

## ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ РІЗНИХ ПІДХОДІВ ДО МОДЕЛЮВАННЯ ТВІРНОЇ СТОВБУРІВ БЕРЕЗИ ПОВИСЛОЇ

*В. В. Миронюк, кандидат сільськогосподарських наук,*

*В. В. Поліщук, студент\**

*Національний університет біоресурсів і природокористування України*

*На прикладі дослідного матеріалу, зібраного у деревостанах берези повислої вегетативного походження, узагальнено основні підходи до моделювання твірних деревних стовбурів. Проаналізовано різні математичні моделі твірних стовбурів дерев, встановлено особливості їхнього застосування для обчислення об'єму. Визначено шляхи вдосконалення методів таксації об'єму і розмірно-якісної структури деревини на основі узагальнення модельних уявлень про форму стовбурів.*

**Ключові слова:** *форма стовбурів, твірна стовбура, збіг стовбура, нормативи об'єму стовбурів, моделі змішаного ефекту.*

В основі методів таксації об'єму дерев, які сформувалися у вітчизняній лісотаксаційній практиці, ключову роль відведено видовому числу – показнику, що характеризує повнодеревність стовбурів, тобто ступінь їхнього наближення до певного циліндра. До цього часу використання моделі старого видового числа деревних стовбурів вважають найбільш обґрунтованим науково-методичним підходом під час визначення їхнього об'єму [1, 2]. Практичне значення інших показників, які характеризують форму деревних стовбурів (коефіцієнтів і класів форми, чисел збігу тощо), є істотно меншим, оскільки нормативи об'єму переважно розробляють для середніх за формою стовбурів. Усе ж подальший розвиток методів матеріальної оцінки деревини передбачає глибше вивчення форми стовбурів і, як наслідок, ускладнення методичних прийомів із таксації лісу.

---

\* Науковий керівник – кандидат сільськогосподарських наук, доцент В. В. Миронюк

Зокрема, у практиці деяких країн під час таксації лісу визначають не лише висоту і діаметр дерев, а й деякі інші параметри. Наприклад, у США існує кілька варіантів об'ємних таблиць, які передбачають визначення лише діаметра (local volume table), діаметра і висоти (standard volume table), діаметра, висоти і певного показника форми стовбура (Mesavage-Girard form-class volume table) [9]. У разі таксації не лише загального запасу, а і його сортиментної структури визначають висоту дерева до так званого upper-stem діаметра, який є мінімально допустимим значенням діаметра сортиментів у верхньому відрізі. Об'ємні таблиці, розроблені з урахуванням цих показників, забезпечують найточнішу оцінку виходу ділової деревини.

У роботі А. Clark et all. [6] опрацьовано систему математичних моделей твірних стовбурів для 58 деревних видів півдня США, на основі яких розроблено об'ємні таблиці чотирьох типів [5]. Перші з них – це класичні таблиці з двома входами (діаметр і висота дерев), а в інших трьох діаметр на висоті грудей доповнює віддаль від основи стовбура до відмітки, де його діаметр становить: 1) 4 дюйма; 2) 7 дюймів (м'яколистяні деревні види); 3) 9 дюймів (твердолистяні деревні види). Вихід же ділової деревини оцінюють окремо для ділових колод стандартної довжини (16 футів), кількість яких у кожному стовбурі з точністю до 8 футів ( $\frac{1}{2}$  довжини колоди) визначають під час натурної таксації.

Фундаментальною основою реалізації подібних методів таксації є узагальнення уявлень про форму стовбурів у вигляді математичної моделі твірної, яка дає змогу визначати діаметр стовбура на будь-якій висоті та, як наслідок, його об'єм і вихід сортиментів. Однією з багатьох переваг моделювання твірної стовбура полягає в можливості обчислення його об'єму ( $V$ ) шляхом інтегрування розробленої математичної моделі в межах від  $L$  до  $U$ :

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot \int_L^U d_i^2 \cdot dh_i. \quad (1)$$

Відповідно до Н. Е. Burkhard, існує три типи твірних деревних стовбурів: 1) simple taper function; 2) segmented functions; 3) variable-exponent models [4]. Моделі першої групи описують збіг по всій довжині стовбура за допомогою

однієї функції. Більшість із них – це поліноми різних порядків, які переважно оперують відносними значеннями діаметра і висоти стовбурів. Моделі другої групи складаються з кількох рівнянь, що незалежно один від одного характеризують форму стовбура в різних його частинах і поєднуються у вузлових точках, забезпечуючи неперервність функції. Однією з перших ця ідея знайшла практичну реалізацію у вигляді моделі, яку запропонували Т. А. Мах і Н. Е. Burkhard в 1976 р. для південноамериканського виду сосни *Pinus tadea* L. [13]. Пізніше її було апробовано для інших видів, а в дослідженнях Clark A. et al. [6] використано для розробки складніших залежностей. Математичну форму одержаних рівнянь наведено в табл. 2. Загальний вигляд рівнянь третьої групи можна представити у вигляді алометричної функції (2), в якій параметр  $c$  на різних ділянках стовбура узгоджується з показником твірних правильних тіл обертання: від нейлоїда (нижня частина) до параболоїда (серединна частина) і конуса (верхня частина).

$$y = z^c. \quad (2)$$

У табл. 2 наведено три моделі цієї групи, які були запропоновані в дослідженнях А. Kozak 1988 та 2004 рр. [10, 11] і R. M. Newnham у 1992 р. [14].

**Мета роботи** – виконати експериментальну оцінку точності математичних моделей об'єму стовбурів дерев берези повислої із залученням дослідного матеріалу, зібраного в деревостанах вегетативного походження; узагальнити сучасні методи таксації об'єму деревних стовбурів із використанням різних типів математичних моделей твірної.

**Матеріали та методика.** Для вирішення поставлених завдань у ДП «Остерське ЛГ» було закладено пробну площу із рубкою 20 модельних дерев берези повислої. Обмір деревних стовбурів виконано за двометровими секціями, тобто на всіх непарних метрах встановлено діаметр, виміряний у двох взаємно перпендикулярних напрямках, і товщину кори. Одночасно з цим виконували сортиментацию стовбурів, із визначенням довжини і діаметра у верхньому відрізі ділових сортиментів, деревини для технологічних потреб, дров паливних і

відходів. Мінімальне значення діаметра ділових сортиментів, які були заготовлені зі стовбурів, становило 16 см (18 см у корі), що відповідає лісоматеріалам для виробництва лущеного шпону. Отримані дані обробляли в програмі ПЕРТА кафедри лісової таксації та лісовпорядкування НУБіП України, яка дала змогу встановити детальну таксаційну інформацію про модельні дерева та насадження в цілому. Загальну характеристику модельних дерев можна отримати з табл. 1.

### 1. Статистична характеристика модельних дерев

| Таксаційний показник                  | Середнє арифметичне значення | Мінімальне значення | Максимальне значення | Стандартне відхилення |
|---------------------------------------|------------------------------|---------------------|----------------------|-----------------------|
| Діаметр у корі на висоті 1,3 м, см    | 28,5                         | 15,0                | 45,5                 | 8,5                   |
| Висота, м                             | 22,5                         | 14,1                | 28,1                 | 4,2                   |
| Старе видове число ( $f$ )            | 0,432                        | 0,354               | 0,491                | 0,041                 |
| Коефіцієнт форми ( $q_2$ )            | 0,622                        | 0,568               | 0,681                | 0,036                 |
| Об'єм стовбура у корі, м <sup>3</sup> | 0,707                        | 0,130               | 1,917                | 0,479                 |

Узагальнення емпіричних даних про форму стовбурів виконано за допомогою класів форми у відносній системі координат (рис. 1). Із наведених графіків видно, що стовбури дерев берези повислої вегетативного походження мають значний збіг в окоренковій частині.

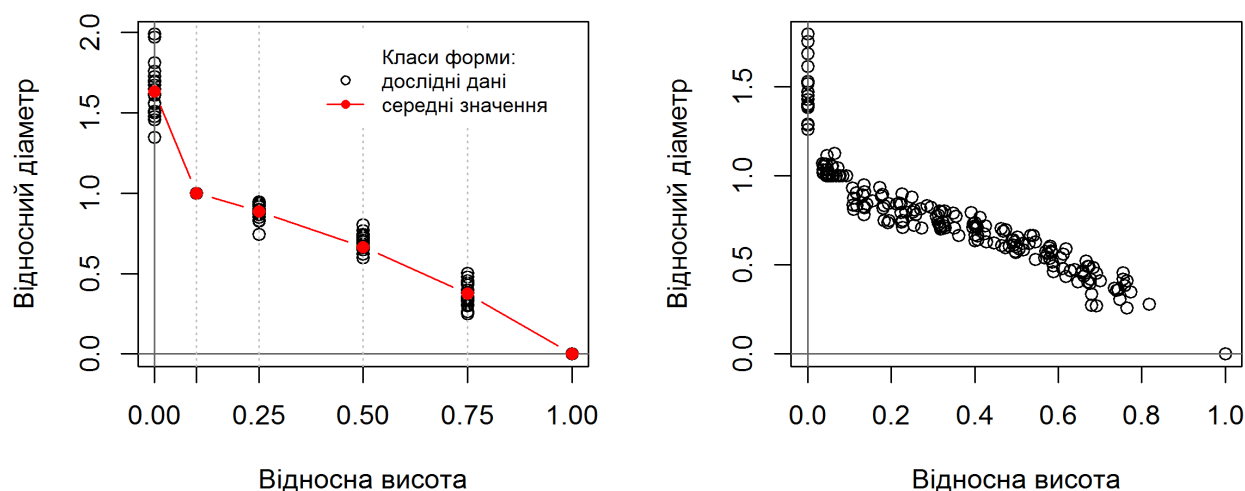


Рис. 1. Форма стовбурів берези у відносній системі координат

З метою узагальнення форми стовбурів було досліджено особливості математичного моделювання збігу стовбурів за допомогою найпоширеніших

рівнянь твірної. На основі аналізу публікацій [4, 7, 12, 15] у дослідженні розглядали п'ять моделей твірної: А. Kozak (1988) [10], А. Kozak (2004) [11], R. Newnham (1992) [14], А. Clark et al. (1991) [6] (моделі 1 і 4). Їхній математичний вираз наведено в табл. 2. Також у роботі розглянуто доцільність використання в моделях таких показників, як протяжність ділової частини стовбурів (merchantable height) та діаметра ділових сортиментів у верхньому відрізі (merchantable limit).

## 2. Моделі твірної стовбура та їхній математичний вираз

| Автор(и)<br>моделі                 | Математичний вираз<br>моделі*                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| А. Kozak (1988)                    | $d_i = a_0 \cdot d^{a_1} \cdot a_2^d \cdot X^{b_1 \cdot Z^2 + b_2 \cdot \ln(Z + 0.001) + b_3 \cdot \sqrt{Z} + b_4 \cdot \exp(Z) + b_5 \cdot (d/h)}$ $X = \frac{1 - \sqrt{h_i/h}}{1 - \sqrt{p}}; \quad Z = \frac{h_i}{h}; \quad p = 0,225$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| А. Kozak (2004)                    | $d_i = a_0 \cdot d^{a_1} \cdot h^{a_2} \cdot x^{(b_1 \cdot q^4 + b_2 \cdot (1/\exp(d/h)) + b_3 \cdot x^{0,1} + b_4 \cdot 1/d + b_5 \cdot h^w + b_6 \cdot x)}$ $x = \frac{w}{1 - 1,3/h^{(1/3)}}; \quad w = 1 - q^{1/3}; \quad q = h_i/h$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| R. Newnham (1992)                  | $d_i = d \cdot x^{(a_0 + a_1 \cdot (z-1) + a_2 \cdot \exp(a_3 \cdot z))}$ $x = \frac{h - h_i}{h - 1,3}; \quad z = \frac{h_i}{h}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| А. Clark et al. (1991)<br>Модель 1 | $d_i = \left\{ \begin{aligned} &I_S \cdot \left[ d^2 \cdot \left( 1 + \left( c + \frac{e}{d^3} \right) \cdot \frac{\left( \left( 1 - \frac{h_i}{h} \right)^r - \left( 1 - \frac{1,30}{h} \right)^r \right)}{1 - \left( 1 - \frac{1,30}{h} \right)^r} \right) \right] + \\ &+ I_B \cdot \left[ d^2 - (d^2 - F^2) \cdot \frac{\left( 1 - \frac{1,30}{h} \right)^p - \left( 1 - \frac{h_i}{h} \right)^p}{\left( 1 - \frac{1,30}{h} \right)^p - \left( 1 - \frac{5,27}{h} \right)^p} \right] + \\ &+ I_T \cdot \left[ F^2 \cdot \left( b \cdot \left( \frac{h_i - 5,27}{h - 5,27} - 1 \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + I_M \cdot \left( \frac{1 - b}{a^2} \right) \cdot \left( a - \frac{h_i - 5,27}{h - 5,27} \right)^2 \right) \right] \right\}^{0,5} \end{aligned}$ $I_S = \begin{cases} 1, & \text{якщо } h_i < 1,30 \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}; \quad I_B = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 1,30 \leq h_i \leq 5,27 \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases};$ $I_T = \begin{cases} 1, & \text{якщо } h_i > 5,27 \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}; \quad I_M = \begin{cases} 1, & \text{якщо } h_i < 5,27 + a \cdot (h - 5,27) \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}$ |

| Автор(и)<br>моделі                 | Математичний вираз<br>моделі*                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| A. Clark et al. (1991)<br>Модель 4 | $d_i = \left\{ \begin{aligned} & I_S \cdot \left[ d^2 \cdot \left( 1 + \left( c + \frac{e}{d^3} \right) \cdot \frac{\left( \left( 1 - \frac{h_i}{h_X} \right)^r - \left( 1 - \frac{1,30}{h_X} \right)^r \right)}{1 - \left( 1 - \frac{1,30}{h_X} \right)^r} \right) \right] + \\ & + I_B \cdot \left[ d^2 - (d^2 - F^2) \cdot \frac{\left( 1 - \frac{1,30}{h_X} \right)^p - \left( 1 - \frac{h_i}{h_X} \right)^p}{\left( 1 - \frac{1,30}{h_X} \right)^p - \left( 1 - \frac{5,27}{h_X} \right)^p} \right] + \\ & + I_T \cdot \left[ F^2 - (F^2 - d_X^2) \cdot \left( 1 - \left( \frac{h_X - h_i}{h_X - 5,27} \right)^q \right) \right] \end{aligned} \right\}^{0,5}$ $I_S = \begin{cases} 1, & \text{якщо } h_i < 1,30 \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}; \quad I_B = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 1,30 \leq h_i \leq 5,27 \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases};$ $I_T = \begin{cases} 1, & \text{якщо } h_i > 5,27 \\ 0 & \text{в інших випадках} \end{cases}$ |

\*У наведених моделях:

$d_i$  – діаметр стовбура на висоті  $h_i$ ;  $d$  – діаметр стовбура висоті 1,30 м;  $h$  – висота стовбура;  
 $h_X$  – висота до фіксованого значення діаметра  $d_X$  см;  $F$  – діаметр стовбура на висоті 5,27 м.

**Результати досліджень.** Масив вихідних даних для моделювання твірних деревних стовбурів зазвичай подають у вигляді ієрархічної структури, яка складається з окремих кластерів – результатів обміру діаметрів кожного стовбура від основи до верхівки [4]. В межах одного стовбура спостереження неодмінно будуть взаємно корельовані, що порушує припущення класичного регресійного аналізу про їхню незалежність. Гідну альтернативу у цьому випадку складуть моделі змішаного ефекту (mixed-effect models), в яких окремі параметри рівняння можуть доповнюватися так званим випадковим ефектом. Пошук параметрів таких моделей для всієї сукупності здійснюється з урахуванням внутрішньогрупової мінливості спостережень у межах кожного рівня (окреме дерево). Однією з переваг моделей змішаного ефекту під час моделювання твірних стовбурів дерев є можливість калібрування окремих параметрів, які визначають індивідуальні особливості їхньої форми [4, 8, 1]. Це дає змогу істотно підвищити точність рівнянь для деревних стовбурів із нетиповою формою.

Враховуючи зазначене, параметри степеневих моделей було знайдено з використанням моделей змішаного ефекту. Для порівняння точності

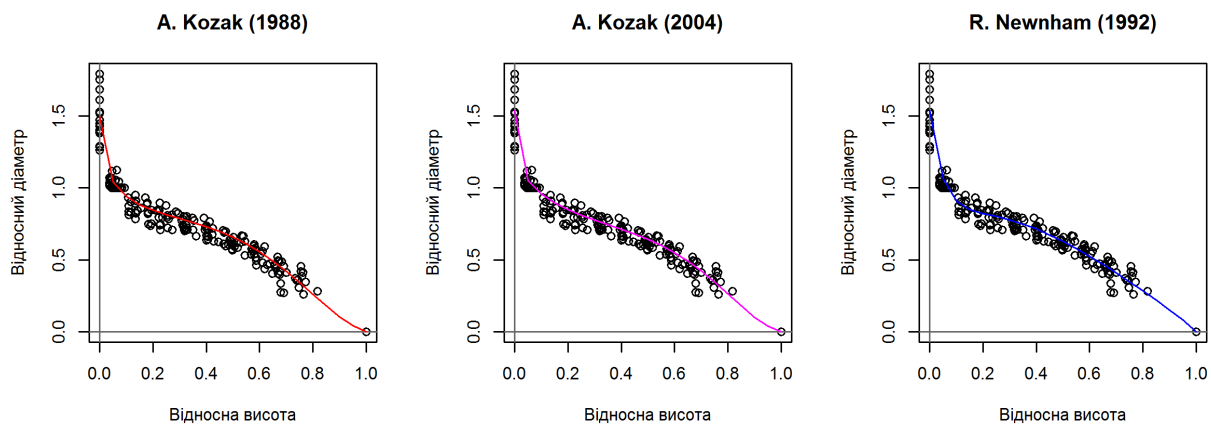
апроксимації дослідних даних за допомогою цих моделей використано інформаційний критерій Акаїке (AIC). На основі його значень (табл. 3) найточнішою виявилася модель А. Kozak (2004). Для пошуку параметрів математичних моделей А. Clark et al. (1991) застосовано класичний регресійний аналіз.

### 3. Параметри степеневих математичних моделей твірних стовбурів берези та їхні помилки

| Модель            | Оцінка параметра | Критерії оцінки* |     |       |     |
|-------------------|------------------|------------------|-----|-------|-----|
|                   |                  | SE               | df  | RMSE  | AIC |
| A. Kozak (2004)   |                  |                  |     |       |     |
| $a_0$             | 0,7401           | 0,11323          | 206 | 0,080 | 806 |
| $a_1$             | 0,8485           | 0,05075          |     |       |     |
| $a_2$             | 0,2578           | 0,06917          |     |       |     |
| $b_1$             | 0,7761           | 0,07598          |     |       |     |
| $b_2$             | -0,6217          | 0,27256          |     |       |     |
| $b_3$             | 0,3922           | 0,07114          |     |       |     |
| $b_4$             | 3,7848           | 1,69060          |     |       |     |
| $b_5$             | 0,0057           | 0,00369          |     |       |     |
| $b_6$             | 0,1836           | 0,06283          |     |       |     |
| A. Kozak (1988)   |                  |                  |     |       |     |
| $a_0$             | 1,1197           | 0,42846          | 207 | 1,319 | 874 |
| $a_1$             | 0,8915           | 0,16666          |     |       |     |
| $a_2$             | 1,0012           | 0,00608          |     |       |     |
| $b_1$             | 0,3921           | 0,14074          |     |       |     |
| $b_2$             | -0,0093          | 0,02468          |     |       |     |
| $b_3$             | -1,5266          | 0,40582          |     |       |     |
| $b_4$             | 0,7976           | 0,19512          |     |       |     |
| $b_5$             | 0,0569           | 0,04804          |     |       |     |
| R. Newnham (1992) |                  |                  |     |       |     |
| $a_0$             | 0,8743           | 0,06126          | 211 | 1,462 | 884 |
| $a_1$             | 0,3019           | 0,13992          |     |       |     |
| $a_2$             | 5,8707           | 0,13992          |     |       |     |
| $a_3$             | -11,1792         | 0,71341          |     |       |     |

\*SE – основна помилка параметрів; df – кількість ступенів свободи; RMSE – середня квадратична помилка моделі.

Графічний вигляд математичних моделей на фоні дослідних даних подано на рис. 2. Загалом треба зазначити, що моделі А. Kozak краще узгоджуються з формою стовбурів берези. Особливо це помітно в окоренковій частині стовбура.



**Рис. 2. Графічний вигляд степеневих математичних моделей твірної стовбурів берези у відносній системі координат**

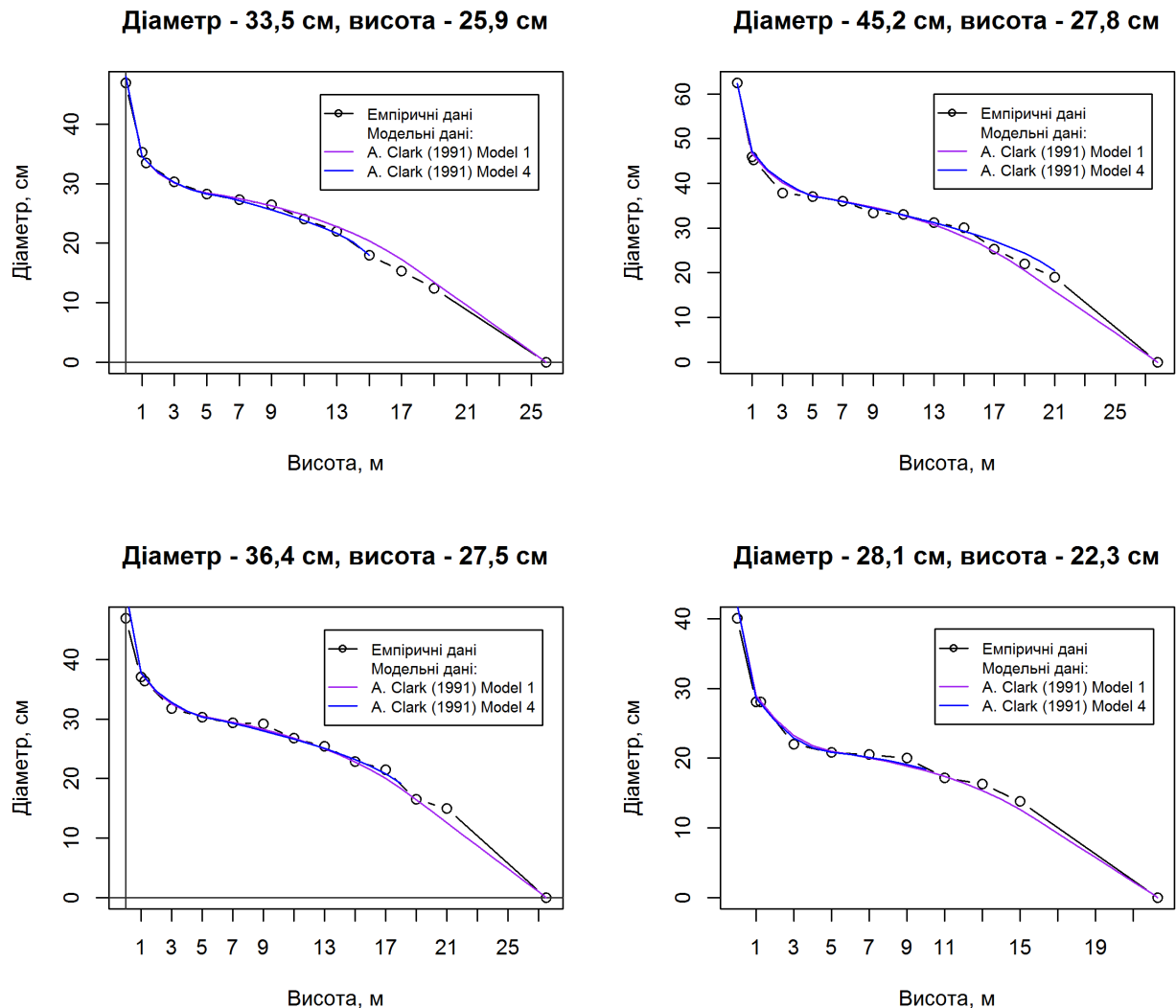
Моделювання форми стовбурів берези по зонах шляхом часткової апроксимації твірної за допомогою функцій А. Clark et al. (1991) дало змогу точніше спрогнозувати діаметри деревних стовбурів у діапазоні від 0,1 до 0,5 його висоти (табл. 5). Однак треба взяти до уваги, що у цьому випадку модель доповнює додатковий діаметр стовбура на висоті 5,27 м. Зазначена відмітка є унормованою в практиці лісової таксації США і використовується для визначення одного з показників форми стовбурів – Girard class-form. Автори подібних математичних моделей пропонують визначати вказаний діаметр опосередковано через його взаємозв'язок із діаметром на висоті грудей. Параметри розроблених математичних моделей А. Clark et al. (1991) для берези наведено в табл. 4.

#### 4. Параметри математичних моделей А. Clark et al. (1991)

| Модель                         | Параметри моделі по зонах |        |      |                            |                              |        |        |
|--------------------------------|---------------------------|--------|------|----------------------------|------------------------------|--------|--------|
|                                | окоренкова<br>(до 1,30 м) |        |      | серединна<br>(1,30–5,27 м) | верхівкова<br>(понад 5,27 м) |        |        |
|                                | $r$                       | $c$    | $e$  | $p$                        | $a$                          | $b$    | $q$    |
| Clark et al. (1991)<br>Model 1 | 51,92                     | 0,8014 | 9620 | 12,51                      | 2,015                        | 0,5943 | —      |
| Clark et al. (1991)<br>Model 4 | 31,72                     | 0,7996 | 9659 | 6,151                      | —                            | —      | 0,7528 |

На рис. 3 зображено чотири поздовжні перерізи стовбурів берези різних розмірів. Вони однозначно вказують на перевагу моделі, що базується не на

загальній висоті дерева, а на віддалі від основи стовбура до відмітки, де його діаметр становить 18 см у корі. Так, у США подібні моделі вважають найточнішими, при цьому загальноприйнятою є практика вимірювання висоти до так званого «upper-stem diameter», що приймається за мінімально допустиме значення діаметра ділових сортиментів (4, 7 або 9 дюймів).

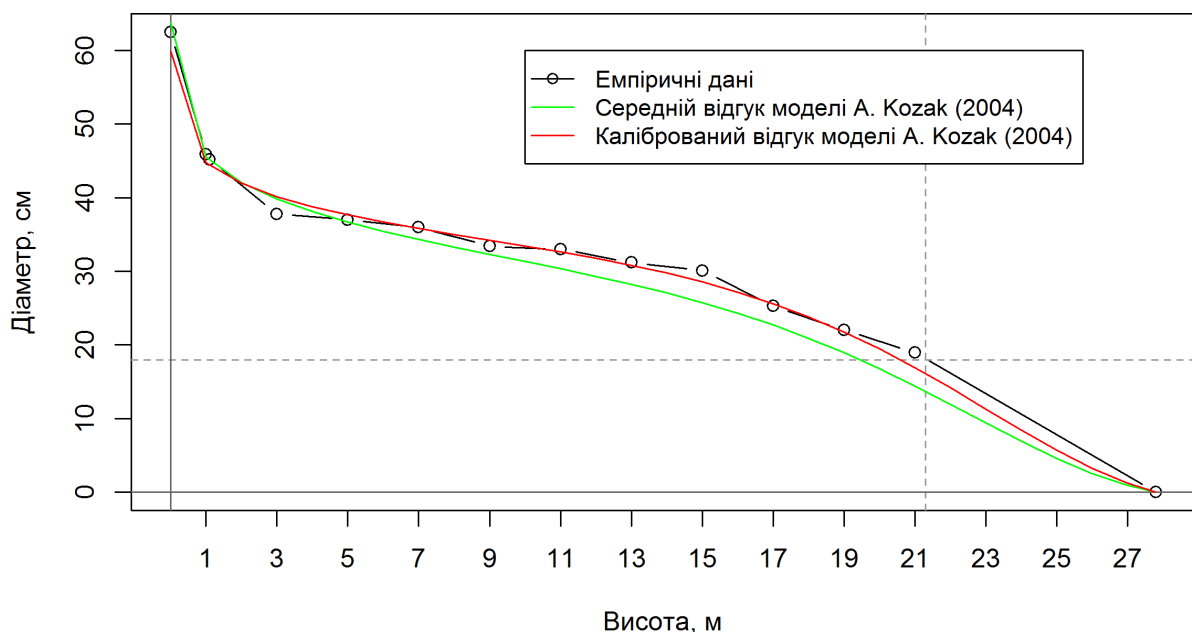


**Рис. 3. Особливості моделювання твірної стовбурів берези на основі математичних моделей A. Clark et al. (1991)**

Отже, треба погодитися, що додаткові заміри діаметра у верхній частині стовбура суттєво покращують точність моделей. У цьому відношенні проявляються переваги моделей змішаного ефекту, які можуть бути «підігнані» під конкретний стовбур. Детально цю техніку, відому як калібрування моделей, описано в роботах [3, 8]. На рис. 4 зображено поздовжній переріз стовбура

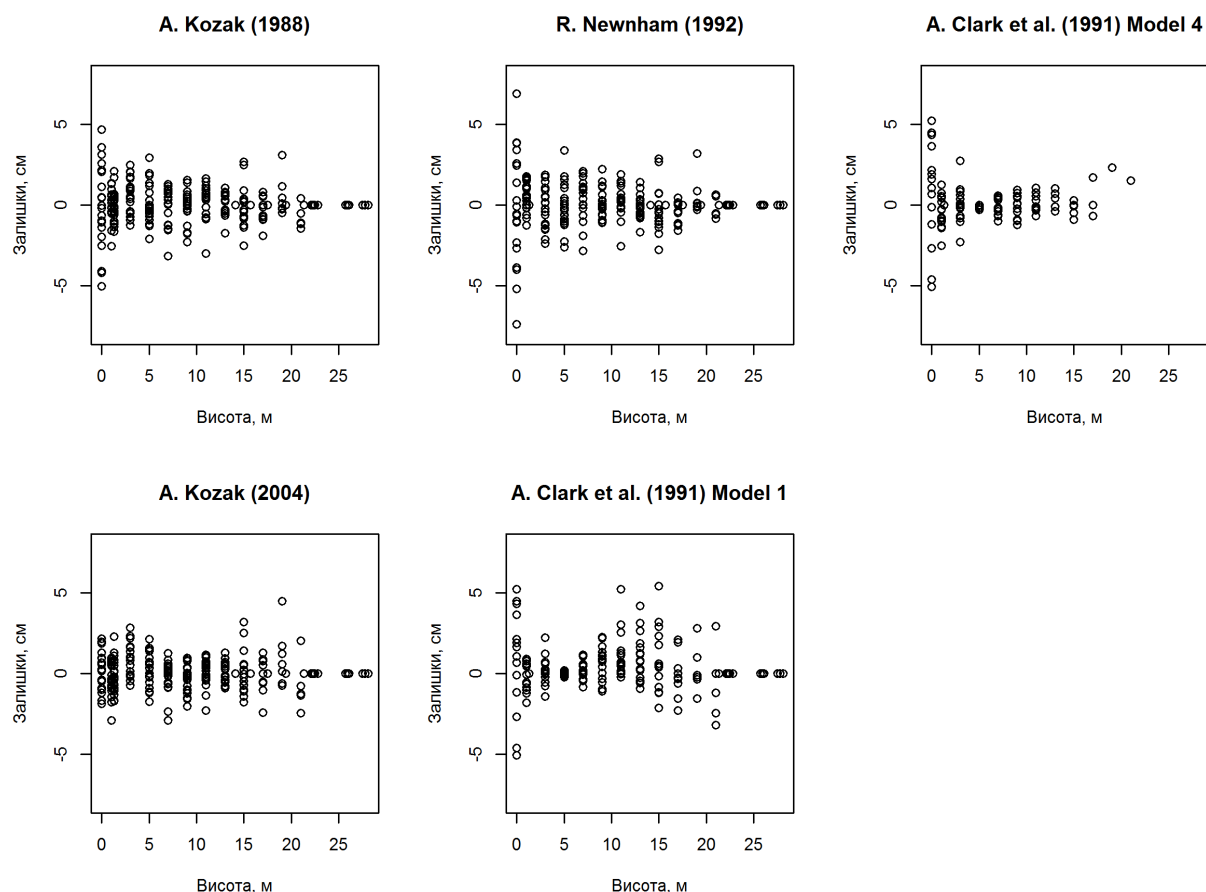
берези діаметром 45,2 см і заввишки 27,8 м, який має нехарактерний для цієї деревної породи збіг у верхній частині стовбура. Калібрування моделі А. Kozak (2004) виконано за алгоритмом, розробленим у роботі М. Arias-Rodil et al. [3], як додатковий замір використано діаметр 18,0 см у корі, що розташований на висоті 21,4 м. У результаті параметри  $a_1$  та  $b_3$  було скориговано на величину випадкового ефекту  $u_1 = -0,0326$  та  $u_2 = -0,10586$ , а модель набула такого вигляду:

$$d_i = a_0 \cdot d^{(a_1+u_1)} \cdot h^{a_2} \cdot \chi^{(b_1 \cdot q^4 + b_2 \cdot (1/\exp(d/h)) + (b_3+u_2) \cdot x^{0,1} + b_4 \cdot 1/d + b_5 \cdot h^w + b_6 \cdot x)}. \quad (4)$$



**Рис. 4. Валідація математичної моделі твірної А. Kozak (2004) на прикладі стовбура берези за різних значень параметрів  $a_1$  і  $b_3$**

Точність математичних моделей на різних ділянках стовбурів берези можна узагальнити з рис. 5. Бачимо, що особливості форми стовбурів берези в окоренковій частині, яка має значний збіг, найбільш точно описує рівняння А. Kozak (2004). Використання додаткових вимірювань діаметра вздовж по стовбуру дає змогу істотно підвищити точність моделей. Зокрема, це підтверджується в рівняннях А. Clark et al. (1991). Найбільш коректною є математична модель, яка спирається не на загальну висоту стовбура, а протяжність ділової частини стовбура.



**Рис. 5. Розподіл залишків моделей залежно від висоти стовбурів берези**

Величину помилок у визначенні діаметрів і об'ємів за допомогою розроблених моделей, які можуть виникати в різних частинах стовбурів берези, наведено в табл. 5.

### **5. Величина випадкових помилок у визначенні діаметрів і об'ємів стовбурів берези повислої за різними моделями твірної**

| $R_h$   | A. Kozak (1988) |                       | A. Kozak (2004) |                       | R. M. Newnham (1992) |                       | A. Clark (1990) |                       |
|---------|-----------------|-----------------------|-----------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------|-----------------------|
|         | діаметр, см     | об'єм, м <sup>3</sup> | діаметр, см     | об'єм, м <sup>3</sup> | діаметр, см          | об'єм, м <sup>3</sup> | діаметр, см     | об'єм, м <sup>3</sup> |
| 0,0–0,1 | 2,08            | 0,0215                | 2,15            | 0,0214                | 2,08                 | 0,0241                | 2,06            | 0,0223                |
| 0,1–0,2 | 1,36            | 0,0145                | 1,44            | 0,0136                | 1,37                 | 0,0145                | 0,61            | 0,0051                |
| 0,2–0,3 | 1,56            | 0,0149                | 1,53            | 0,0134                | 1,60                 | 0,0158                | 0,33            | 0,0023                |
| 0,3–0,4 | 1,27            | 0,0119                | 1,33            | 0,0111                | 1,22                 | 0,0121                | 0,79            | 0,0057                |
| 0,4–0,5 | 1,32            | 0,0127                | 1,37            | 0,0121                | 1,23                 | 0,0125                | 0,86            | 0,0064                |
| 0,5–0,6 | 1,37            | 0,0128                | 1,25            | 0,0118                | 1,34                 | 0,0126                | 1,24            | 0,0087                |
| 0,6–0,7 | 1,81            | 0,0122                | 1,65            | 0,0114                | 1,93                 | 0,0125                | 1,86            | 0,0107                |
| 0,7–0,8 | 2,16            | 0,0111                | 2,04            | 0,0106                | 2,24                 | 0,0110                | 2,19            | 0,0100                |
| 0,8–0,9 | 1,40            | 0,0050                | 1,29            | 0,0046                | 1,42                 | 0,0045                | 1,40            | 0,0042                |
| 0,9–1,0 | 0,54            | 0,0008                | 0,47            | 0,0008                | 0,49                 | 0,0007                | 0,48            | 0,0006                |

**Висновки.** Подальше вдосконалення методів таксації об'єму стовбурів дерев і лісоматеріалів потребує глибшого вивчення особливостей їхньої форми, в чому варто орієнтуватися на сучасний досвід вирішення цього питання за кордоном. Використані у роботі методи узагальнення форми стовбурів дають змогу знайти належне наукове обґрунтування підходам із обліку деревного запасу. Переваги математичного моделювання твірних полягають у можливості прогнозування збігу на різних ділянках стовбура, що створює передумови до більш точної оцінки окремих сортиментів. Належне наукове обґрунтування розглянутих питань потребує залучення значно більшого за обсягом дослідного матеріалу.

### Список літератури

1. Лісотаксаційний довідник / [за ред. С. М. Кашпора, А. А. Строчинського]. – К. : Видавничий дім Вінченко, 2013. – 496 с.
2. Свинчук В. А. Математичні моделі об'єму деревних стовбурів основних лісоутворювальних порід України / В. А. Свинчук, С. М. Кашпор, В. В. Миронюк // Наук. вісник НУБіП України. – 2014. – № 198. – Ч. 2. – С. 58–64.
3. Arias-Rodil M. Fitting and calibrating a multilevel mixed-effects stem taper model for Maritime pine in NW Spain / M. Arias-Rodil, F. Castedo-Dorado, A. Camara-Obregon, U. Diegues-Aranda // PLoS ONE. – 2015. – Vol. 10 (12). – 20 p.
4. Burkhard H. E. Modeling forest trees and Stands [Electronic resource] / H. E. Burkhard, M. Tome. – Dordrecht : Springer-Verlag. – P. 471. – Mode of access: <http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-3170-9>.
5. Clark III A. Stem cubic-foot volume tables for tree species in the South / A. Clark III, R. A. Souter // USDA Forest Service Research Paper SE-290. – 1994. – 241 p.
6. Clark III A. Stem profile equations for southern tree species / A. Clark III, R. A. Souter, B. E. Schlaegel // USDA Forest Service Research Paper SE-282. – 1991. – 113 p.

7. Fonweban J. Taper functions for Scots pine (*Pinus sylvestris* L.) and Sitka spruce (*Picea sitchensis* (Bong.) Carr.) in Northern Britain / J. Fonweban, B. Gardiner, E. Macdonalds, D. Auty // Forestry. – 2011. – Vol. 84. – № 1. – P. 49–60.

8. Gomes-Galicia E. Selection of mixed-effects parameters in a variable-exponent taper equation for birch trees in northwestern Spain / E. Gomes-Galicia, F. Crecente-Campo, U. Diegues-Aranda // Annals of Forest Science. – 2013. – Vol. 70. – P. 707–715.

9. Hush B. Forest mensuration / B. Hush, T. W. Beers, J. A. Kershaw. – New York : John Wiley & Sons, 1982. – 337 p.

10. Kozak A. A variable-exponent taper equations / A. Kozak // Canadian Journal of Forest Research. – 1988. – Vol. 18. – P. 1363–1368.

11. Kozak A. My last words on taper equations / A. Kozak // Forest Chronicle. – 2004. – Vol. 80 (4). – P. 507–515.

12. Li R. Comparison of model forms for estimating stem taper and volume in the primary conifer species of the North American Acadian Region / R. Li, A. R. Weiskittel // Annals of Forest Science. – 2010. – Vol. 67. – P. 302.

13. Max T. A. Segmented polynomial regression applied to taper equations / T. A. Max, H. E. Burkhard // Forest Science. – 1976. – Vol. 22. – P. 283–289.

14. Newnham R. M. Variable-form taper functions for four Alberta tree species. / R. M. Newnham // Canadian Journal of Forest Research. – 1992. – Vol. 22. – P. 210–223.

15. Ozcelik R. Compatible volume and taper models for economically important tree species of Turkey / R. Ozcelik, J. Brooks // Annals of forest Science. – 2012. – Vol. 69 (1). – P. 105–118.

*На примере исследовательского материала, собранного в древостоях березы повислой вегетативного происхождения, обобщены основные подходы к моделированию образующих древесных стволов. Проанализированы различные математические модели образующих стволов деревьев, установлены особенности их применения для вычисления объема. Определены пути совершенствования методов таксации объема и размерно-качественной структуры древесины на основе обобщения модельных представлений о форме стволов.*

**Ключевые слова:** *форма стволов, образующая ствола, сбег ствола, нормативы объема стволов, модели смешанного эффекта.*

*Based on experimental data collected in second-growth birch stands the main approaches for modeling of tree stems form have been summarized in the article. It also presents analysis of different taper equations and their application for calculation of tree volumes. As a result possible ways for improving the methods of merchantable volume estimation using mathematical models of stem form have been discussed.*

**Key words:** *tree stem form, tree taper, taper equations, volume tables, mixed-effect models.*