УДК 621.316.1

Применение теории графов для расчетов систем электроснабжения. Кратчайший остов графа. Сеть с наименьшей протяженностью линий электропередачи

В.В. Козырский, Ю.Б. Гнучий, доктора технических наук

А.В. Гай, кандидат технических наук

Проведено обоснование целесообразности применения теории графов для рационализации структуры системы электроснабжения среднего класса напряжения. Осуществлен теоретико-практический поиск кратчайших остовов графа. Поставлены задачи дальнейших исследований.

Система электроснабжения, теория графов, кратчайший остов графа, сеть с наименьшей протяженностью линий электропередачи.

Теория графов является эффективным аппаратом формализации современных инженерных и научных задач, возникающих при изучении больших и сложных систем, а язык теории графов достаточно разработан и удобен. В настоящее время теория графов получила широкое практическое применение. Графы используются при анализе и проектировании систем электро-, водо-, газо-, теплоснабжения, транспортных сетей и пр. При этом особый интерес представляют решения оптимизационных задач на графах.

Можно сказать, что слова «граф» и «сеть» являются родственными, и вместо понятия граф часто используется понятие сеть. Это особенно относится к случаям, когда кроме основных чисто структурных соотношений в графе задаются некоторые количественные характеристики точек и линий, образующих граф. Такой взвешенный граф называют просто сетью.

Цель исследований — Провести анализ целесообразности использования теории графов для минимизации расстояний передачи электрической энергии в системах электроснабжения и сформировать задачи дальнейших исследований.

Материалы и методика исследований.

Введем основные определения и обозначения.

Графом G называется совокупность двух множеств – множества точек или вершин v_1 , v_2, …, v_n (которое обозначается через V) и множества линий или ребер $e_1, e_2, \ldots, e_m$ (которое обозначается символом E), соединяющих между собой все или часть этих точек. Граф G полностью задается парой (V, E). Подграфом графа $G\ (V, E)$ называется граф $G^{'}(V^{'}, E^{'})$, в котором $E^{'} \subset E$ и $V^{'} \subset V$.

Хотя ребра определяются как неупорядоченные пары различных вершин, удобно ребро, состоящее из вершин v_i и v_j, обозначать $e_{ij} = (v_i, v_j)$. При этом (v_j, v_i) означает то же самое ребро, что и (v_i, v_j).

Пусть v_i, v_j – вершины, $e_{ij} = (v_i, v_j)$ – соединяющее их ребро. Тогда говорят, что вершина v_i и ребро e_{ij} инцидентны, ребро e_{ij} и вершина v_j также инцидентны. Два ребра, инцидентные одной вершине, называются смежными; две вершины инцидентные одному ребру, также называются смежными.

При решении практических задач ребрам графа G сопоставляются (приписываются) числа – ребру e_{ij} ставится в соответствие некоторое число d_{ij}, называемое весом, или длиной или стоимостью (ценой) ребра. Тогда граф G называется графом с взвешенными ребрами. Иногда веса (числа P_i) приписываются вершинам v_i графа, и тогда получается граф с взвешенными вершинами. Если в графе веса приписаны и ребрам, и вершинам, то он называется просто взвешенным.

Мы будем рассматривать взвешенные графы, где каждое ребро имеет длину d_{ij} , а вершины представляют собой электрические нагрузки P_i . На рис. 1 показана конкретная схема сети электроснабжения, иллюстрирующая таким образом взвешенный граф. Пронумерованные вершины 1,2, … , 10 символизируют места потребления электрической энергии (потребителей), а вершина 11 соответствует питающей подстанции. В табл. 1 приведены координаты вершин и потребляемая мощность, которая является нагрузкой для подстанции, в табл. 2 длины ребер. Отметим, что общая протяженность сети составляет **42,52** км.

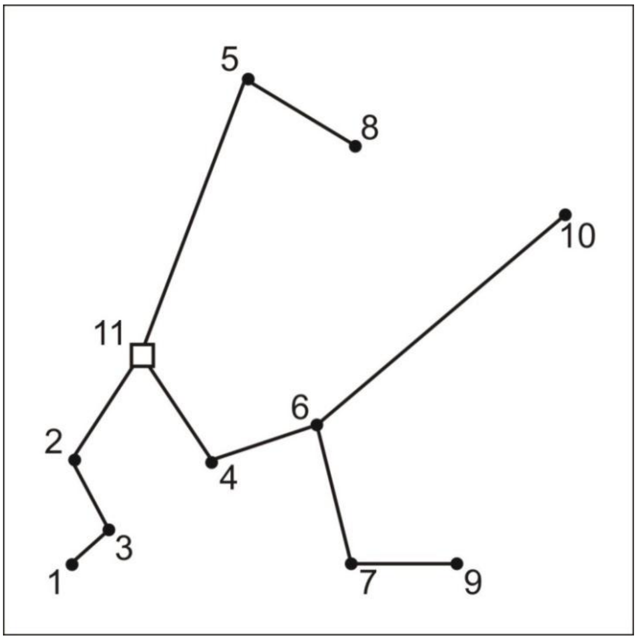

Рис. 1. Схема сети электроснабжения:

● – места потребления электрической энергии;

□ – питающая подстанция

Территориальное размещение подстанции зависит от нагрузки и расположения электропотребителей. Подстанцию необходимо размещать по возможности ближе к центрам сосредоточения нагрузок.

Приближение подстанции к нагрузкам позволяет повысить экономичность и надежность электроснабжения потребителей, так как сокращается протяженность сети, уменьшаются потери электроэнергии и отклонения напряжения, сокращаются зоны возможных аварий и пр.

1. Координаты вершин и потребляемая мощность. Координаты вершины 11 (подстанции): $x_{11} = 4$; $y_{11} = 8$

Вершины v_i	Координаты вершин: x_i ; y_i, км	Потребляемая мощность P_i , кВт	Вершины v_i	Координаты вершин: x_i ; y_i, км	Потребляемая мощность P_i , кВт
1	2; 2	750	6	9; 6	700
2	2; 5	1000	7	10; 2	800
3	3; 3	500	8	10; 14	1000
4	6; 5	250	9	13; 2	430
5	7; 16	630	10	16; 12	500

2. Длины ребер в данной электросети

Ребра (v_i, v_j)	Длины ребер d_{ij}, км	Ребра (v_i, v_j)	Длины ребер d_{ij}, км
(11,2)	3,61	(11,4)	3,61
(2,3)	2,24	(4,6)	3,16
(3,1)	1,41	(6,10)	9,22
(11,5)	8,54	(6,7)	4,12
(5,8)	3,61	(7,9)	3,00

Обычно центр электрических нагрузок определяют по таким формулам [12, 13]:

$$x_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \quad ; \qquad y_o = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} P_i} \quad , \tag{1}$$

где x_i , y_i – координаты потребителей; P_i – потребляемые мощности (электрические нагрузки); *n* – количество потребителей.

Для данного примера

$$x_0 = \frac{750 \cdot 2 + 1000 \cdot 2 + 500 \cdot 3 + 250 \cdot 6 + 630 \cdot 7 + 700 \cdot 9 + 800 \cdot 10 + 1000 \cdot 10 + 430 \cdot 13 + 500 \cdot 16}{750 + 1000 + 500 + 250 + 630 + 700 + 800 + 1000 + 430 + 500} = 7{,}44;$$

$$y_0 = \frac{750 \cdot 2+1000 \cdot 5+500 \cdot 3+250 \cdot 5+630 \cdot 16+700 \cdot 6+800 \cdot 2+1000 \cdot 14+430 \cdot 2+500 \cdot 12}{750+1000+500+250+630+700+800+1000+430+500} = 7{,}01.$$

Если подстанцию разместить в найденном центре электрических нагрузок и провести радиус-векторы от подстанции (как из начала координат) к потребителям, то получим такую схему (рис. 2). При этом формулы (1) превращаются в условие равновесия

$$\sum_{i=1}^{10} P_i \vec{r_i} = 0 \ , \qquad (2)$$

где длина каждого радиус-вектора $\vec{r_i}$ является плечом действующей нагрузки.

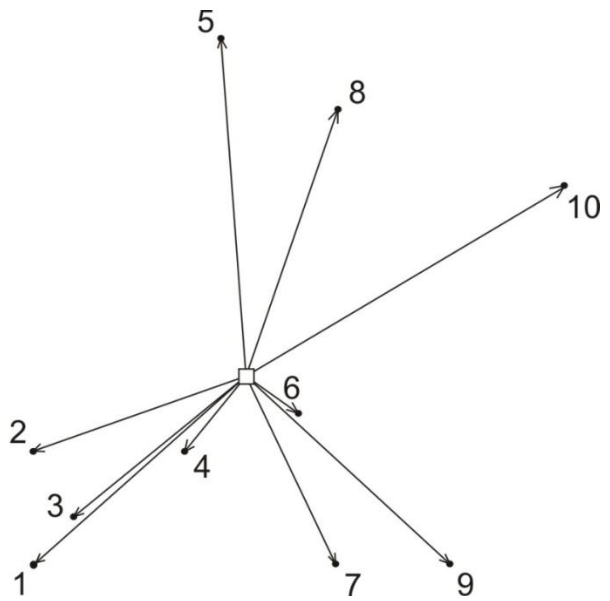

Рис.2. Размещение подстанции в центре электрических нагрузок, соответствующее условию равновесия (2)

Говоря теоретико-графовым языком, мы имеем направленный взвешенный граф, а точнее звездообразное дерево, в котором все ребра имеют одну общую вершину. Или, другими словами, звезда имеет только одну неконцевую вершину.

Такая упрощенная схема, где к каждому потребителю требуется отдельное соединение с подстанцией, на практике применяется редко.

Обычно сеть представляет собой более сложную графовую структуру, и обобщением центра электрических нагрузок будут различные центры графов, учитывающие эту структуру.

В теории графов [1, 2] маршрутом называется чередующаяся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, в которой любые два соседних элемента инцидентны. Если $v_0 = v_k$, то маршрут замкнут, иначе открыт. Если все ребра различны, то маршрут называется цепью. Если все вершины (а значит, и ребра) различны, то маршрут называется простой цепью или путем. В цепи $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k$, вершины v_0 и v_k называются концами цепи. Говорят, что цепь с концами v_i и v_j соединяет вершины v_i и v_j. Очевидно, что если есть цепь, соединяющая вершины v_i и v_j , то есть и простая цепь, соединяющая эти вершины. Замкнутая цепь образует цикл. Граф без циклов называется ациклическим или лесом.

Две вершины в графе связаны, если существует соединяющая их (простая) цепь. Граф, в котором все вершины связаны, называется связным. Любой общий граф можно разбить на подграфы, каждый из которых окажется связным. Такие связные подграфы называются компонентами связности. Связный ациклический граф называется деревом. Таким образом, компонентами связности леса являются деревья. Дерево с n вершинами имеет m=n-1 ребер.

Остовным деревом графа G (или просто остовом) называется подмножество ребер множества E , которые создают дерево, содержащее все вершины V. Можно сказать, что остов определяется множеством ребер, поскольку вершины остова суть вершины графа. Связный граф может иметь много остовов.

В случае взвешенных графов особый интерес представляют минимальные остовные деревья, т.е. остовные деревья с минимальной суммой весов ребер. Минимальное остовное дерево графа определяет подмножество ребер с минимальным весом, которое удерживает граф в одной компоненте связности.

Минимальные остовные деревья (кратчайшие остовы графов) позволяют решить задачу, в которой требуется соединить множество точек (представляющих различные объекты) наименьшим объемом дорожного полотна, проводов, труб и т.п. Задача построения минимального остовного дерева является одной из основных задач проектирования сетей.

В рассматриваемом примере на рис. 1 мы имеем остовное дерево, однако этот остов может не быть кратчайшим.

Любое дерево – это в сущности, наименьший (по количеству ребер) возможный связный граф, в то время как минимальное остовное дерево является наименьшим связным графов по весу ребер. Минимальное остовное дерево имеет наименьшую протяженность изо всех возможных остовных деревьев, но граф может содержать несколько минимальных остовных деревьев. Более того, все остовные деревья невзвешенного графа (или графа со всеми ребрами одинакового веса) являются минимальными остовными деревьями, т.к. каждое из них содержит ровно n-1 ребер. Такое остовное дерево можно построить с помощью алгоритма обхода в глубину или в ширину. Найти минимальное остовное дерево в взвешенном графе труднее. Тем не менее, задача построения кратчайшего остова графа является одной из немногих задач теории графов, которые можно считать полностью решенными. Известны различные способы построения минимального остовного дерева. Это алгоритмы Прима, Краскала, Борувки и др. [3 – 9].

Результаты исследований. Алгоритм Прима строит минимальное остовное дерево по одному ребру, находя на каждом шаге ребро, которое присоединяется к единственному растущему дереву. Алгоритм Краскала также строит кратчайший остов, добавляя к нему по одному ребру, но в отличие от алгоритма Прима, он отыскивает ребро, которое соединяет два дерева в лесу, образованном растущими поддеревьями кратчайшего остова. Построение начинается с вырожденного леса из V деревьев (каждое состоящее из одной вершины), а затем выполняется операция объединения двух деревьев (самыми короткими ребрами), пока не останется единственное дерево – кратчайший остов.

На рис. 3 показано пошаговое выполнение алгоритма Краскала для нашего примера. Разобщенный лес поддеревьев кратчайшего остова постепенно объединяется в единственное дерево.

Алгоритм Краскала наращивает связные компоненты вершин, создавая в конечном счете минимальное остовное дерево. Первоначально каждая вершина является отдельной компонентой будущего дерева. Алгоритм последовательно ищет ребро для добавления в изменяющийся лес путем поиска самого короткого ребра среди всех ребер, соединяющих два дерева в лесу. Пусть T_α и T_β – два произвольных дерева, полученных путем добавления ребер при построении кратчайшего остова. Если символ T_α использовать также для обозначения множества вершин данного дерева, то Δ_{ij} может быть определено как кратчайшее из расстояний между вершинами из T_α и вершинами из T_β , т.е.

$$\Delta_{ij} = \underset{v_i \epsilon T_\alpha}{\mathrm{MIN}} \quad \underset{v_j \epsilon T_\beta}{\mathrm{MIN}} \; d(v_i, v_j), i \neq j. \tag{3}$$

При выполнении алгоритма проверяется, не находятся ли обе конечные точки ребра Δ_{ij} в одной и той же связной компоненте. В случае положительного результата проверки такое ребро отбрасывается, т.к. добавление его создало бы цикл в будущем дереве. Если же конечные точки находятся в разных компонентах, то ребро принимается и соединяет две компоненты в одну. Так как каждая связная компонента всегда является деревом, то выполнять явную проверку на цикл нет необходимости.

Корректность алгоритма Краскала строго доказана и сформулирована в виде соответствующей теоремы [10].

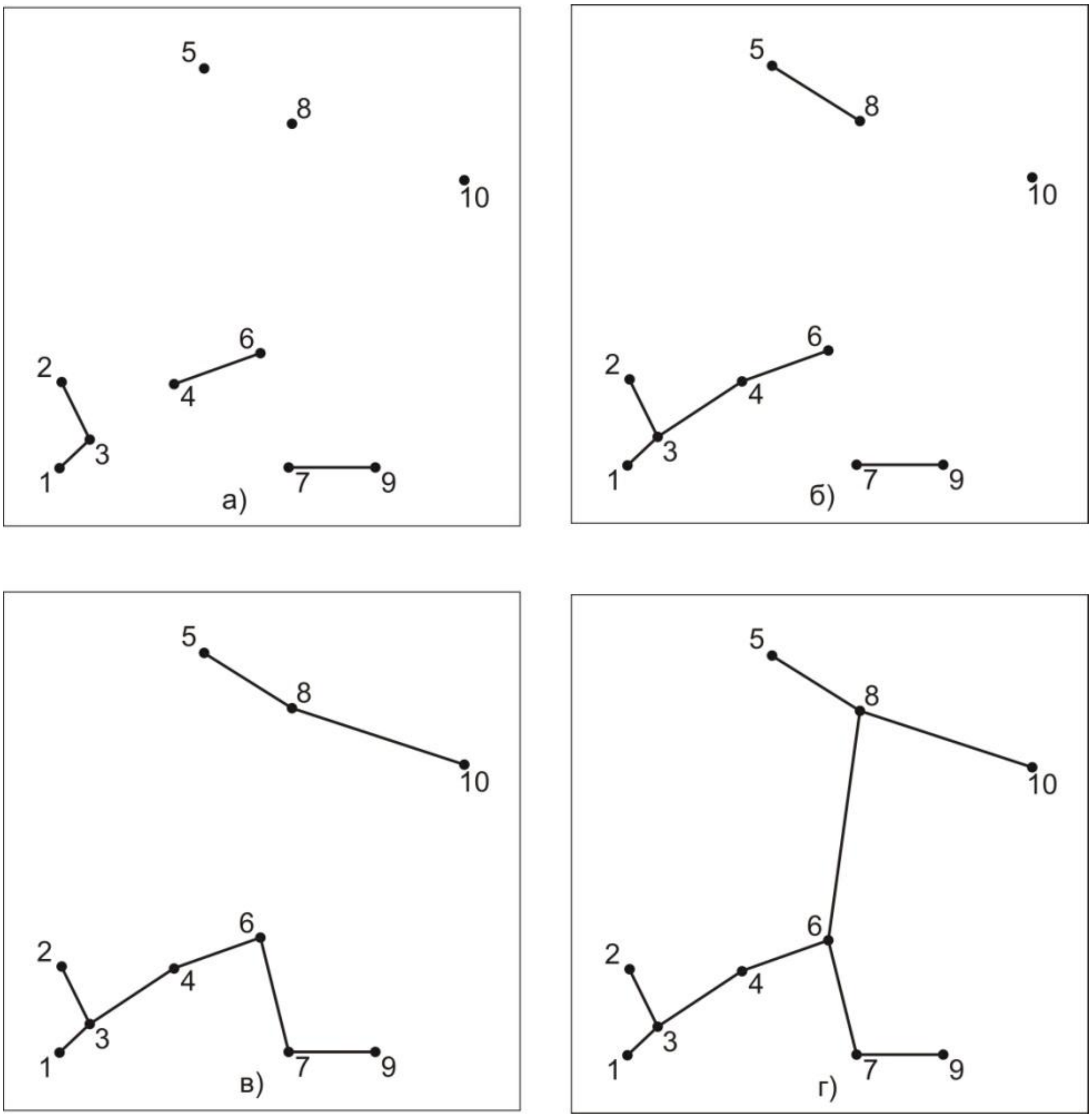

Рис.3. Связывание электропотребителей в единую сеть с наименьшей протяженностью линий при выполнении алгоритма Краскала

Построенное таким образом (см. рис. 3, г) кратчайшее остовное дерево или сеть с наименьшей протяженностью можно задать следующей матрицей смежности:

		1							
		1							
1	1		1						
		1			1				
							1		
			1			1	1		
					1			1	
				1	1				1
						1			
							1		

или же матрицей инцидентности

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9
v_1	1								
v_2		1							
v_3	1	1			1				
v_4				1	1				
v_5						1			
v_6				1			1		1
v_7			1				1		
v_8						1		1	1
v_9			1						
v_{10}								1	

В этой матрице ребра пронумерованы в порядке их образования в алгоритме Краскала.

Длины ребер построенной кратчайшей сети приведены в табл.3. Общая протяженность линий электропередачи составляет **35,53** км.

3. Длины ребер кратчайшей сети

Ребра (v_i, v_j)	Длины ребер d_{ij}, км	Ребра (v_i, v_j)	Длины ребер d_{ij}, км
(6,4)	3,16	(6,8)	8,06
(4,3)	3,61	(8,5)	3,61
(3,1)	1,41	(8,10)	6,32
(3,2)	2,24	(6,7)	4,12
		(7,9)	3,00

Выводы

В результате применения теории графов для рационализации структуры системы электроснабжения при неизменном составе, месторасположения и величинах установленной мощности потребителей, базируясь на теоретико-практическом поиске кратчайших остовов графа, было сокращена протяженность линий электропередачи на 7 км (на 16,5%). Таким образом, используя этот метод можно оптимизировать структуру как новопроектируемых электрических сетей, так и существующих при необходимости структурной реконструкции.

Список литературы

1. Харари Ф. Теория графов / Харари Ф. –М.: Мир, 1973. – 304 с.
2. Басакер Р. Конечные графы и сети / Басакер Р., Саати Т. –М.: Наука, 1974. – 368 с.
3. Свами М. Графы, сети и алгоритмы / Свами М., Тхуласираман К. –М.: Мир, 1984. – 456 с.
4. Майника Э. Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / Майника Э. –М.: Мир, 1981. – 328 с.
5. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / Кристофидес Н. –М.: Мир, 1978. – 432 с.
6. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / Пападимитриу Х., Стайглиц К. – М.: Мир, 1985. – 512 с.
7. Скиена С. Алгоритмы. Руководство по разработке / Скиена С. – СПб.: БХВ – Петербург, 2011. – 720 с.
8. Алгоритмы: построение и анализ / Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2005. – 1296 с.
9. Седжвик Р. Алгоритмы на C++ / Седжвик Р. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2011. – 1056 с.
10. Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика / Андерсон Дж. –М.: Изд. дом «Вильямс», 2004. – 960 с.
11. Основы электротехники / под ред. К.А. Круга. – М.-Л.: Гос. энергетическое изд-во, 1952. – 432 с.
12. Справочник по электроснабжению промышленных предприятий: в 2 кн. / под общ. ред. А.А. Федорова и Г.В. Сербиновского. – М.: Энергия, 1973. – Кн. 1. Проектно-расчетные сведения.– 520 с.
13. Справочник по электроснабжению промышленных предприятий: в 2-х кн. / под общ. ред. А.А. Федорова и Г.В. Сербиновского. – М.: Энергия, 1973. – Кн. 2. Проектно-расчетные сведения. – 520 с.

Проведено обґрунтування доцільності застосування теорії графів для раціоналізації структури системи електропостачання середнього класу напруги. Здійснено теоретико-практичний пошук найкоротших остовів графа. Поставлені завдання подальших досліджень.

Система електропостачання, теорія графів, найкоротший остов графа, мережа з найменшою протяжністю ліній електропередачі.

The justification of the usefulness of the graph theory to rationalize the structure of a medium-voltage power supply. Carried out theoretical and practical search shortest cores graph. Set targets for further research.

Power supply system, graph theory, the shortest skeleton graph, the network with the least length of transmission lines.