, 2011. – Вип.29. – С.23-29.

3. Пилипака С. Ф. Моделювання руху частинки по шорсткій поверхні однопорожнинного гіперболоїда обертання / С.Ф. Пилипака, А.В. Несвідомін //

"Енергетика і автоматика", №3, 2016 р.
Наукові нотатки. Міжвузівський збірник. – Луцьк: ЛНТУ, 2015. – Вип.48. – С.167-171.

4. Пилипака С. Ф. Моделювання руху частинки по шорсткій поверхні параболоїда обертання / С.Ф. Пилипака, А.В. Несвідомін // Прикл. геом. та інж. граф. – К.: КНУБА, 2012. – Вип.89. – С.39-44.

MAPLE-МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦЫ ПО НЕПОДВИЖНЫМ ШЕРОХОВАТЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ 2-ГО ПОРЯДКА

А. В. Несвидомин

Аннотация. *Рассмотрено использование разработанных моделей в среде символьной алгебры Maple при исследованиях траекторно-кинематических свойств движения частицы по всем поверхностям 2-го порядка.*

Ключевые слова: *материальная частица, шероховатая поверхность, цилиндр, однопорожнинный гиперболоид вращения, параболоид вращения*

MAPLE MODEL THE MOTION OF THE PARTICLE IN A STATIONARY ROUGH SURFACES OF THE 2ND ORDER

A. Nevidomin

Annotation. *The article discusses the use of the developed models in the environment of symbolic algebra Maple in studies trajectory-kinematic properties of the movement of particles on all surfaces of the 2nd order.*

Key words: *material particle, rough surface, cylinder, hyperboloid of revolution, paraboloid of revolution*