УДК 514.18

ДОСЛІДЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ЗАЛЕЖНОСТЕЙ ДЛЯ УТВОРЕННЯ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ ТА КОНСТРУЮВАННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

С. Ф. Пилипака, доктор технічних наук, професор

М. М. Муквич, кандидат технічних наук, доцент

Національний університет біоресурсів і природокористування України

e-mail: engmech_centre@twin.nauu.kiev.ua

Анотація. *Виконано аналітичний опис ізотропних ліній та мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної. Отримано аналітичні залежності утворення ізотропних ліній нульової довжини із умови рівності нулю диференціала дуги просторової лінії. Для знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній використано гіперболічні функції. Аналітичний опис мінімальних поверхонь та приєднаних мінімальних поверхонь здійснено у комплексному просторі з ізотропними лініями у ролі ліній сітки переносу. Наведено вирази коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм утворених мінімальних поверхонь. Показано, що коефіцієнти першої та другої квадратичних форм перетворюють вираз середньої кривини кожної мінімальної поверхні до нуля.*

Досліджено, що для плоскої кривої, яку задано параметричними рівняннями $u = u(t); v = v(t)$, що задовольняють умову $u^2 + v^2 = 1$, *можна знайти аналітичний опис двох просторових ізотропних ліній нульової довжини за допомогою функцій комплексної змінної. Кожній ізотропній лінії відповідає мінімальна поверхня та приєднана мінімальна поверхня, які мають подібні властивості кривини поверхні. Використання функцій комплексної змінної дозволяє отримати нескладний аналітичний опис мінімальних поверхонь та досліджувати їх конструктивні геометричні параметри. Перспективи подальших досліджень полягають у визначенні диференціальних характеристик утворених мінімальних поверхонь для оптимізації інженерних методів проектування поверхонь технічних форм.*

Ключові слова***: ізотропна лінія, мінімальна поверхня, диференціал дуги кривої, квадратична форма поверхні, середня кривина поверхні, функція комплексної змінної***

Актуальність. Дослідження аналітичних умов утворення параметричних рівнянь ізотропних ліній нульової довжини зумовлене проблемою аналітичного опису мінімальних поверхонь. Геометричні моделі, описані мінімальними поверхнями, мають переваги практичного змісту при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій в CAD системах. Напруженість у кожній точці мінімальної поверхні є сталою величиною, тому геометрична форма мінімальної поверхні забезпечує рівномірний розподіл зусиль в оболонці та додаткову жорсткість [1, с. 152]. Умова рівності нулю величини середньої кривини H мінімальної поверхні у всіх її точках є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром) на цій поверхні.

Знаходження аналітичного опису мінімальної поверхні, яка проходить через замкнену лінію, зводиться до розв’язування нелінійного диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа у частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується [2, с. 683]. Тому одним із напрямків сучасних досліджень є удосконалення чисельних методів розв’язування диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа [3].

Відомими є дослідження з геометричного моделювання композитних матеріалів, які утворюють стільникову структуру [4]. Архітектура вказаних композитних матеріалів базується на періодичних мінімальних поверхнях, що дозволяє при їх використанні мінімізувати ефекти концентрації напруги, забезпечує стійкість до пошкоджень та зменшення вібрації [4].

Проблема спрощення аналітичного опису мінімальних поверхонь та отримання їх параметричних рівнянь, починаючи з робіт С. Лі (S. Lie), реалізується за допомогою методів теорії функцій комплексної змінної [2, с. 685]. Використання функцій комплексної змінної дозволяє отримати параметричні рівняння мінімальних поверхонь, досліджувати їх диференціальні характеристики, оптимізувати інженерні методи проектування поверхонь технічних форм.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно визначити параметричні рівняння ізотропної лінії нульової довжини [5]. У дисертаційному дослідженні [6] знайдено аналітичний опис ізотропних ліній за формулами Шварца (H. Schwarz) на основі просторової кривої, що лежить на поверхні циліндра та на основі кривої укосу. Але використання формул Шварца для знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній пов'язане з інтегруванням складних виразів і можливе тільки в окремих випадках. У статті [7] було розглянуто окремі випадки аналітичного опису ізотропних ліній на основі рівнянь плоскої уявної кривої виду: $x(t) = f_1(t) + i \cdot f_2(t)$; $y(t) = f_1(t) - i \cdot f_2(t)$, де $f_1(t)$ і $f_2(t)$ − функції дійсної або комплексної змінної. Не зважаючи на різноманіття відомих способів утворення параметричних рівнянь ізотропних ліній, спрощення їх аналітичного опису залишається важливою проблемою при моделюванні мінімальних поверхонь.

Мета дослідження - визначити аналітичні умови утворення просторових ізотропних ліній нульової довжини на основі плоскої кривої, заданої параметричними рівняннями $u = u(t); v = v(t)$, що задовольняють умову $u^2 + v^2 = 1$. За допомогою параметричних рівнянь ізотропної лінії визначити аналітичний опис мінімальних поверхонь.

Матеріали і методи дослідження. Аналітичні залежності утворення ізотропних ліній нульової довжини отримано за допомогою функцій комплексної змінної із умови рівності нулю диференціала дуги просторової лінії. Аналітичний опис мінімальних поверхонь здійснено у комплексному просторі з твірними ізотропними лініями переносу.

Результати досліджень та їх обговорення. Розглянемо твердження, у якому визначено аналітичні залежності утворення просторових ізотропних ліній нульової довжини за допомогою функцій комплексної змінної.

Твердження. *Нехай функції* $u = u(t);\ v = v(t)$ *задовольняють рівність:* $u^2(t) + v^2(t) = 1$. *Тоді просторові криві, задані рівняннями:*

$$x(t) = \int\left(u - \frac{1}{2(u+v)}\right)dt;\ \ y(t) = \int\left(v - \frac{1}{2(u+v)}\right)dt;\ \ z(t) = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{u+v}, \quad (1)$$

$$x(t) = \int\left(u - \frac{1}{2(u-v)}\right)dt;\ \ y(t) = \int\left(v + \frac{1}{2(u-v)}\right)dt;\ \ z(t) = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{u-v} \quad (2)$$

є ізотропними лініями нульової довжини.

Доведення. Доведемо рівність (1). Запишемо рівняння ізотропної лінії у вигляді:

$$x(t) = \mu(t) - i\cdot f(t);\ \ y(t) = \eta(t) - i\cdot f(t);\ \ z = z(t), \quad (3)$$

де $\mu(t),\ \eta(t),\ f(t)-$ диференційовані на деякому проміжку функції, $i-$ уявна одиниця. Тоді вираз диференціала дуги ізотропної лінії має вигляд:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 - 2i\frac{d\mu}{dt}\frac{df}{dt} - \left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - 2i\frac{d\eta}{dt}\frac{df}{dt} -$$
$$-\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 - 2i\frac{df}{dt}\left(\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\right) - 2\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2.$$

Диференціал дуги ізотропної лінії дорівнює нулю при одночасному виконанні умов: $\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 = 1;\ -2i\frac{df}{dt}\left(\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\right) = -1;\ -2\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 0.$

Із останніх рівностей виразимо: $\frac{df}{dt} = \frac{1}{2i\left(\frac{d\mu}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\right)}$ та $\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{2}\frac{df}{dt}$, тоді

отримаємо:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\mu}{dt}-i\frac{df}{dt}=\frac{d\mu}{dt}-\frac{1}{2\left(\frac{d\mu}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\right)};\quad \frac{dy}{dt}=\frac{d\eta}{dt}-i\frac{df}{dt}=\frac{d\eta}{dt}-\frac{1}{2\left(\frac{d\mu}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\right)};$$
$$\frac{dz}{dt}=\pm\sqrt{2}\,\frac{df}{dt}=\mp\frac{i}{\sqrt{2}\left(\frac{d\mu}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\right)}. \tag{4}$$

Інтегруючи рівності (4) та увівши заміну $u(t)=\frac{d\mu}{dt};\quad v(t)=\frac{d\eta}{dt}$, отримаємо параметричні рівняння (1) ізотропної лінії.

Записавши рівняння ізотропної лінії у вигляді: $x(t)=\mu(t)+i\cdot f(t);$ $y(t)=\eta(t)-i\cdot f(t);$ $z=z(t),$ та здійснивши аналогічні перетворення, отримаємо параметричні рівняння (2) просторової ізотропної лінії.

Слід зазначити, що, розглянувши усі можливі випадки утворення ізотропних ліній у вигляді $x(t)=\pm\mu(t)\pm i\cdot f(t);$ $y(t)=\pm\eta(t)\pm i\cdot f(t);$ $z=z(t),$ можна отримати залежності, які мають вигляд (1) або (2).

Твердження доведено.

Для знаходження рівнянь мінімальної та приєднаної до неї мінімальної поверхні необхідно в параметричних рівняннях ізотропної кривої увести заміну [5]: $t=u+i\cdot v.$ Тоді отримаємо параметричні рівняння мінімальної поверхні $X(u,v),Y(u,v),Z(u,v)$:

$$X(u,v)=\mathrm{Re}\{x(u+i\cdot v)\};\ Y(u,v)=\mathrm{Re}\{y(u+i\cdot v)\};\ Z(u,v)=\mathrm{Re}\{i\cdot(u+i\cdot v)\};$$

та приєднаної мінімальної поверхні $X^*(u,v),Y^*(u,v),Z^*(u,v)$:

$$X^*(u,v)=\mathrm{Im}\{x(u+i\cdot v)\};\ Y^*(u,v)=\mathrm{Im}\{y(u+i\cdot v)\};\ Z^*(u,v)=\mathrm{Im}\{i\cdot(u+i\cdot v)\}.$$

Знайдемо параметричні рівняння ізотропної лінії за формулами (1) для функцій: $u(t)=\mathrm{ch}(k\,t);v(t)=i\cdot\mathrm{sh}(k\,t),$ де $k\in R.$

Тоді за формулами (1) отримаємо параметричні рівняння уявної ізотропної лінії:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2k}\left[-\sqrt{2}\,\mathrm{Arth}\left(\frac{i+\mathrm{th}\left(\frac{kt}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)+2\cdot\mathrm{sh}(kt)\right];\\
y(t) &= \frac{1}{2k}\left[-\sqrt{2}\,\mathrm{Arth}\left(\frac{i+\mathrm{th}\left(\frac{kt}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right)+2i\cdot\mathrm{ch}(kt)\right];\\
z(t) &= \frac{1}{k}\,\mathrm{Arth}\left(\frac{1-i\cdot\mathrm{th}\left(\frac{kt}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

На основі уявної ізотропної лінії (5) знайдемо параметричні рівняння мінімальних поверхонь. Здійснимо для функцій комплексної змінної (5) заміну: $t = u + i\cdot v$. Відокремивши дійсну та уявну частину, отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

$$
\begin{aligned}
X(u,v) &= -\frac{\cos(kv)\cdot\mathrm{sh}(ku)}{k}+\frac{1}{2\sqrt{2}k}\left[\mathrm{arctg}\,j(u;v)-\mathrm{arctg}\,w(u;v)\right];\\
Y(u,v) &= -\frac{\sin(kv)\mathrm{ch}(ku)}{k}+\frac{1}{2\sqrt{2}k}\left[\mathrm{arctg}\,j(u;v)-\mathrm{arctg}\,w(u;v)\right];\\
Z(u,v) &= \frac{1}{4k}\left[-\ln\left((1-m(u;v))^2+n(u;v)\right)+\ln\left((1+m(u;v))^2+n(u;v)\right)\right],
\end{aligned}
\tag{6}
$$

де

$$
\begin{aligned}
m(u;v) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\sin kv}{\cos kv+\mathrm{ch}\,ku}\right);\ n(u;v)=\frac{\mathrm{sh}^2(ku)}{2(\cos kv+\mathrm{ch}\,ku)^2};\\
j(u;v) &= -\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(ku)}{\left(2+\sqrt{2}\right)(\cos kv+\mathrm{ch}\,ku)+\sqrt{2}\sin kv};\\
w(u;v) &= -\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(ku)}{\left(-2+\sqrt{2}\right)(\cos kv+\mathrm{ch}\,ku)+\sqrt{2}\sin kv};
\end{aligned}
\tag{7}
$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$X^*(u,v) = \frac{\cos(ku)\cdot\sin(kv)}{k} +$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{2}k}\left[\ln\left((1-m(u;v))^2+n(u;v)\right)-\ln\left((1-m(u;v))^2+n(u;v)\right)\right];$$
$$Y^*(u,v) = \frac{\cos(kv)\cdot\operatorname{ch}(ku)}{k} + \qquad (8)$$
$$+\frac{1}{4\sqrt{2}k}\left[\ln\left((1-m(u;v))^2+n(u;v)\right)-\ln\left((1+m(u;v))^2+n(u;v)\right)\right];$$
$$Z^*(u,v) = -\frac{1}{2k}\left[\operatorname{arctg} w(u;v) - \operatorname{arctg} j(u;v)\right],$$

У параметричних рівняннях (8) вирази $m(u;v), n(u;v), j(u;v), w(u;v)$ визначаються із (7).

Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальної поверхні (6) та приєднаної поверхні (8) дорівнюють:

$$E = G = \frac{\operatorname{ch}(2ku)^2}{2\cdot(\operatorname{ch}(2ku)-\sin(2kv))};\ F = 0. \qquad (9)$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми мінімальної поверхні (6), знайдені за формулами диференціальної геометрії [6], дорівнюють:

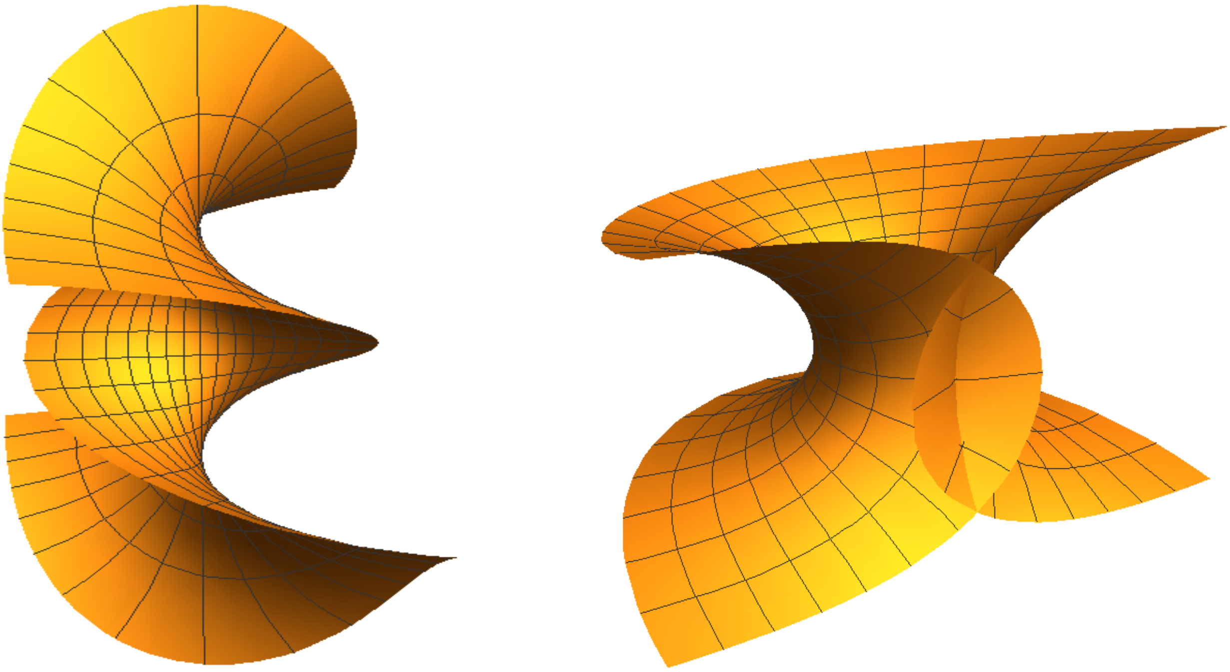
$$L = -N = \frac{\sqrt{2}k\cdot(\cos kv + \sin kv)\cdot\operatorname{sh} ku}{-\operatorname{ch}(2ku)+\sin(2kv)};\ M = \frac{\sqrt{2}k\cdot(\cos kv - \sin kv)\cdot\operatorname{ch} ku}{\operatorname{ch}(2ku)-\sin(2kv)}. \qquad (10)$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми приєднаної мінімальної поверхні (8), дорівнюють: $L^* = -N^* = -M;\ M^* = L.$

Коефіцієнти першої та другої квадратичних форм побудованих поверхонь (6) та (8), перетворюють вираз середньої кривини $H = \frac{E\cdot N - 2\cdot F\cdot M + G\cdot L}{2(E\cdot G - F^2)}$, для кожної із указаних поверхонь, до нуля.

Утворені мінімальні поверхні (6) та (8), маючи рівні відповідні вирази коефіцієнтів першої квадратичної форми, допускають неперервне згинання одна на одну.

На рисунку зображено мінімальні поверхні, побудовані за рівняннями (6), (8) при $k=1$; $u \in \left[-\frac{\pi}{3};...\frac{\pi}{3}\right]$; $v \in \left[-\frac{2\pi}{3};...\frac{\pi}{5}\right]$.



а *б*

Рисунок. Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропної кривої (5):

а – відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (6);

б – відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (8)

Параметричні рівняння ізотропної лінії, знайденої за формулами (2) для функцій $u(t)=\mathrm{ch}(k\,t); v(t)=i\cdot \mathrm{sh}(k\,t)$, де $k \in R$, мають подібну будову з рівняннями (5). Відповідні мінімальні поверхні мають спільні характеристики кривини поверхні з побудованими поверхнями (6), (8), тому у даній статті результати їх дослідження не наводяться.

Висновки і перспективи. Для плоскої кривої, яку задано параметричними рівняннями $u=u(t); v=v(t)$, що задовольняють умову $u^2+v^2=1$, можна знайти аналітичний опис двох просторових ізотропних ліній нульової довжини за допомогою функцій комплексної змінної. Кожній ізотропній лінії відповідає мінімальна поверхня та приєднана мінімальна поверхня, які мають подібні властивості кривини поверхні. Використання функцій комплексної змінної дозволяє отримати нескладний аналітичний опис мінімальних поверхонь та досліджувати їх конструктивні геометричні параметри. Перспективи подальших досліджень полягають у дослідженні диференціальних характеристик утворених мінімальних поверхонь та оптимізації інженерних методів проектування поверхонь технічних форм.

Список використаних джерел

1. Гуляев В.И. Расчёт оболочек сложной формы [Текст] / В.И. Гуляев, В.А. Баженов, Е.А. Гоцуляк, В.В. Гайдайчук. – К.: Будівельник, 1990. – 192 с.

2. Математическая энциклопедия [Текст] / [гл.ред. И. М. Виноградов]. – Т. 3. – М.: Изд–во «Советская энциклопедия», 1982. – С. 683–690.

3. Клячин А. А. О сходимости полиномиальных приближённых решений уравнения минимальной поверхности [Текст] / А.А. Клячин, И. В. Трухляева // Уфимский математический журнал. – 2016. – Т. 8. – №1. – С. 72–83.

4. Al-Ketan Or. Mechanical properties of periodic interpenetrating phase composites with novel architected microstructures [Text] / Oraib Al-Ketan, Mhd. Adel Assad, Rashid K. Abu Al-Rub // Composite Structures. – 2017. – Vol. 176 – P. 9-19. Available at: https://doi.org/ 10.1016/j.compstruct.2017.05.026

5. Фиников С. П. Теория поверхностей [Текст] / С. П. Фиников. – М. – Л.: ГТТИ, 1934. – 206 с.

6. Коровіна І. О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції [Текст]: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.01.01 / І. О. Коровіна. – Київський національний університет будівництва і архітектури. – К., 2012. – 20 с.

7. Пилипака С.Ф. Конструювання мінімальних поверхонь на основі просторових ізотропних ліній [Текст] / С.Ф. Пилипака, М.М. Муквич // Науковий вісник НУБіП України. Серія: Техніка та енергетика АПК. – К., 2017. – Вип. 258. – С. 313–323.

References

1. Gulyaev, V.I., Bazhenov, V.A., Gotsulyak, E.A., Gajdajchuk, V.V. (1990). Raschyot obolochek slozhnoj formy [Calculation of shells of complex shape]. Kiev: Budivel'nyk, 192.

2. Matematicheskaya entsyklopediya. (1982). [Encyclopedia of mathematics]. Moscow: Sovetskaya entsyklopediya, 683–690.

3. Klyachin, A. A., Truhlyaeva, I. V. (2016). O skhodimosti polinomial'nyh priblizhennyh reshenij uravneniya minimal'noj poverhnosti [On convergence of polynomial solutions of minimal surface]. Ufimskiy matematych. zhurnal, 8(1), 72–83.
4. Al-Ketan, Or., Adel Assad, Mhd., Abu Al-Rub, R. K. (2017). Mechanical properties of periodic interpenetrating phase composites with novel architected microstructures. Composite Structures. Vol. 176, 9-19. Available at: https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.05.026
5. Finikov, S.P. (1934). Teoriya poverkhnostey [Theory of surfaces]. Moskva–Leningrad: HTTI, 206.
6. Korovina, I. O. (2012). Konstruyuvannya poverkhon' staloyi seredn'oyi kryvyny za zadanymy liniyamy intsydentsiyi [Construction of surfaces of a constant main curvature according to the given lines of an incident]. Kiev National University of Civil Engineering and Architecture. Kyiv, 20.
7. Pylypaka, S. F., Mukvych, M. M. (2017). Konstrujuvannja minimal'nych poverchon na osnovi prostorovych izotropnych linij [Construction minimal surfaces using spatial isotropic curves]. Naukovyi visnyk Natsionalnoho universytetu bioresursiv i pryrodokorystuvannia Ukrainy. Seriia: tekhnika ta enerhetyka APK, 258, 311–321.

ИССЛЕДОВАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ ОБРАЗОВАНИЯ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ И КОНСТРУИРОВАНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С.Ф. Пилипака, Н.Н. Муквич

Аннотация. *Выполнено аналитическое описание изотропных линий и минимальных поверхностей с помощью функций комплексного переменного. Получены аналитические зависимости образования изотропных линий нулевой длины из условия равенства нулю дифференциала дуги пространственной линии. Для нахождения параметрических уравнений изотропных линий использовано гиперболические функции. Аналитическое описание минимальных поверхностей и присоединённых минимальных поверхностей осуществляется в комплексном пространстве с изотропными линиями в качестве линий сети переноса. Приведены выражения коэффициентов первой и второй квадратичных форм образованных минимальных поверхностей. Показано, что коэффициенты первой и второй квадратичных форм превращают выражение средней кривизны каждой минимальной поверхности в нуль.*

Доказано, что для плоской кривой, которую задано параметрическими уравнениями $u = u(t);\ v = v(t)$, *удовлетворяющими условие* $u^2 + v^2 = 1$, *можно найти аналитическое описание двух пространственных изотропных линий нулевой длины с помощью функций комплексной переменной. Каждой изотропной линии соответствует минимальная поверхность и присоединённая минимальная поверхность, имеющие общие свойства кривизны поверхности.*

Использование функций комплексной переменной позволяет получить несложное аналитическое описание минимальных поверхностей и исследовать их конструктивные геометрические параметры. Перспективы дальнейших исследований заключаются в определении дифференциальных характеристик образованных минимальных поверхностей для оптимизации инженерных методов проектирования поверхностей технических форм.

Ключевые слова: ***изотропная линия, минимальная поверхность, дифференциал дуги кривой, квадратичная форма поверхности, средняя кривизна поверхности, функция комплексного переменного***

RESEARCH OF ANALYTICAL CONDITIONS FOR THE FORMATION OF ISOTROPIC LINES AND FOR CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES

S. Pylypaka, M. Mukvich

Abstract. *This article provides an analytical description of isotropic lines and minimal surfaces with a help of complex variable functions. Isotropic lines parametric equations are obtained from the condition of differential of the arc of spatial curve equality to zero. Hyperbolic functions are used to find parametric equations of isotropic lines. Analytical description of minimal surfaces and connected minimal surfaces were made in complex space with isotropic lines of grid transfer. Expression of first and second coefficients of quadratic forms of generated minimal surfaces are given. It is shown that the coefficients of the first and second quadratic forms transform the expression of the mean curvature of each minimal surface to zero.*

It is research that for a plane curve given by parametric equations $u = u(t); v = v(t)$, *satisfying a condition* $u^2 + v^2 = 1$, *one can find an analytical description of two spatial isotropic lines of zero length with the help of functions of a complex variable. Each isotropic line corresponds to the minimal surface and the associated minimal surface, which have similar properties of the curvature of the surface. Use of function of a complex variable allows to get a simple analytical description of minimal surfaces, investigate their design geometrical parameters. Prospects for future research is to study the differential characteristics of associated minimal surfaces and optimization of engineering methods of technical surfaces forms design.*

Key words: ***isotropic line, minimal surface, differential of the arc, quadratic form of a surface, mean curvature of a surface, function of a complex variable***