

## МОДЕЛЮВАННЯ ЯКІСНОЇ СТРУКТУРИ СТОВБУРІВ СОСНИ ЗВИЧАЙНОЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

**В. Б. БИЧЕНКО**, кандидат сільськогосподарських наук  
e-mail: [vbbychenko@gmail.com](mailto:vbbychenko@gmail.com)

ДП «Смілянське лісове господарство»

**В. В. МИРОНЮК**, доктор сільськогосподарських наук, доцент  
<https://orcid.org/0000-0002-5961-300X>, e-mail: [victor.myroniuk@nubip.edu.ua](mailto:victor.myroniuk@nubip.edu.ua)

**П. І. ЛАКИДА**, доктор сільськогосподарських наук, професор  
<https://orcid.org/0000-0003-3639-2969>, e-mail: [lakyda@nubip.edu.ua](mailto:lakyda@nubip.edu.ua)

**М. М. БУР'ЯНЧУК**, аспірант\*,  
e-mail: [mburianchuk@nubip.edu.ua](mailto:mburianchuk@nubip.edu.ua)

Національний університет біоресурсів і природокористування України

У дослідженні висвітлено методику прогнозування об'єму якісних категорій стовбурової деревини для ділових стовбурів сосни звичайної, з використанням моделі розподілу різних якісних зон вздовж по стовбуру. Дослідження базується на емпіричному матеріалі, зібраному на лісосіці рубки головного користування, на якій для 245 модельних дерев визначено протяжність різних якісних зон деревини від окоренка до верхівки. Для узагальнення черговості появи та протяжності зон ділової деревини, дров і відходів у роботі використано напівмарковську ймовірнісну модель, яку визначали три параметри: 1) вхідні ймовірності появи відповідної якісної зони в окоренковій частині стовбура (початковий стан); 2) матриця розподілу довжин зони; 3) матриця ймовірностей зміни якісних зон на різних висотах стовбура. Згідно з дослідними даними, прийнято, що стовбури сосни починаються з ділової деревини. Для моделювання протяжності якісних зон стовбура застосовано функцію бета-розподілу, параметри якої підібрано залежно від відносної висоти початку відповідної зони стовбура. Ймовірності зміни якісних зон обчислено на основі емпіричних даних. У дослідженні виявлено, що розподіл довжин ділової та дров'яної деревини залежить від абсолютної висоти розташування на стовбурі та висоти стовбура. Для математичного узагальнення цього процесу в роботі визначено чотири зони, в межах яких розподіл протяжності ділової частини стовбура може описуватися єдиною функцією. Ймовірності зміни якісних зон змодельовано залежно від відносної висоти стовбурів. На цій основі опрацьовано методику імітаційного моделювання вихідних масивів даних, які можуть використовуватися з метою розроблення таблиць розмірно-якісної структури деревини для стовбурів різних діаметрів, висоти та категорій технічної придатності. Виконане дослідження стосується лише ділових стовбурів сосни, тож потрібно очікувати інші закономірності для стовбурів інших деревних видів, а також напівділових і дров'яних стовбурів. Розроблену методику доречно використовувати під час оновлення таблиць розподілу об'єму стовбурів за розмірно-якісними категоріями, які нині треба оновити шляхом запровадження нових вимог щодо класифікації ділової деревини в Україні.

\* Науковий керівник – доктор сільськогосподарських наук, професор А. М. Білоус.

**Ключові слова:** ділова деревина, функція розподілу, напівмарковська ймовірнісна модель, таблиці розмірно-якісної структури.

**Актуальність.** Перехід лісової галузі України на європейські стандарти щодо класифікації круглих лісоматеріалів за розмірами та якістю зумовив потребу в оновленні нормативної бази, що застосовується на виробництві під час обліку стовбурового запасу деревини. Впродовж 2019–2020 рр. здійснено перший етап розроблення нормативів, який передбачав моделювання виходу круглих лісоматеріалів за класами товщини для десяти основних деревних порід: сосна, ялина, ялиця, дуб, бук, ясен, граб, береза, вільха, осика (Bilous et al., 2020). Необхідно зауважити, що запропоновані нормативи дають змогу виконувати попередню оцінку суто максимально можливого виходу ділової деревини та її розмірної структури. Це зумовлено використанням наявного на кафедрі таксації лісу та лісового менеджменту НУБіП України дослідного матеріалу (близько 20 тис. модельних дерев), який зібрано протягом останніх двох десятиліть за вже відміненими міждержавними стандартами. Тому, для вдосконалення вказаних нормативів, необхідно залучити нові емпіричні дані. Очевидно, що отримання достатньої кількості модельних дерев потребує значних фінансових витрат, а головне – часу.

Більшість нормативів в Україні розроблено шляхом вирівнювання емпіричних даних методами регресійного аналізу. Для отримання таких моделей достатнього рівня адекватності та точності необхідно мати значний за обсягом дослідний матеріал – від 400 до 600 модельних дерев для кожного деревного виду (Nikitin & Shvidenko, 1972). Через це постає необхідність глибшого вивчення взаємозв'язку ви-

падкових величин, які впливають на формування розмірно-якісної структури об'єму деревного стовбура. Зокрема застосування теорії випадкових процесів та імітаційного моделювання дає змогу отримувати достатню кількість реалізацій змодельованого процесу для забезпечення встановленої точності та рівня довірчої ймовірності.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** В Україні для відображення розмірно-якісної структури стовбурів випадковий процес уперше було застосовано у 1983 р. під час виконання науково-дослідної роботи щодо оптимізації структури лісозаготівлі в умовах Українських Карпат (Developing Scientific Background, 1983). Ідея застосування належить Я. А. Юдицькому, який у 1985 р. опублікував методичне підґрунтя для можливості застосування випадкових функцій під час вирішення задач сортирентації (Yudytskyi, 1985). Подальший розвиток цей метод отримав у роботах О. В. Полякова, зокрема в науковій розробці «Адаптивна промислова сортирентація лісосічного фонду» (Poliakov & Poliakov, 1999, 2008, 2009). Цю розробку використано для складання деяких нормативів (Kashpor & Stochynskyi, 2013) та їх актуалізації в 2020 р. за новими європейськими стандартами (Bilous et al., 2020). В основу наведених досліджень покладено стохастичну модель розподілу якісних зон вздовж по стовбуру, опрацьовану на основі теорії марковських процесів за припущення, що довжина зон (тобто час знаходження системи у певному стані) розподілена за експотенційним законом (Koroliuk & Turbin, 1976). У результаті встановлено, що клас якості

наступної зони стовбурів, як аналог наступного стану системи Маркова, залежить лише від класу якості поточної зони (поточного стану системи) і не залежить від його більш ранніх станів.

Моделювання ймовірнісного розподілу появи відповідної якісної зони вздовж по стовбуру виявляється складним завданням навіть із позиції можливості застосування статистичних методів. Розподіл значень відгуку, тобто об'єму деревини відповідного класу якості в стовбуровому запасі, зазвичай далекий від нормального. Через це на основі моделей збігу стовбурів (Adamec et al., 2019) і моделей об'єму ділової деревини (Fonweban et al., 2012) вдається більш-менш успішно спрогнозувати її об'єм в окремому стовбурі, проте такий підхід не справцює на рівні лісового насадження.

Поставлена проблема потребує складнішого методичного рішення, яке б дало змогу врахувати ймовірність появи тієї чи іншої якісної зони на стовбурі, а потім – розподілу об'єму за класами якості. Зважаючи на це, Fortin et al. (2009), розглядаючи кожен якісний клас стовбура як бінарну характеристику (наявність якої на стовбурі може характеризуватися значенням 1, а відсутність – 0), на першому етапі використали лінійну логістичну регресію для моделювання ймовірності появи цих зон залежно від біометричних показників деревного стовбура. Лише після цього розглядали модель розподілу об'єму деревини відповідного класу якості для стовбурів дерев берези і клена провінції Квебек у Канаді. Важливо зауважити, що моделі розробляли окремо для чотирьох якісних категорій (категорій технічної придатності) стовбурів.

Схожий підхід, побудований на бінарній логістичній регресії для прогнозування ймовірності появи якісних

зон на стовбурі, застосовували пізніше фахівці Лісової Служби США (Banzhaf et al., 2016). За висновками вчених, достатній рівень точності подібних моделей варто очікувати лише для загальних показників, агрегованих на рівні деревостанів. У окремих випадках моделювання якісної структури об'єму стовбурової деревини розглядали з позиції теорії статистичної класифікації зон стовбура за якістю. Наприклад, Schneider et al. (2008) поєднали мультиноміальну логістичну регресію для прогнозування кількості кінцевих класів якості деревини та біноміальні логістичні моделі – для виявлення ймовірності появи кожного з них для стовбурів.

Загалом, треба констатувати, що наукова література в контексті представленого дослідження достатньо обмежена. Незважаючи на наявність окремих публікацій із прогнозування якісних характеристик стовбурової деревини, можливість одночасного моделювання розмірних і якісних показників майже не розглядалася. На основі цього треба визнати важливе значення наукових ідей, які запропонували раніше Я. А. Юдицький і О. В. Поляков (Poliakov & Poliakov, 1999, 2008, 2008; Yudytskyi, 1985).

**Метою дослідження** є обґрунтування на основі дослідного матеріалу моделі випадкового процесу протяжності зон стовбура за якістю, а саме ділової деревини, дров і відходів. Визначити можливість практичного застосування отриманої моделі процесу під час розроблення нормативів.

#### **Матеріали і методи дослідження.**

**Дослідний матеріал.** У дослідженні використано дослідний матеріал, зібраний у ДП «Городнянське ЛГ» Чернігівської області. На закладеній пробній площі зрубано 245 ділових модельних дерев сосни звичайної, для

яких визначали висоту пня, а на стовбурах оцінювали зони за якістю та вимірювали їхню довжину. Загалом на модельних деревах було виділено 821 зону ділової та 307 зон дров'яної деревини. Мінімальна довжина ділових лісоматеріалів приймалася рівною 1,0 м, тоді як для відрізків дров'яної деревини – 0,5 м. Після цього працівники підприємства розкрязовували стовбури на лісоматеріали за чинними специфікаціями та приймали заготовлену лісопродукцію. Всього прийнято від заготівлі 266,7 м<sup>3</sup> лісоматеріалів, з них 248,5 м<sup>3</sup> ділової деревини та 18,2 м<sup>3</sup> дров.

Загальну характеристику дослідного матеріалу подано в табл. 1, де висоту дерев наведено з урахуванням висоти пня.

Аналізуючи статистику, необхідно звернути увагу на досить широкий діапазон мінливості таксаційних показників емпіричних даних. На це вказують коефіцієнти варіації діаметра (19,4 %) та протяжності ділової деревини в абсолютних показниках (63,6 %). Натомість відносні значення протяжності ділової деревини досить щільно групуються навколо середнього (71,6 %), зі стандартним відхиленням лише 1 %.

**Модельовання розподілу якісних зон стовбура.** Модель випадкового процесу визначає черговість появи та довжину ділянок стовбура певної якості від окоренка до верхівки. В загальному випадку клас якості може мати

сім дискретних значень:  $A, B, C, D$  – для ділової деревини;  $E$  – для дров'яних відрізків, які обмежені з обох сторін діловими;  $F$  – для дров'яної деревини, зона якої розпочинається після останньої ділової зони;  $G$  – відходи (вершинка стовбура діаметром у нижньому торці  $< 2$  см). Необхідно зауважити, що зони дров'яної деревини класу  $E$  було виявлено у невеликій кількості модельних дерев (із 307 зон дров'яної деревини лише 64 віднесено до класу  $E$ ), вони мали середню довжину 1,2 м. Припускаючи, що вплив таких відрізків на загальний розподіл об'єму є незначним, їх у моделюванні не враховували.

Відповідно до мети дослідження задачу може бути спрощено так, щоб розглядати лише один клас якості ділової деревини –  $T \in \{A, B, C, D\}$  і дров'яної деревини –  $F$ . Оскільки переходів із останньої у ділову не відбувається, можна вважати, що  $F$  – це поглинаючий (безповоротний) стан системи. Крім цього, розміщення на стовбурі точки переходу із зони  $F$  у зону  $G$  не має імовірнісного характеру і залежить лише від збігу конкретного стовбура. Враховуючи це, якісну структуру стовбура можна описати як випадковий процес, де клас якості зони (може мати значення  $T$  і  $F$ ) – це стан процесу, а довжина зони – час його перебування у цьому стані. Тобто стани процесу змінюються дискретно, а час неперервно – від мінімального (для ділової деревини – 1,0 м, для

### 1. Статистична характеристика модельних дерев

Статистики	Діаметр на висоті 1,3 м, см	Висота, м	Протяжність ділової деревини	
			м	частка від висоти, %
Середнє значення	36,1	27,1	19,5	71,6
Мінімальне значення	20	18,7	7,1	27,7
Максимальне значення	53	37,4	27,1	88,6
Стандартне відхилення ( $\sigma$ )	7,0	2,6	12,4	1,0
Коефіцієнт варіації ( $v$ ), %	19,4	9,6	63,6	1,4

дров – 0,5 м) до певного максимального значення.

Залежно від закону розподілу часу перебування у певному стані, процеси з дискретними станами та неперервним часом можна розглядати як марковські або напівмарковські процеси. Напівмарковські процеси є безпосереднім узагальненням ланцюгів і процесів Маркова та конструктивно можуть бути задані кількома способами (Koroliuk & Turbin, 1976).

У цій роботі ми обрали напівмарковську модель, яку визначають: 1) початковий розподіл вхідних імовірностей; 2) матриця функцій розподілу випадкового часу перебування в стані  $i$  за умови, що перехід відбудеться в стан  $j$ ; 3) матриця перехідних імовірностей вкладеного ланцюга Маркова. Такий підхід дає змогу прийняти, що функції розподілу випадкового часу перебування в стані  $i$  не залежать від наступного стану  $j$ , у який перейде система. В цьому випадку функції розподілу не пов'язані з матрицею перехідних імовірностей і можуть залежати лише від часу та/або інших показників системи. Крім того, можливо розглядати також зміну станів  $ii$ , врахувавши їх у матриці переходів. Іншими словами, довжина зони не залежить від якості наступної зони, а переходи можуть здійснюватись у той самий клас якості (із  $T$  у  $T$ ).

За такої конструкції процесу, його еволюцію можна описати так: починаючи з деякого стану  $i$ , який задається вектором  $p$  початкового розподілу, система проводить у цьому стані час  $\zeta_i$  з функцією розподілу  $G_i(x)$ ; після закінчення часу  $\zeta_i$  стан змінюється на  $j$  з імовірністю  $p_{ij}$ , яка задається перехідною матрицею  $P$ ; потрапивши у стан  $j$ , система проводить у цьому стані час  $\zeta_j$  і т. д., доки процес перейде у поглинаючий стан.

### Методика моделювання процесу:

1. Початковий розподіл вхідних імовірностей обчислювали на основі емпіричних даних. У загальному випадку – це вектор відносних частот появи певного класу якості на початку зрізаного стовбура (від пня):

$$p = \{p_i, i \in (1, 2 \dots n)\}.$$

Якщо класам якості, які можуть набувати 5 атрибутивних значень ( $A, B, C, D$  і  $E$ ), надати числові значення, тоді  $n = 5$ , а випадкова величина  $x_i \in (1, 2 \dots 5)$ . Функція розподілу такого дискретного ряду матиме вигляд:

$$F(x) = \sum_{i: x_i < x} p_i, \quad (1)$$

де  $F(x)$  – функція розподілу;  $x$  – аргумент функції;  $x_i$  – значення випадкової величини;  $p_i$  – імовірність появи  $i$ -го класу якості;  $i$  – індекси підсумовування, для яких виконується нерівність  $x_i < x$ .

Якщо прийняти спрощення, що ділова деревина становить один клас ( $T$ ), тоді  $n = 2$ , а випадкова величина  $x_i \in (1, 2)$ .

Під час генерування випадкового процесу висота пня ( $\tilde{h}_{\text{пня}}$ ) може бути прийнята фіксованою або як математична модель за біометричними показниками стовбура. Врахування висоти пня є необхідним тому, що переважна більшість математичних моделей твірної описує збіг стовбура, починаючи з нульової відмітки (від поверхні землі).

2. Закон розподілу часу (тобто довжин ділових зон) між точками зміни станів було визначено на основі дослідного матеріалу. Для цього абсолютні висоти точок початку кожної зони перераховані у відносні, за максимально можливою протяжністю ділової деревини для конкретної висоти стовбура та мінімальною довжиною ділової зони за формулою:



$$\hat{h}_i = \frac{h_i - h^{\text{пня}}}{\tilde{h}_{\text{max}}^{\text{діл}} - h^{\text{пня}} - \hat{l}_{\text{min}}^{\text{діл}}}, \quad (2)$$

де  $\hat{h}_i$  – відносна висота початку зони;  $h_i$  – фактична висота початку зони, м;  $\tilde{h}_{\text{max}}^{\text{діл}}$  – математична модель максимальної висоти закінчення ділової деревини, м;  $h^{\text{пня}}$  – фактична висота пня, м;  $\hat{l}_{\text{min}}^{\text{діл}}$  – мінімальна довжина ділової зони, м.

Вибір такого відліку зумовлено тим, що початки ділових зон розташовані на стовбурі у діапазоні висот  $h_i \in [h^{\text{пня}}; \tilde{h}_{\text{max}}^{\text{діл}} - \hat{l}_{\text{min}}^{\text{діл}}]$ , тобто вище точки  $\tilde{h}_{\text{max}}^{\text{діл}} - \hat{l}_{\text{min}}^{\text{діл}}$  процес з імовірністю 1 перейде у зону  $F$  дров'яної деревини і залишиться там аж до переходу в стан  $G$ .

Максимальну висоту закінчення ділової частини стовбурів сосни визначали на основі лінійної емпіричної моделі:

$$\tilde{h}_{\text{max}}^{\text{діл}} = a_0 + a_1 \cdot h, \quad (3)$$

де  $\tilde{h}_{\text{max}}^{\text{діл}}$  – максимальна висота закінчення ділової частини, м;  $h$  – висота стовбура, м;  $a_0, a_1$  – параметри рівняння.

Для отримання дослідних даних у зіставному вигляді, необхідно значення довжин зон представити також у відносних одиницях. Для цього їх перераховували за формулою;

$$\hat{l}^{\text{діл}} = \frac{l^{\text{діл}} - \hat{l}_{\text{min}}^{\text{діл}}}{\tilde{l}_{\text{max}}^{\text{діл}} - \hat{l}_{\text{min}}^{\text{діл}}}, \quad (4)$$

де  $\hat{l}^{\text{діл}}$  – відносна довжина зони;  $l^{\text{діл}}$  – фактична довжина зони, м;  $\hat{l}_{\text{min}}^{\text{діл}}$  – мінімальна довжина зони, м;  $\tilde{l}_{\text{max}}^{\text{діл}}$  – максимальна довжина зони, м.

У чисельнику цієї формули наведено випадкову складову довжини, а в знаменнику – розмах значень, тобто різницю між можливою максимальною та мінімальною довжиною.

Максимальна довжина зони обмежена максимально можливою висотою

закінчення ділової деревини, тому її обчислювали за рівнянням:

$$\hat{l}_{\text{max}}^{\text{діл}} = \tilde{h}_{\text{max}}^{\text{діл}} - h_i, \quad (5)$$

де  $\hat{l}_{\text{max}}^{\text{діл}}$  – максимальна довжина зони, м;  $\tilde{h}_{\text{max}}^{\text{діл}}$  – математична модель максимальної висоти закінчення ділової деревини (3), м;  $h_i$  – фактична висота початку зони, м.

Моделювання розподілу довжин якісних зон виконували за наведеними відносними показниками із застосуванням функції бета-розподілу, яка описує неперервні випадкові величини, що мають область визначення на проміжку  $[0-1]$ :

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad (6)$$

де  $B(\alpha, \beta)$  – бета-функція;  $x$  – незалежна змінна, м;  $\alpha, \beta$  – параметри.

Параметри функції розподілу знаходили за допомогою пакета «Пошук рішення» в MS Excel. Критерієм оптимізації обрано мінімум суми квадратів різниць емпіричних даних та відгуку моделі. Далі параметри  $\alpha$  та  $\beta$  вирівнювалися за відносною висотою за допомогою рівняння виду:

$$y = a_0 \cdot \exp(a_1 \cdot \hat{h}_i) + a_2, \quad (7)$$

де  $y$  – відповідний параметр рівняння (6);  $a_0, a_1, a_2$  – параметри;  $\hat{h}_i$  – відносна висота.

Довжину дров'яної зони ( $F$ ) може бути знайдено для конкретної реалізації випадкового процесу як різницю між висотою її закінчення (тобто переходу у зону відходів  $G$ ) і висотою закінчення ділової частини:

$$\hat{l}^{\text{др}} = \tilde{h}^{\text{др}} - \tilde{h}^{\text{діл}}, \quad (8)$$

де  $\hat{l}^{\text{др}}$  – довжина дров'яної зони, м;  $\tilde{h}^{\text{др}}$  – висота закінчення дров'яної зони, м;  $\tilde{h}^{\text{діл}}$  – висота закінчення ділової деревини, м.

Висоту  $\tilde{h}^{дп}$  обчислюють за рівнянням твірної, яке опрацьоване в [10], для умови, що  $f(h^{дп}) = 2$  см (мінімальний діаметр дров'яної деревини у верхньому відрізі). Висоту закінчення ділової деревини можна знайти за формулою:

$$\tilde{h}^{діл} = \tilde{h}^{пня} + \sum_1^i \tilde{l}_i^{діл}, \quad (9)$$

де  $\tilde{h}^{діл}$  – висота закінчення ділової частини, м;  $\tilde{h}^{пня}$  – висота пня, м;  $i$  – кількість згенерованих ділових відрізків, шт.;  $\tilde{l}_i^{діл}$  – довжина  $i$ -го ділового відрізка, м.

3. Перехідні імовірності. Як зазначено раніше, клас якості зони може мати два значення –  $T$  та  $F$ . Звідси матриця перехідних імовірностей набуде вигляду:

$$P = \begin{Bmatrix} p_{TT} & p_{TF} \\ p_{FT} & p_{FF} \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

де  $p_{ij}$  – імовірність переходу зі стану  $i$  в стан  $j$ .

Якщо прийняти, що  $p_{TF}$  – це значення деякої функції  $F(x)$ , тоді  $p_{TT} = 1 - F(x)$ , оскільки події  $TT$  і  $TF$  несумісні та становлять повну групу. Крім того, функція  $F(x)$  неспадна, адже, рухаючись вгору по стовбуру, ймовірність переходу в дров'яну деревину збільшується. Якщо  $F$  – це поглинаючий стан, очевидно, що  $p_{FT} =$

0, а  $p_{FF} = 1$ , тобто переходів  $FT$  у системі не відбувається. Звідси, для визначення елементів першого рядка матриці необхідно знайти  $F(x)$ . Для цього також застосовували функцію бета-розподілу (6).

#### Реалізація випадкового процесу.

Для отримання випадкового діаметра стовбура ( $d_{1,3}$ ) та його висоти ( $h$ ) прийнято, що ці величини мають рівномірний розподіл у межах ступеня товщини (градація 4,0 см) та розряду висот відповідно:

$$d_{1,3} \in [d^{ст} - 2,0; d^{ст} + 1,9]; \quad (11)$$

$$h \in [h_{min}^p; h_{max}^p], \quad (12)$$

де  $d^{ст}$  – середній діаметр ступеня товщини, см;  $h_{min}^p$ ,  $h_{max}^p$  – мінімальна та максимальна висота розряду висот відповідно.

Алгоритм генерування якісної структури стовбурів сосни за допомогою випадкового процесу можна подано у табл. 2. Реалізація алгоритму проводиться методом імітаційного моделювання за допомогою обернених функцій розподілу випадкових величин, де для кожного кроку (крім третього та двох останніх) як аргумент цих функцій генерується рівномірно розподілене випадкове число.

## 2. Алгоритм генерування якісної структури стовбура

№ з/п	Показник	Джерело	Посилання
1	$d_{1,3}$	границі ступеня товщини	(11)
2	$h$	границі розряду висот	(12)
3	$\tilde{h}^{пня}$	середнє значення або математична модель	–
4	клас якості зони	вхідні імовірності	(1)
5	довжина ділової зони	функція розподілу	(2–7)
6	клас якості зони	перехідні імовірності	(2, 6, 10)
7	довжина ділової зони	функція розподілу	(2–7)
...	...	...	...
$n-1$	довжина дров'яної зони	функція твірної	[10], (8, 9)
$n$	відходи	залишок до вершини	–

**Результати дослідження та їх обговорення.** У нашому дослідженні прийнято, що стовбур починається з ділової деревини, тобто початковий стан процесу – це клас якості  $T$ . За таких умов функція початкового розподілу вхідних імовірностей (1) для прийнятих класів якості зон ( $E, T$ ) набуде значень:  $P_E = 0; P_T = 1$ , адже поява на стовбурі зони  $E$  не враховувалась.

Висота пня в дослідному матеріалі лежить у досить вузьких межах 0,10–0,15 м, тому для моделювання випадкового процесу прийнято її середнє значення ( $\bar{h}^{\text{пня}} = 0,133$  м).

На рис. 1 наведено залежність абсолютних висот точок закінчення ділової частини модельних дерев від висоти стовбура, а також графік їхніх максимальних значень за математичною моделлю (3) та знайденими параметрами:  $a_0 = -2,896; a_1 = 0,9851$ .

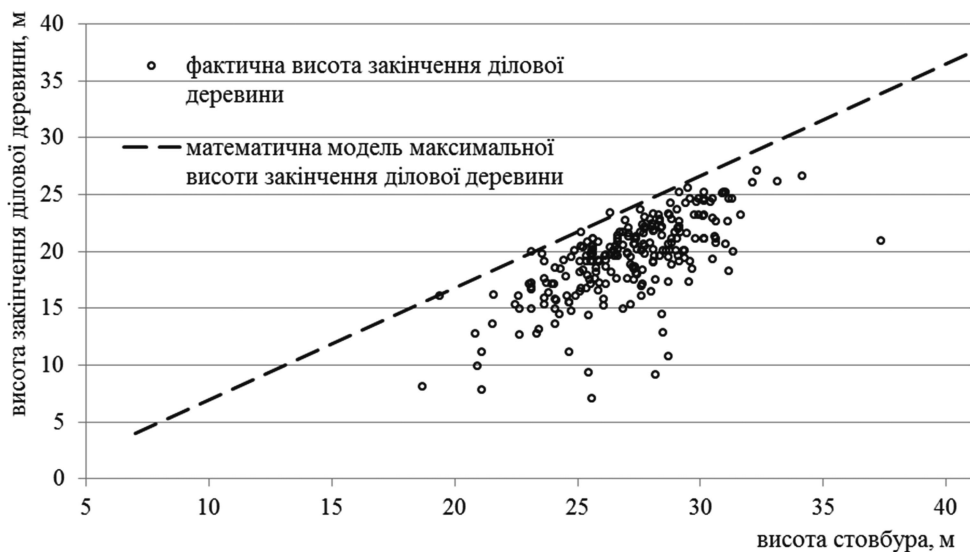
Застосувавши рівняння (2–5) і враховуючи, що мінімальна довжина ділової зони не залежить від таксаційних показників стовбура та дорівнює  $\bar{l}_{\text{мін}}^{\text{діл}} = 1$ , отримано масив дослідних

даних залежності відносної довжини зони від відносної висоти її початку (рис. 2). Аналізуючи цей графік, можна припустити, що розподіл відносної довжини зони на довільній відносній висоті залежить лише від цієї висоти та не залежить від висоти стовбура.

Для підтвердження такого припущення проведено аналіз масивів емпіричних даних для різних груп висот стовбурів за  $F$ -критерієм Фішера та  $t$ -критерієм Стюдента. Цей аналіз підтвердив гіпотезу, що групи належать до однієї генеральної сукупності (за рівня значущості  $\alpha = 0,05$ ).

Надалі обраховано відносні частоти появи довжин зон для проміжків відносної висоти стовбура:  $[0-0,1), [0,1-0,4), [0,4-0,7)$  та  $[0,7-1,0]$ . Графіки емпіричних функцій розподілу для зазначених проміжків наведено на рис. 3.

Із наведених графіків видно, що розподіли можуть бути відмінні від експотенційного, за нехарактерною для останнього формою у нижній частині та обмеженою областю визначення.



**Рис. 1.** Залежність висоти закінчення ділової частини стовбура від його висоти



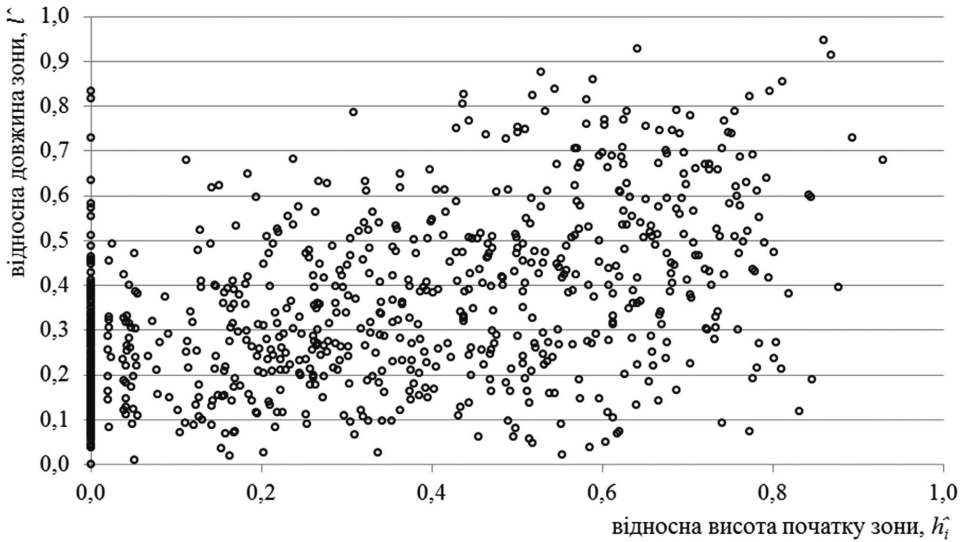


Рис. 2. Залежність відносних довжин зон ділової деревини від відносної висоти їхнього початку

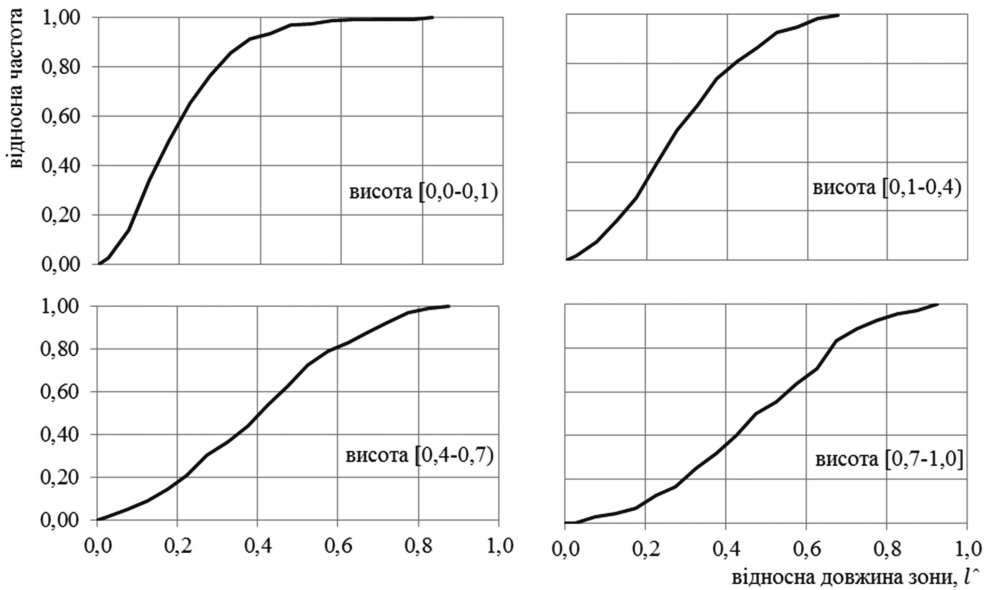


Рис. 3. Емпіричні функції розподілу відносних довжин зон ділової деревини за різних відносних висот їхнього початку

Тому можна класифікувати випадковий процес як напівмарковський.

Обчислені параметри  $\alpha$  та  $\beta$  рівняння (6) для зображених на рис. 3 емпіричних розподілів наведено в табл. 3.

Наведені в табл. 3 ряди параметрів вирівнювали за допомогою рівняння (7). Графіки їхніх змодельованих значень подано на рис. 4, а параметри математичних моделей – у табл. 4.

3. Значення параметрів бета-розподілу (6) відносних довжин зон

Параметр	Проміжки відносної висоти стовбура			
	[0,0-0,1)	[0,1-0,4)	[0,4-0,7)	[0,7-1,0]
$\alpha$	1,946	2,156	1,997	2,467
$\beta$	7,979	5,388	2,874	2,636

4. Значення параметрів рівняння (7)

Параметр рівняння (6)	Параметри рівняння (7)		
	$a_0$	$a_1$	$a_2$
$\alpha$	$7,113 \cdot 10^{-5}$	8,395	2,300
$\beta$	7,113	-2,846	1,387

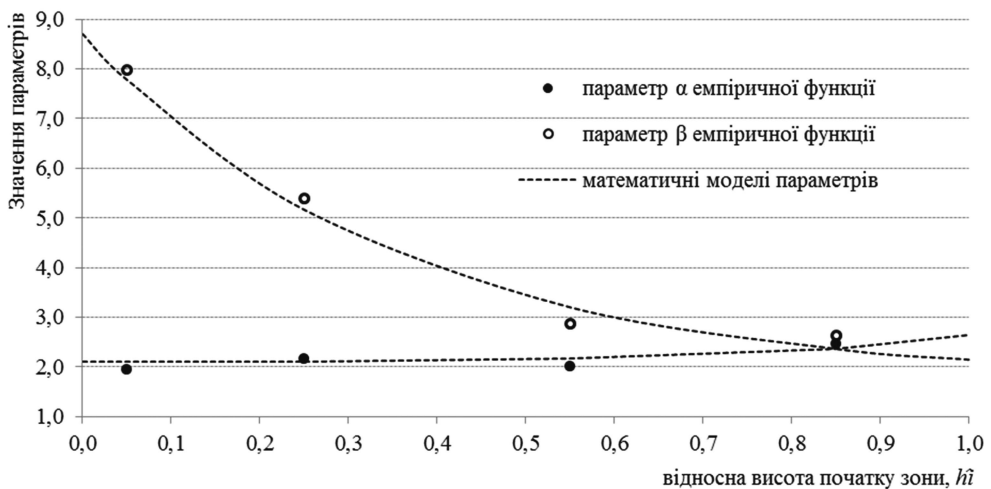


Рис. 4. Математичні моделі параметрів

Отже, застосувавши математичні моделі (2–7), у будь-якій точці на стовбурі можна отримати розподіл абсолютної довжини зони, параметри якого залежать від абсолютної висоти цієї точки та висоти стовбура (рис. 5).

Зображені на рис. 1 точки закінчення ділової деревини є точками переходу системи у поглинаючий стан. Якщо обчислити висоти цих точок у відносних одиницях за формулою (2), то можливо отримати зіставний масив дослідних даних (рис. 6).

Як видно з рис. 6, розподіл точок переходу слабо залежить від висоти стовбура. Крім того, проведений аналіз

масивів емпіричних даних для різних груп висот стовбурів за  $F$ -критерієм Фішера та  $t$ -критерієм Стьюдента підтвердив, що ці групи належать до однієї генеральної сукупності (за рівня значущості  $\alpha = 0,05$ ). На рис. 6 видно, що деякі значення відносних висот більші за одиницю. Це точки переходу, що розташовані на стовбурі у проміжку  $[\tilde{h}_{max}^{діл} - 1; \tilde{h}_{max}^{діл}]$ . При потраплянні чергової точки на цей проміжок процес з імовірністю 1 перейде у поглинаючий стан, адже мінімальна довжина зони  $T$  не може бути меншою ніж 1 м. Зважаючи на це, функцію розподілу

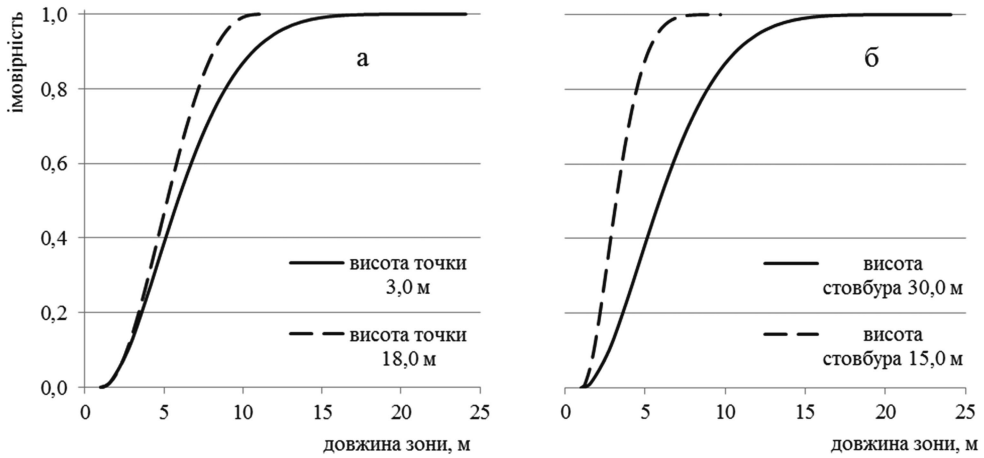


Рис. 5. Графіки змодельованих функцій розподілу довжини ділових зон (а – для стовбура висотою 30,0 м; б – для точки висотою 3,0 м)

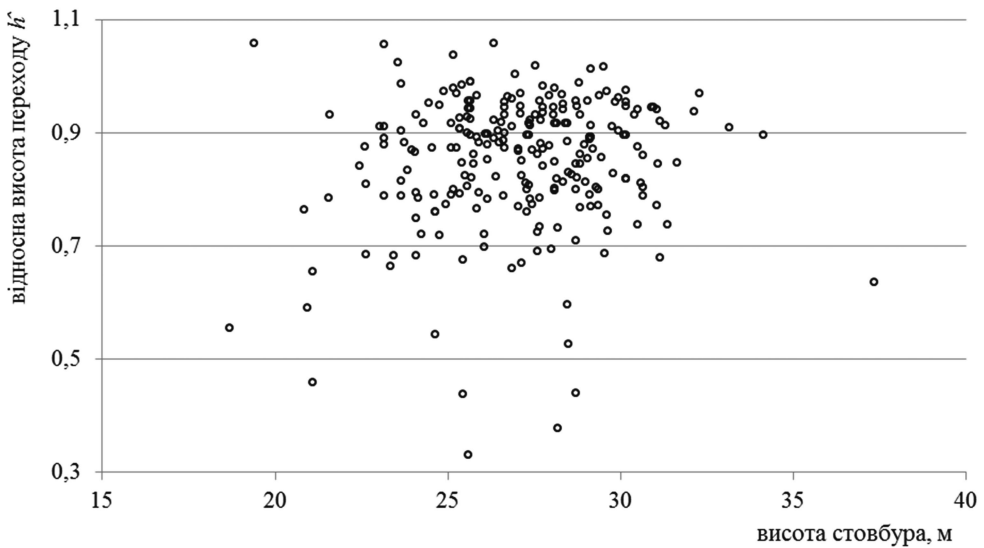


Рис. 6. Залежність висот точок переходу у поглинаючий стан від висоти стовбура

перехідних імовірностей можна представити у вигляді:

$$F(\tilde{h}_i) = \begin{cases} 0, & \tilde{h}_i < 0; \\ \int_0^{\tilde{h}_i} f(\tilde{h}_i) d\tilde{h}_i, & 0 \leq \tilde{h}_i \leq 1; \\ 1, & \tilde{h}_i > 1; \end{cases} \quad (13)$$

де  $F(\tilde{h}_i)$  – функція розподілу;  $f(\tilde{h}_i)$  – щільність розподілу;  $\tilde{h}_i$  – відносна висота.

Для визначення закону розподілу та його параметрів, стовбури модельних дерев було поділено на проміжки довжиною 0,05 відносної висоти ( $\tilde{h}$ ). Надалі обраховано відносні накопичені частоти появи точок переходу в стан  $F$ , які потрапили у ці проміжки. Аналіз емпіричної функції розподілу відносних частот показав, що вона також із достатньою точністю апроксимується

функцією бета-розподілу (6) з параметрами:  $\alpha = 10,75$ ;  $\beta = 2,436$ . На рис. 7 зображено графік функції розподілу (13) на фоні емпіричних даних.

Отже, для першого рядка матриці (10) для конкретної відносної висоти за допомогою рівняння (13) можна визначити перехідні імовірності.

Отримані математичні моделі характеристик випадкового процесу можуть бути оцінені статистичними методами. Для довжини зони проведено інтервальну оцінку середнього, яка більш обґрунтована та надійніша за точкову. Якщо математичне очікування моделі розподілу довжини зони лежить у довірчому інтервалі середнього значення для вибірки, тоді з певною імовірністю можна стверджувати, що похибка апроксимації не перевищить величину цього інтервалу.

Довірчі інтервали вибіркового середнього для ймовірності 0,99 ( $\alpha = 0,01$ ) розраховані за проміжками відносної висоти початку зон (див. табл. 3) за формулою:

$$\bar{x}_B \pm \frac{\sigma_B \cdot 2,58}{\sqrt{n}}, \quad (14)$$

де  $\bar{x}_B$  – вибіркве середнє відносної довжини зони;  $\sigma_B$  – вибіркве серед-

ньоквадратичне відхилення;  $n$  – кількість зон.

Математичні очікування бета-розподілу відносних довжин зон для кожної точки емпіричних даних обчислені за формулою:

$$\bar{x}_M = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad (15)$$

де  $\bar{x}_M$  – математичне очікування моделі;  $\alpha$ ,  $\beta$  – параметри рівняння (6) табл. 3.

Отримані дані подано на рис. 8.

Аналіз наведеного графіка засвідчує, що з імовірністю 99 % математичне очікування змодельованої середньої довжини зони буде перебувати у довірчому інтервалі, що вказує на прийнятну точність математичної моделі. У абсолютних показниках математичне очікування моделі усереднене за всіма точками модельних дерев (5,76 м) і наближається до середнього емпіричних даних (5,67 м), що також підтверджує цей висновок.

Точність математичної моделі розподілу перехідних імовірностей (13) виявилась прийнятною як за стандартною похибкою моделювання ( $s_m = 0,0184$ ), так і за коефіцієнтом детермінації ( $R^2 = 0,996$ ).

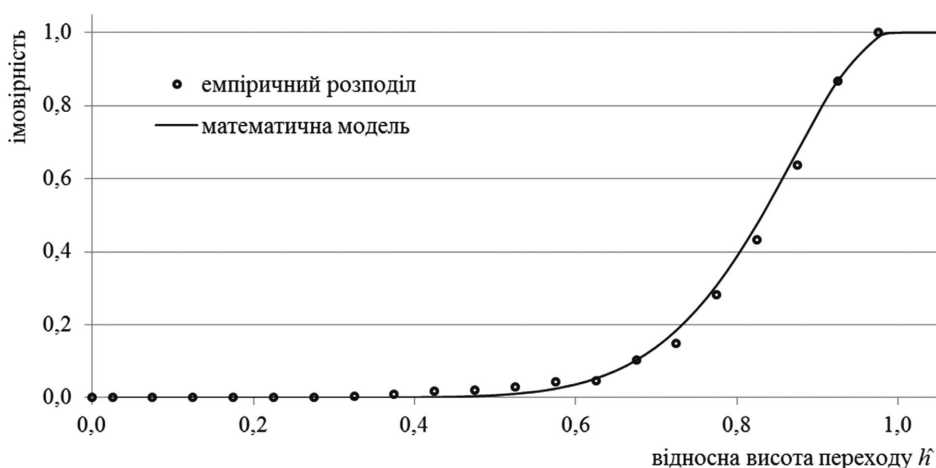


Рис. 7. Розподіл відносних висот точок переходу в поглинаючий стан

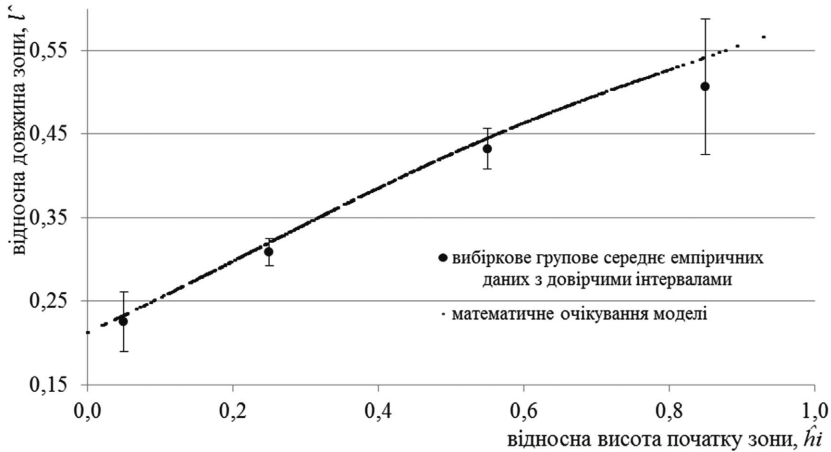


Рис. 8. Довірчі інтервали середньої довжини зон емпіричних даних та їхнє математичне очікування за математичною моделлю

Аналізуючи будову описаного випадкового процесу, можна виокремити два основні чинники, які суттєво впливають на кінцевий результат генерування якісної структури стовбура.

По-перше, це максимальна протяжність ділової деревини. Цей показник зумовлює розмах розподілу довжин ділових зон та їхню можливу максимальну довжину, а також розподіл висоти переходу ділових зон у дров'яні. На практиці висота закінчення ділової частини стовбура є підставою для поділу дерев на категорії технічної придатності. Тому, змодельовавши цей показник для напівділових і дров'яних стовбурів, без труднощів знайдемо інші характеристики випадкового процесу.

Другим чинником є форма (або закон) розподілу довжин ділових зон. Можливо, що для інших деревних видів апроксимація розподілів потребуватиме застосування інших випадкових функцій, ніж для сосни, що вказує на необхідність подальших досліджень.

Позитивною стороною випадкового процесу є властивість створювати на його основі реалізації, яких немає у вибірці, але які з певною імовірністю

можуть існувати у генеральній сукупності. Очевидно, що якщо в емпіричному матеріалі є два однакові стовбури, в яких на певній висоті починається зона протяжністю 3,0 м і 4,0 м відповідно, то можна стверджувати про існування в природі стовбурів з довжиною зони 3,1, 3,2 ... 3,9 м. Тому формування симуляційної вибірки на основі випадкового процесу враховує такі варіанти, а отже більш повно відображає об'єкт дослідження.

Опрацьована у цій роботі методика дає змогу отримати дослідну вибірку для подальшого розрахунку на її основі нормативів розмірно-якісної або товарної структури насаджень. Звісно, постає питання розміру такої вибірки. За даними попередніх досліджень (Poliakov & Poliakov, 1999, 2008, 2009) встановлено, що для кожного варіанта «діаметр–висота» стабілізація показників розподілу об'єму стовбура настає після 150 генерацій процесу.

Іншим питанням є знаходження показників розподілу об'єму стовбура за отриманими реалізаціями процесу. Найдосконаліші методи оцінки об'єму стовбура пов'язані з його твірною, яка дає змогу спрогнозувати діаметри від

окоренка до верхівки та обчислити серединний діаметр і об'єм будь-якого відрізка, знаючи висоту його початку та кінця. Тому отримання даних розподілу об'єму масиву згенерованих стовбурів потребує наявності адекватної математичної моделі збігу та алгоритму умовного розкряжування відповідно до виробничих специфікацій.

В останніх дослідженнях для десяти основних деревних видів України обґрунтовано математичну модель твірної у корі А. Kozak (2004), а також модель співвідношення діаметрів без кори та у корі. Параметри цих моделей опрацьовані та перевірені в межах науково-технічної роботи (Developing Reference Data, 2020). Алгоритм умовного розкряжування за наведеними моделями визначає діаметри згенерованого стовбура без кори в точках переходу якісних зон і «розкряжує» стовбур так, щоб одержати максимальний вихід лісоматеріалів вищих класів якості. Алгоритм дає змогу використовувати реальні специфікації круглих лісоматеріалів за серединним діаметром без кори та довжиною, а отже максимально наблизити результат моделювання до сучасних виробничих умов.

**Висновки і перспективи.** В дослідженні викладено методичні передумови використання випадкового процесу для моделювання розподілу протяжності ділової частини стовбурів дерев як основної характеристики, що

впливає на розмірну та якісну структуру запасу деревини. Запропонований підхід дає можливість спрогнозувати різноманітні комбінації біометричних показників дерев та підвищити рівень достовірності математичних моделей, покладених в основу об'ємних таблиць. Результати дослідження свідчать, що довжина відрізків ділової та дров'яної частин стовбура залежить передусім від відносної висоти зони стовбура, де вони спостерігаються. Для математичного узагальнення цього процесу в роботі визначено чотири зони, в межах яких розподіл протяжності ділової частини стовбура може описуватися єдиною функцією. Отже, розроблений алгоритм дає змогу дослідити закономірності черговості появи різних якісних зон стовбура та використати їх під час імітаційного моделювання якісної структури стовбурів дерев.

Незважаючи на те, що виконане дослідження стосується виключно ділових стовбурів, варто очікувати інших закономірностей розподілу якісних характеристик для стовбурів напівділових і дров'яних дерев. Загалом результати роботи вказують на шляхи удосконалення методики розроблення нормативів розмірно-якісної структури деревини за браком достатнього обсягу накопичених емпіричних даних, що стає особливо актуальним в умовах запровадження нових стандартів щодо класифікації деревини в Україні.

### Список літератури

- Adamec, Z., Adolt, R., Drápela, K., & Závodský, J. (2019). Evaluation of Different Calibration Approaches for Merchantable Volume Predictions of Norway Spruce Using Nonlinear Mixed Effects Model. *Forests*, 10 (12), 1104. <https://doi.org/10.3390/f10121104>
- Banzhaf, G. M., Matney, T. G., Schultz, E. B., Meadows, J. S., Jeffreys, J. P., Booth, W. C., Li, G., Ezell, A. W., & Leininger, T. D. (2016). Log-Grade Volume Distribution Prediction Models for Tree Species in Red Oak-Sweetgum Stands on US Mid-South Minor Stream Bottoms. *Forest Science*, 62 (6), 671–678. <https://doi.org/10.5849/forsci.15-138>
- Bilous, A. M., Kashpor, S. M., Myroniuk, V. V., Svychnyk, V. A., & Lesnik, O. M. (Eds.). (2020). *Forest Inventory Handbook*. Dnipro: Lira LTD, 2020 [in Ukrainian].



- Developing Reference Data for Log Grading by Diameter Classes: Report* (p. 310). (2020). Kyiv: National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine [in Ukrainian].
- Developing Scientific Background for Optimization of Logging in Stands of Main Forest Forming Species in the Carpathians: Report* (p. 64). (1983). Kyiv: Ukrainian Agricultural Academy [in Ukrainian].
- Fonweban, J., Gardiner, B., & Auty, D. (2012). Variable-top merchantable volume equations for Scots pine (*Pinus sylvestris*) and Sitka spruce (*Picea sitchensis* (Bong.) Carr.) in Northern Britain. *Forestry*, 85 (2), 237–253. <https://doi.org/10.1093/forestry/cpr069>
- Fortin, M., Guillemette, F., & Bédard, S. (2009). Predicting volumes by log grades in standing sugar maple and yellow birch trees in southern Quebec, Canada. *Canadian Journal of Forest Research*, 39 (10), 1928–1938. <https://doi.org/10.1139/X09-108>
- Kashpor, S. M., & Strochynskiy, A. A. (Eds.). (2013). *Forest Inventory Handbook*. Kyiv: Vinichenko, 496 [in Ukrainian].
- Koroliuk, V. S., & Turbin, A. F. (1976). *Semi-Markov processes and their application*. Kyiv: Naukova Dumka [in Russian].
- Kozak, A. (2004). My last words on taper equations. *The Forestry Chronicle*, 80 (4), 507–515. <https://doi.org/10.5558/tfc80507-4>
- Nikitin, K. E., & Shvidenko, A. Z. (1972). *Timber Cruising Using Computers*. Kyiv: Urozhai, 200 [in Russian].
- Poliakov, O. V., & Poliakov, M. O. (1999). Adaptive Algorithm for Commercial Grading of Harvested Wood: Manual. *Scientific Bulletin of National Agricultural University*, 17, 345–348 [in Ukrainian].
- Poliakov, O. V., & Poliakov, M. O. (2008). Adaptive Commercial Grading of Harvested Wood: Reference Data. *Scientific Bulletin of National Agricultural University*, 122, 153–158 [in Ukrainian].
- Poliakov, O. V., & Poliakov, M. O. (2009). Adaptive Commercial Grading of Harvested Wood: A Simulation Algorithm. *Scientific Bulletin of NULES of Ukraine*, 135, 201–205 [in Ukrainian].
- Schneider, R., Riopel, M., Pothier, D., & Côté, L. (2008). Predicting decay and round-wood end use volume in trembling aspen (*Populus tremuloides* Michx.). *Annals of Forest Science*, 65 (6), 608–608. <https://doi.org/10.1051/forest:2008042>
- Yudytskyi, Ya. A. (1985). Description of Grades of Harvested Wood using scholastic Process. In *Trends in Growth and Productivity of Forest Stands: Proceedings, Kaunas, Lithuania, April 6–17, 1985* (pp. 297–299) [in Russian].

### Bychenko V. B., Myroniuk V. V., Lakyda P. I., Burianchuk M. M. MODELING STRUCTURE OF SCOTS PINE STEMS VOLUME BY GRADE CATEGORIES USING STOCHASTIC PROCESS

The study highlights methodological aspects of predicting stem volume of merchantable Scots pine trees by grade categories using distribution models of different quality zones along stems. The study is based on empirical data collected in the mature stand during clear-cut harvesting. In total it includes measurements of 245 tree stems for which sequence and lengths of different quality categories were evaluated. A semi-Markov model was applied to characterize a random process of height-relevant co-occurrence and length of merchantable wood, firewood, and residues. The model was determined by the following parameters: 1) input occurrence probabilities of specific grade category in the butt section of tree stems (initial state of the system); 2) distribution matrix of grade categories by lengths; 3) matrix with transition probabilities between grade classes on different stem heights. In this study, we considered the process in which the initial state of the system was associated with merchantable wood which was true for most pine stems. We used beta-function to model lengths of grade categories which parameters were fitted using relative stems height. We also used empirical data to calculate probabilities of transition between merchantable wood, firewood, and residuals along pine stems. The analysis indicates that the length distribution of merchantable wood and firewood depends on the relative height where the grade is observed, and total tree stem height. Thus, we identified four zones where the function of beta-distribution was used to model lengths of each grade category with customized parameters depending on the relative height of their location on tree stem. As a result, we developed a methodology that can be used to simulate datasets with tree stem characteristics, and further to predict the distribution of volume by grade categories depending on their diameters, heights, and merchantability. It is worth noting that our study is focused merely on merchantable pine stems, and one should expect another relationship for stems of different tree species as well as for merchantable pulpwood trees. Given the new standard for merchantable wood classification adopted in Ukraine, the developed methodology is suitable for updating existing tables of distribution of tree stem volumes by wood grade categories.

**Keywords:** merchantable wood, distribution function, semi-Markov probability model, volume tables.

Отримано: 2021-08-01