УДК 514.18

ЗНАХОДЖЕННЯ ПАРАМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗОТРОПНИХ ЛІНІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ФУНКЦІЙ ТА УТВОРЕННЯ МІНІМАЛЬНИХ ПОВЕРХОНЬ

С. Ф. ПИЛИПАКА, доктор технічних наук, професор
М. М. МУКВИЧ, кандидат технічних наук, доцент
Національний університет біоресурсів і природокористування України
E-mail: mmukvich@ukr.net

Анотація. *Здійснено аналітичний опис ізотропних ліній нульової довжини та мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної. Використано інтегральні залежності утворення уявних ізотропних ліній, знайдено з умови рівності нулю диференціала дуги просторової лінії. Параметричні рівняння ізотропних ліній знайдено за допомогою функцій* $u(t)=\mathrm{cth}(kt)$; $v(t)=i\cdot\mathrm{csch}(kt)$, *де* $i-$ *уявна одиниця,* $k=const$, *які задовольняють умову* $u^2+v^2=1$. *Аналітичний опис мінімальних поверхонь та приєднаних мінімальних поверхонь здійснено у комплексному просторі з ізотропними лініями у ролі ліній сітки переносу. Наведено вирази коефіцієнтів першої квадратичної форми утворених мінімальних поверхонь.*

Досліджено, що для зазначених функцій $u=u(t)$; $v=v(t)$, *які задовольняють умову* $u^2+v^2=1$, *можна знайти аналітичний опис двох різних просторових ізотропних ліній нульової довжини за допомогою функцій комплексної змінної. Кожній ізотропній лінії відповідає мінімальна поверхня та приєднана мінімальна поверхня, які мають подібні властивості кривини поверхні. Використання функцій комплексної змінної дає змогу отримати нескладний аналітичний опис мінімальних поверхонь та досліджувати їх конструктивні властивості. Перспективи подальших досліджень полягають у визначенні диференціальних характеристик утворених мінімальних поверхонь для оптимізації інженерних методів проектування поверхонь технічних форм.*

Ключові слова: ізотропна лінія, мінімальна поверхня, приєднана мінімальна поверхня, гіперболічні функції, квадратична форма поверхні, функція комплексної змінної

Актуальність. Із розвитком CAD систем при проектуванні поверхонь технічних форм та архітектурних конструкцій застосовують відсіки поверхонь, які задані аналітично та мають потрібні геометричні властивості. Геометричні моделі, описані мінімальними поверхнями, мають переваги практичного змісту. Напруженість у кожній точці мінімальної поверхні є сталою величиною, тому геометрична форма мінімальної поверхні забезпечує рівномірний розподіл зусиль в оболонці та додаткову жорсткість [1, с. 152]. Умова рівності нулю величини середньої кривини H мінімальної поверхні у всіх її точках є необхідною умовою мінімальності площі відсіку поверхні, обмеженого плоскою або просторовою кривою (контуром) на цій поверхні. Відомими є сучасні дослідження акустичних властивостей твердих матеріалів, які утворюють стільникову структуру [2]. Архітектура зазначених стільникових матеріалів базується на періодичних мінімальних поверхнях, що дає змогу при їх використанні покращити звукоізоляцію та забезпечити зменшення вібрації [2].

Знаходження аналітичного опису мінімальної поверхні, яка проходить через замкнену лінію, зводиться до розв'язування нелінійного диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа у частинних похідних, яке у загальному випадку не інтегрується [3, с. 683]. Тому одним із напрямів сучасних досліджень є вдосконалення чисельних методів розв'язування диференціального рівняння Ейлера-Лагранжа [4].

Починаючи з робіт С. Лі (S. Lie), проблема знаходження параметричних рівнянь мінімальних поверхонь, розв'язується за допомогою методів теорії функцій комплексної змінної [3, с. 685]. Для цього аналітичний опис мінімальних поверхонь знаходять у комплексному просторі з ізотропними лініями у ролі ліній сітки переносу.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Для знаходження аналітичного опису мінімальних поверхонь за допомогою функцій комплексної змінної необхідно визначити параметричні рівняння уявної ізотропної лінії нульової довжини. У дисертаційному дослідженні [5] знайдено аналітичний опис ізотропних ліній за формулами Шварца (H. Schwarz) на основі просторової кривої, що лежить на поверхні циліндра та на основі кривої укосу. Але використання формул Шварца для знаходження параметричних рівнянь ізотропних ліній пов'язане з інтегруванням складних виразів і можливе тільки в окремих випадках. У статті [6] було побудовано мінімальні поверхні на основі квазіконформної заміни параметра у рівнянні ізотропної кривої.

У праці [7] авторів даного дослідження було запропоновано здійснювати аналітичний опис ізотропних ліній на основі функцій $u=u(t);\ v=v(t)$, які задовольняють умову $u^2+v^2=1$. Для зазначених функцій було знайдено аналітичні умови утворення ізотропних ліній і побудовано мінімальні поверхні за допомогою функцій $u(t)=\sin(kt);\ v(t)=\cos(kt)$ та $u(t)=\mathrm{ch}(kt);\ v(t)=i\cdot\mathrm{sh}(kt)$, де $k\in R$. При цьому потребує дослідження можливість утворення параметричних рівнянь ізотропних ліній та мінімальних поверхонь при використанні інших функцій $u=u(t);\ v=v(t)$, які задовольняють умову $u^2+v^2=1$.

Мета дослідження – знайти параметричні рівняння ізотропної лінії за допомогою гіперболічних функцій $u(t)=\mathrm{cth}(kt);\ v(t)=i\cdot\mathrm{csch}(kt)$, де

$i-$уявна одиниця, $k = const$, які задовольняють умову $u^2+v^2=1$. За допомогою вказаної ізотропної лінії побудувати мінімальні поверхні.

Матеріали і методи дослідження. Аналітичний опис мінімальних поверхонь здійснено у комплексному просторі з твірними ізотропними лініями переносу.

Результати дослідження та їх обговорення. У праці [7] авторів даної статті визначено аналітичні залежності утворення просторових ізотропних ліній нульової довжини за допомогою функцій комплексної змінної $u=u(t);\ v=v(t)$, які задовольняють умову $u^2+v^2=1$. Параметричні рівняння ізотропних ліній мають вигляд [8]:

$$x(t)=\int\left(u-\frac{1}{2(u+v)}\right)dt;\quad y(t)=\int\left(v-\frac{1}{2(u+v)}\right)dt;\quad z(t)=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{u+v}, \tag{1}$$

$$x(t)=\int\left(u-\frac{1}{2(u-v)}\right)dt;\quad y(t)=\int\left(v+\frac{1}{2(u-v)}\right)dt;\quad z(t)=\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{u-v}. \tag{2}$$

Слід зазначити, що існує обмежена кількість функцій $u=u(t);\ v=v(t)$, які задовольняють умову $u^2+v^2=1$ та допускають можливість інтегрування виразів (1) і (2). Розглянемо функції $u(t)=\mathrm{cth}(kt)=\dfrac{e^{kt}+e^{-kt}}{e^{kt}-e^{-kt}};\quad v(t)=i\cdot\mathrm{csch}(kt)=\dfrac{2\cdot i}{e^{kt}-e^{-kt}}$, де $k\in R,\ i-$уявна одиниця, які задовольняють умову $u^2+v^2=1$. Тоді параметричні рівняння уявної ізотропної лінії, знайдені за формулами (1), мають вигляд:

$$x(t)=-\frac{1}{2k}\left[\ln(1+\mathrm{ch}(kt))-2\ln(\mathrm{sh}(kt))\right];$$

$$y(t)=-\frac{1}{2k}\left[2\cdot i\cdot\ln\left(\mathrm{ch}\left(\frac{kt}{2}\right)\right)+\ln(1+\mathrm{ch}(kt))-2\cdot i\cdot\ln\left(\mathrm{sh}\left(\frac{kt}{2}\right)\right)\right]; \tag{3}$$

$$z(t)=\pm\frac{i\cdot\ln(\mathrm{ch}(kt)+i)}{\sqrt{2}\,k}.$$

Здійснимо для функцій комплексної змінної (3) заміну: $t=u+i\cdot v$. Відокремивши дійсну та уявну частину, отримаємо рівняння мінімальної поверхні:

$$X(u,v)=\frac{1}{2k}\ln\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos(2kv)+\operatorname{ch}(2ku)\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{4k}\ln\left[\cos^2(kv)\cdot\operatorname{ch}^2(ku)+\left(1+\sin(kv)\cdot\operatorname{sh}(ku)\right)^2\right];$$

$$Y(u,v)=\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{kv}{2}\right)\cdot\operatorname{th}\left(\frac{ku}{2}\right)\right]-\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{ku}{2}\right)\cdot\operatorname{th}\left(\frac{kv}{2}\right)\right]-\qquad(4)$$

$$-\frac{1}{4k}\ln\left[\cos^2(kv)\cdot\operatorname{ch}^2(ku)+\left(1+\sin(kv)\cdot\operatorname{sh}(ku)\right)^2\right];$$

$$Z(u,v)=\mp\frac{1}{\sqrt{2}k}\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{sch}(ku)}{\cos(kv)}+\operatorname{tg}(kv)\cdot\operatorname{th}(ku)\right],$$

та приєднаної мінімальної поверхні:

$$X^*(u,v)=-\frac{1}{2k}\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{sch}(ku)}{\cos(kv)}+\operatorname{tg}(kv)\cdot\operatorname{th}(ku)\right]+\frac{1}{k}\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}(ku)\cdot\operatorname{th}(kv)\right);$$

$$Y^*(u,v)=-\frac{1}{2k}\operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{sch}(ku)}{\cos(kv)}+\operatorname{tg}(kv)\cdot\operatorname{th}(ku)\right]$$

$$+\frac{1}{2k}\ln\left[\frac{1}{2}\left(1-\cos(2kv)+\operatorname{ch}(2ku)\right)\right]-\frac{1}{2k}\ln\left[\frac{1}{2}\left(\cos(2kv)+\operatorname{ch}(2ku)\right)\right];\qquad(5)$$

$$Z^*(u,v)=\pm\frac{1}{2\sqrt{2}k}\ln\left[\cos^2(kv)\cdot\operatorname{ch}^2(ku)+\left(1+\sin(kv)\cdot\operatorname{sh}(ku)\right)^2\right].$$

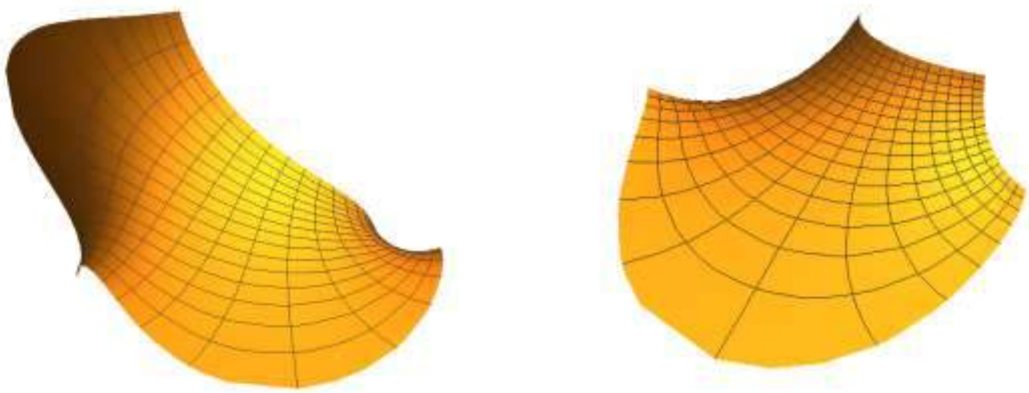
Коефіцієнти першої квадратичної форми мінімальних поверхонь (4) та приєднаних мінімальних поверхонь (5) дорівнюють:

$$E=G=\frac{\left(1+\cos(2kv)+\operatorname{ch}(2ku)\right)^2}{2\cdot\left(\operatorname{ch}(2ku)-\cos(2kv)\right)\cdot\left(4\sin(kv)\cdot\operatorname{sh}(ku)+\cos(2kv)+\operatorname{ch}(2ku)+2\right)};$$

$$F=0.$$

Мінімальні поверхні, побудовані за протилежних знаків виразів аплікат, є конгруентними. Вирази коефіцієнтів другої квадратичної форми мінімальної поверхні (4) та приєднаної поверхні (5) мають громіздкий вигляд і в даній статті не наводяться. Знайдені векторно-параметричні рівняння $\overline{R}=\overline{R}(u,v)$ поверхні (4) та $\overline{R}^*=\overline{R}^*(u,v)$ поверхні (5), віднесених до ізометричної (або ізотермічної) сітки координатних ліній, задовольняють умовам $\frac{\partial^2\overline{R}}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\overline{R}}{\partial v^2}=\overline{0}$ та $\frac{\partial^2\overline{R}^*}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\overline{R}^*}{\partial v^2}=\overline{0}$ відповідно. Тому, згідно з твердженням, доведеним у праці [8] авторів даної статті, поверхні (4) і (5) є мінімальними.

На рисунку (а, б) зображено мінімальні поверхні, побудовані за рівняннями (4), (5) при $k=1;\ u\in\left(0;...\dfrac{\pi}{2}\right);\ \ v\in\left[-\dfrac{\pi}{3};...\dfrac{\pi}{3}\right].$



а *б*

Відсіки мінімальних поверхонь, побудованих за допомогою ізотропної лінії (1):

а) відсік мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (4);

б) відсік приєднаної мінімальної поверхні, побудованої за рівняннями (4)

Параметричні рівняння ізотропних ліній, знайдені за формулами (2) для функцій $u(t)=\mathrm{cth}(kt);\ v(t)=i\cdot\mathrm{csch}(kt)$, де $k\in R,$ мають подібну будову з рівняннями (3). Відповідні мінімальні поверхні мають спільні характеристики кривини поверхні з побудованими поверхнями (4), (5), тому у даній статті результати їх дослідження не наведено.

Висновки і перспективи. Для функцій $u(t)=\mathrm{cth}(kt);\ v(t)=i\cdot\mathrm{csch}(kt)$, де $i-$ уявна одиниця, $k=const$, які задовольняють умову $u^2+v^2=1$, можна знайти аналітичний опис двох різних просторових ізотропних ліній нульової довжини за допомогою функцій комплексної змінної. Кожній ізотропній лінії відповідає мінімальна поверхня та приєднана мінімальна поверхня, які мають подібні властивості кривини поверхні. Використання функцій комплексної змінної дає змогу отримати нескладний аналітичний опис мінімальних поверхонь та досліджувати їх конструктивні властивості. Перспективи подальших досліджень полягають у визначенні диференціальних характеристик утворених мінімальних поверхонь для оптимізації інженерних методів проектування поверхонь технічних форм.

Список літератури

1. Расчёт оболочек сложной формы / [Гуляев В. И., Баженов В. А., Гоцуляк Е. А., Гайдайчук В. В.]. – К. : Будівельник, 1990. – 192 с.

2. Abueidda Diab W. Acoustic band gaps and elastic stiffness of PMMA cellular solids based on triply periodic minimal surfaces [Text] / Diab W. Abueidda, Iwona Jasiuk, Nahil A. Sobh // Composite Structures. – 2018. – Vol. 145. – P. 20–27. Available at: https://doi.org/10.1016/j.matdes.2018.02.032.

3. Математическая энциклопедия / [гл. ред. И. М. Виноградов]. – Т. 3. – М. : Советская энциклопедия, 1982. – С. 683–690.

4. Гацунаев М. А. О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности / М. А. Гацунаев, А. А. Клячин // Уфимский математич. журнал. – 2014. – Т. 6. – № 3. – С. 3–16.

5. Коровіна І. О. Конструювання поверхонь сталої середньої кривини за заданими лініями інциденції : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.01.01 / І. О. Коровіна. – Київський національний університет будівництва і архітектури. – К., 2012. – 20 с.

6. Аушева Н. М. Моделювання поверхонь на основі квазіконформної заміни параметра / Н. М. Аушева, А. Л. Гурін // Сучасні проблеми моделювання : зб. наук. праць. – Мелітополь : МДПУ ім. Богдана Хмельницького, 2017. – № 10. – С. 17–21.

7. Пилипака С. Ф. Дослідження аналітичних залежностей для утворення ізотропних ліній та конструювання мінімальних поверхонь [Електронний ресурс] / С. Ф. Пилипака, М. М. Муквич // Енергетика та автоматика. – 2017. – № 4. – С. 133–143. – Режим доступу до журн. : http://journals.nubip.edu.ua/index.php/Energiya/issue/view/375

8. Пилипака С. Ф. Утворення мінімальних поверхонь за допомогою уявної циклоїди, заданої комплексним натуральним рівнянням / С. Ф. Пилипака, М. М. Муквич // Вісник Херсонського національного технічного університету. – Херсон : ХНТУ, 2017. – № 3 (62). – Т. 2. – С. 312–316.

References

1. Gulyaev, V. I., Bazhenov, V. A., Gotsulyak, E. A., Gajdajchuk, V. V. (1990). Raschyot obolochek slozhnoj formy [Calculation of shells of complex shape]. Kiev: Budivel'nyk, 192.

2. Diab W. Abueidda, Iwona Jasiuk, Nahil A. Sobh (2018). Acoustic band gaps and elastic stiffness of PMMA cellular solids based on triply periodic minimal surfaces. Composite Structures, 145, 20–27. Available at: https://doi.org/10.1016/j.matdes.2018.02.032.

3. Matematicheskaya entsyklopediya. (1982). [Encyclopedia of mathematics]. Moscow: Sovetskaya entsyklopediya, 683–690.

4. Hatsunaev, M. A., Klyachin, A. A. (2014). O ravnomernoy skhodimosti kusochno-lineynykh resheniy uravneniya minimal'noy poverkhnosti [On uniform convergence of piecewise-linear solutions to minimal surface equation]. Ufimskiy matematych. zhurnal, 6 (3), 3–16.

5. Korovina, I. O. (2012). Konstruyuvannya poverkhon' staloyi seredn'oyi kryvyny za zadanymy liniyamy intsydentsiyi [Construction of surfaces of a constant main curvature according to the given lines of an incident]. Kiev National University of Civil Engineering and Architecture. Kyiv, 20.

6. Ausheva, N., Gurin, A. (2017). Modelyuvannya poverkhon' na osnovi kvazikonformnoyi zaminy parametra [Modeling of surfaces based on quasiconformal parameter change]. Suchasni problemy modelyuvannya, 10, 17–21.

7. Pylypaka, S. F., Mukvich, M. M. (2017). Doslidzhennya analitychnykh zalezhnostey dlya utvorennya izotropnykh liniy ta konstruyuvannya minimal'nykh poverkhon' [Research of analytical conditions for the formation of isotropic lines and for construction of minimal surfaces]. Enerhetyka ta avtomatyka, 4, 133–143. Available at: http://journals.nubip.edu.ua/index.php/Energiya/issue/view/375

8. Pylypaka, S. F., Mukvich, M. M. (2017). Utvorennya minimal'nykh poverkhon' za dopomohoyu uyavnoyi tsykloyidy, zadanoyi kompleksnym natural'nym

rivnyannyam [Construction of minimal surfaces by the imaginary cycloid given by the complex natural equation]. Visnyk Khersons'koho natsional'noho tekhnichnoho universytetu, 3 (62), 2, 312–316.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ИЗОТРОПНЫХ ЛИНИЙ С ПОМОЩЬЮ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ОБРАЗОВАНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

С. Ф. Пилипака,
Н. Н. Муквич

Аннотация. *Получено аналитическое описание изотропных линий нулевой длины и минимальных поверхностей с помощью функций комплексного переменного. Использованы интегральные зависимости образования мнимых изотропных линий, определённые из равенства нулю дифференциала дуги пространственной линии. Параметрические уравнения изотропных линий получены с помощью функций* $u(t) = \mathrm{cth}(t)$; $v(t) = i \cdot \mathrm{csch}(t)$. *Аналитическое описание минимальных поверхностей и присоединённых минимальных поверхностей осуществлено в комплексном пространстве с изотропными линиями в качестве линий сети переноса. Приведены выражения коэффициентов первой квадратичной формы образованных минимальных поверхностей.*

Показано, что для указанных функций, можно найти аналитическое описание двух различных пространственных изотропных линий нулевой длины с помощью функций комплексного переменного. Каждой изотропной линии соответствует минимальная поверхность и присоединённая минимальная поверхность, которые имеют общие свойства кривизны поверхности. Использование функций комплексного переменного позволяет получить несложное аналитическое описание минимальных поверхностей и исследовать их конструктивные свойства. Перспективы дальнейших исследований заключаются в определении дифференциальных характеристик образованных минимальных поверхностей для оптимизации инженерных методов проектирования поверхностей технических форм.

Ключевые слова: изотропная линия, минимальная поверхность, присоединённая минимальная поверхность, гиперболические функции, квадратичная форма поверхности, функция комплексного переменного

DEFINITION OF PARAMETRIC EQUATIONS OF ISOTROPIC LINES BY HYPERBOLIC FUNCTIONS AND CONSTRUCTION OF MINIMAL SURFACES

S. Pylypaka,
M. Mukvich

Abstract. *In this article an analytical description of isotropic lines of zero length and minimal surfaces is carried out with the help of function of a complex variable. The integral dependences of the formation of imaginary isotropic lines, found from the condition of equality of zero differential of the arc of the spatial line, are used. Parametric equations of isotropic lines are found using functions* $u(t)=\mathrm{cth}(kt)$; $v(t)=i\cdot\mathrm{csch}(kt)$. *Analytical description of minimal surfaces and* associated *minimal surfaces in complex space made of isotropic lines as lines of a translation net. The expressions of the coefficients of the first quadratic form of the formed minimal surfaces are given.*

It is explored that for the indicated functions satisfying the condition one can find an analytical description of two different spatial isotropic lines of zero length using the functions of a complex variable. Each isotropic line corresponds to the minimal surface and the associated *minimal surface, which have similar properties of the curvature of the surface. Use of function of a complex variable allows to get a simple analytical description of minimal surfaces, investigate their design geometrical parameters. Prospects for further research are to determine the differential characteristics of the created minimal surfaces for optimization of engineering methods of designing surfaces of technical forms.*

Keywords: isotropic line, minimal surface, **associated** ***minimal surface, hyperbolic functions,*** **quadratic form of a surface*****, function of a complex variable***

УДК 662.7

НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ТОПЛИВНЫХ ГРАНУЛ ИЗ ДРЕВЕСИНЫ СОСНЫ

Д. Н. КОРИНЧУК, кандидат технических наук,
старший научный сотрудник
К. А. КОРИНЧУК, инженер
Институт технической теплофизики НАН Украины
E-mail: Korinchuk@nas.gov.ua

Аннотация. *Исследовано термическое разложение измельченной и гранулированной при различных давлениях древесины сосны. Прочность возникших межмолекулярных связей в гранулированной биомассе может отражаться на кинетических параметрах термического разложения биомасс. Исследование влияния давления прессования на кинетические характеристики термического разложения биомассы позволит расширить понимание механизмов гранулообразования биополимеров.*