paper, the technique makes it possible to study the state of individual groups located on the surface of particles and their complexes. This is especially important, since a huge number of processes occur precisely at the phase boundary
Keywords: small particles, adsorptive layer, polarizability, Raman scattering, coefficient of strengthening

УДК 515.1

ТОПОЛОГІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ КУСКОВО-ЛІНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Т. Г. КРИВОРОТ, кандидат педагогічних наук
Національний університет біоресурсів і природокористування України
E-mail: tania.krivorot@gmail.com

Анотація. *Розглянуто задачу для неперервних функцій зі скінченною кількістю екстремальних точок, заданих на відрізку та числовій осі. Показано, що в кожному класі еквівалентності таких функцій присутня невід'ємна функція, яка приймає в точках екстремумів усі цілочислові значення з множини 0, 1, 2, …, l. Для повної альтернуючої послідовності визначено кусково-лінійну функцію, яка називається PL-реалізацією альтернуючої послідовності. Доведено, що кожна неперервна функція зі скінченною кількістю екстремальних точок, задана на відрізку, буде топологічно еквівалентною PL-реалізації своєї повної альтернуючої послідовності.*

Визначено періодичну альтернуючу послідовність, яка будується згідно з послідовністю екстремумів неперервної функції, яка задана на відрізку [a,b], і чисел, що відповідають критичним значенням заданої функції. Введено спеціальну функцію та поставлено у відповідність спеціальній функції періодичну альтернуючу послідовність. Доведено існування поліному, топологічно еквівалентного кусково-лінійній функції.
Ключові слова: альтернуюча послідовність, екстремум, топологічна еквівалентність, поліном, кусково-лінійна функція

Актуальність. Багато процесів можна описати за допомогою гладких функційта поведінки гладких функцій в околі критичних точок. Важливим напрямом є проблема дослідження умов топологічної еквівалентності кусково-лінійних функцій.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Основним дослідженням є розв`язок задачі про існування поліному топологічно еквівалентного кусково-лінійній функції. Класифікацією та дослідженням умов топологічної еквівалентності функцій займалися О. В. Болсінов [1], А. А. Ошемков [2], В. В. Шарко [3]. Ми ж розглянемо не загальний випадок, а обмежимося більш вузькими класами неперервних відображень – поліноміальними.

Мета дослідження – дослідити топологічну еквівалентність для кусково-лінійних функцій.

Матеріали і методи дослідження. Нехай *f* – неперервна функція, яка задана на відрізку [a,b]. Точка $x_0 \in (a,b)$ – є точкою локального максимуму (мінімуму) функції *f*. У нашому випадку, повні альтернуючі послідовності $A(k,l)$ будуються, відповідно до послідовності значень функції f в екстремальних точках, яка задана на відрізку [a,b].

Поставимо у відповідність функції f на відрізку [a,b] повну альтернуючу послідовність відповідного типу $A(k,l)$, яку далі позначатимемо через $A_f(k,l)$. Для цього на відрізку [a,b] розглянемо послідовність $y_i, (0 \le i \le k)$ локальних екстремумів функції $f(y_0 = a, y_k = b), y_i < y_{i+1}$. Позначимо $x_i = f(y_i)$. Припустимо, що $f(a) < x_i; f(b) < x_{k-1}$. Тоді послідовність $x_0 < x_1 > x_2 < x_3 > ... < x_{k-1} > x_k$ утворює повну альтернуючу послідовність $A(k,l)$ типу <>. Побудова інших типів альтернуючих послідовностей є аналогічною.

Якщо розглянути на відрізку [a,b] довільну неперервну функцію $y = f(x)$ зі скінченною кількістю локальних екстремумів, то за допомогою гомеоморфізму числової прямої $s : R^1 \to R^1$, функцію $y = f(x)$ можна замінити на функцію $z = s \circ f(x)$. Якщо точка yi – локальний максимум (мінімум) для функції *f*, то вона буде локальним максимумом (мінімумом) для функції $s \circ f$ і навпаки.

Оскільки гомеоморфізм s зберігає порядок точок, розташованих на числовій осі, то для сусідніх екстремальних точок yi і $yi+1$ функції f нерівність $f(y_i) < f(y_{i+1})\,(f(y_i) > f(y_{i-1}))$ зберігається для функції $s \circ f$, тобто $s \circ f(y_i) < s \circ f(y_{i+1})\ (s \circ f(y_i) > s \circ f(y_{i-1}))$. Таким чином, неперервній функції $y = f(x)$ зі скінченною кількістю локальних екстремумів однозначно можна поставити у відповідність повну альтернуючу послідовність $A_f(k,l)$ певного типу залежно від кількості екстремумів функції *fі* значень, які функція *f* набуває в екстремальних точках.

Нехай задана повна альтернуюча послідовність $A(k,l)$. Тоді послідовності $A(k,l)$ можна поставити у відповідність кусково-лінійну криву $L(A(k,l))$.

Лема 1. Нехай на відрізку [a,b] задана неперервна функція *f* зі скінченною кількістю екстремальних точок. Поставимо їй у відповідність її повну альтернуючу послідовність $A_f(k,l)$. Тоді функції $f\ i$ $L(A_f(k,l))$ будуть топологічно еквівалентними.

Доведення. Можемо вважати, що всі екстремальні точки $x_o = a, x_1, ..., x_k = b$ функцій fi $L(A_f(k,l))$ співпадають та значення функцій *fі* $L(A_f(k,l))$ в екстремальних точках також співпадають. Якщо це не так, то за допомогою гомеоморфізму $s: R^1 \to R^1$, що зберігає орієнтацію, для функції $s \circ f$ ми можемо цього досягти. Звуження функції *f* на проміжках $[x_i, x_{i+1}]$ є строго монотонна функція, яка топологічно еквівалентна звуженню функції $L(A_f(k,l))$ на цей проміжок. Отже, функція f топологічно еквівалентна функції $L(A_f(k,l))$.

Теорема 1. Дві неперервні функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ на відрізку [a,b] зі скінченною кількістю локальних екстремумів будуть топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли співпадають їх повні альтернуючі послідовності $A_f(k,l)$ і $A_g(k,l)$.

Для довільної повної альтернуючої послідовності $A(k,l)$ можна побудувати неперервну на відрізку [a,b] функцію $y = f(x)$ зі скінченною кількістю локальних екстремумів, таку, що її повна альтернуюча послідовність $A_f(k,l)$ є $A(k,l)$.

Доведення. Розглянемо дві неперервні функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ на відрізку[a,b] зі скінченною кількістю локальних екстремумів. Припустимо, що функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ топологічно еквівалентні. Отже, існує гомеоморфізм $h: [a,b] \to [a,b]$, $(h(a) = a, h(b) = b)$ та гомеоморфізм $s: R^1 \to R^1$, які зберігають орієнтацію і такі, що $s \circ f = g \circ h$.Тоді $f = s^{-1} \circ g \circ h$ і у функцій $f = s^{-1} \circ g \circ h$ і g будуть однакові повні альтернуючі послідовності.

Нехай $y = f(x)$ і $y = g(x)$ – неперервні функції, задані на відрізку [a,b] зі скінченною кількістю локальних екстремумів, і нехай повні альтернуючі послідовності $A_f(k,l)$ і $A_g(k,l)$ функцій f і g однакові. Тоді кожна з них топологічно еквівалентна своїй PL-реалізації. Оскільки PL-реалізації будуть топологічно еквівалентними, це означає, що будуть топологічно еквівалентними й функції f і g.

Для довільної повної альтернуючої послідовності $A(k,l)$ її PL-реалізація є шукана неперервна функція зі скінченною кількістю екстремальних точок на відрізку [a,b], повна альтернуюча послідовність якої співпадає з $A(k,l)$.

Неперервну невід'ємну функцію $y = f(x)$, яка задана на відрізку [a,b] та задовольняє умовам: ($f(a) = f(b) = 0;$ на відрізку [a,b] функція f має в точності *2k+1* локальних екстремумів; на множині локальних екстремумів функція f приймає всі невід'ємні цілі значення з проміжку $[0,l], (l \leq 2k-1)$ називають спеціальною функцією.

Спеціальній функції f на відрізку [a,b] ставимо у відповідність періодичну альтернуючу послідовність $A(2k,l)$, яка далі буде позначатися через $A_f(2k,l)$. Нехай задано періодичну альтернуючу послідовність $A_f(2k,l)$. Тоді послідовності $A(2k,l)$ можна поставити у відповідність кусково-лінійну криву $L(A(2k,l))$, яку можна трактувати як графік неперервної функції $L(A(2k,l))$ з 2k+1 локальними екстремумами та l значеннями в них, яка задана на відрізку [a,b].

Для повної альтернуючої послідовності $A(2k,l)$ кусково-лінійну функцію $L(A(2k,l))$ будемо називати періодичною PL-реалізацією послідовності $A(2k,l)$.

Лема 2. Нехай на відрізку [a,b] задана неперервна функція *f* зі скінченною кількістю екстремальних точок. Поставимо їй у відповідність її періодичну альтернуючу послідовність $A_f(2k,l)$. Тоді функції *f* і $L(A_f(2k,l))$ будуть топологічно еквівалентними.

Доведення. Вважаємо, що всі екстремальні точки $y_0=a, y_1,...,y_{2k}=b$ функцій f і $L(A_f(2k,l))$ співпадають. Можна вважати, що значення функцій f і $L(A_f(2k,l))$ в екстремальних точках теж співпадають. Якщо це не так, то за допомогою гомеоморфізму числової прямої $h: R^1 \to R^1$, що зберігає орієнтацію, для функції $h \circ f$ ми можемо цього досягти. Звуження функції *f* на проміжках $[y_i, y_{i+1}]$ є строго монотонна функція, яка топологічно еквівалентна звуженню функції $L(A_f(2k,l))$ на цей проміжок. Отже, *функція f* топологічно еквівалентна функції $L(A_f(2k,l))$.

Дві неперервні функції *fig* на відрізку [a,b] зі скінченною кількістю локальних екстремумів і такі, що $f(a)=f(b)\le f(x), (x\in(a,b))$, $g(a)=g(b)\le g(x), (x\in(a,b))$ будуть топологічно еквівалентними тоді й тільки тоді, коли співпадають їх періодичні альтернуючі послідовності $A_f(2k,l)$ і $A_g(2k,l)$.

Покажемо тепер, що для довільної періодичної альтернуючої послідовності $A(2k,l)$ можна побудувати неперервну на відрізку [a,b] функцію f зі скінченною кількістю локальних екстремумів таку, що $f(a)=f(b)\le f(x), (x\in(a,b))$ і її періодична альтернуюча послідовність $A_f(2k,l)$ є $A(2k,l)$.

Лема 3. Нехай $f: R^1 \to R^1$ – неперервна функція зі скінченним числом локальних екстремумів, тоді f топологічно еквівалентна кусково-лінійній функції.

Доведення. Нехай x1,x2,...,xn – точки локальних екстремуму функції *f*. На інтервалах $(-\infty, x_1), (x_i, x_{i-1}), (x_n, \infty)$ функція *f* строго монотонно зростає або спадає (i = 1,...,n-1). Отже, звуження функції *f* на ці інтервали топологічно еквівалентні лінійним функціям, що доводить лему.

Поліноміальні функції різних ступенів можуть бути топологічно еквівалентними. Як приклад можна навести функції *f* = x3 +y2–2xig= x5 + y2– x.

Теорема 2. Для кожної кусково-лінійної функції $l : R^1 \to R^1$, що має n-1 локальних екстремумів, існує поліном $f : R^1 \to R^1$ ступеня n, який є топологічно еквівалентним функції l.

Доведення. Нехай l – кусково-лінійна і має екстремуми $\xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_{n-1}$. Оскільки $\xi_i, i = \overline{1, n-1}$ – екстремуми, то $(-1)^i (l(\xi_i) - l(\xi_{i-1})), i = \overline{2, n-1}$ одного знака. Існує поліном $f : R^1 \to R^1$ ступеня n такий, що $f'(\xi_i) = 0; f(\xi_i) = l(\xi_i), i = \overline{1, n-1}$. Функція f монотонна на кожному інтервалі ($-\infty, \xi_1$)…(ξ_i, ξ_{i+1})…($\xi_{n-1}, +\infty$), $i = \overline{1, n-1}$ (оскільки f має степінь $n \to$ f' має степінь n-1).

Доведемо, що f топологічно еквівалентна l. Потрібно знайти такі гомеоморфізми, щоб $f \circ h = h' \circ l$. Покладемо $h'(x) = x$, для довільного x з R^1,

$$h(x) = \begin{cases} f_0^{-1} \circ l(x), x \in (-\infty, \xi_1] \\ f_1^{-1} \circ l(x), x \in [\xi_1, \xi_2] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_{n-1}^{-1} \circ l(x), x \in [\xi_{n-1}, +\infty) \end{cases}$$

, де $f_k^{-1} : f([\xi_k, \xi_{k+1}]) \to [\xi_k, \xi_{k+1}]$ –к- та гілка відображення f^{-1}.

Тоді для довільного x: $f \circ h(x) = f(f_k^{-1}(l(x))) = l(x)$. Отже $f \circ h = h' \circ l = l$.

Результати досліджень та їх обговорення. Отже, інваріантом функції, який дає відповідь на поставлені питання, є альтернуючі послідовності, за допомогою яких будується послідовність значень функції, заданої на відрізку, в екстремальних точках. Поліном $f : R^1 \to R^1$ топологічно еквівалентний кусково-лінійній функції. Поліноміальні функції різних ступенів можуть бути топологічно еквівалентними.

Висновки і перспективи. Розглянуто інваріанти неперервних функцій зі скінченним числом екстремальних точок, заданих на відрізку. Представлено кусково-лінійну функцію, яка називається PL-реалізацією альтернуючої послідовності й доведено, що розглядувана в даній роботі функція буде топологічно еквівалентною PL-реалізації своєї повної альтернуючої послідовності. Досліджено, що для кожної кусково-лінійної функції, що має n–1 локальний екстремум, існує поліном степеня n, який є топологічно еквівалентним цій функції.

Список літератури

1. Bolsinov A. On classification of flows on manifolds / A. Bolsinov, A. Oshemkov, V. Sharko // Methods of Functional Analysis and Topology. – 1996. – Vol. 2, Issue 2. – P. 51–60.

2. Ошемков А. А. О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях / А. А. Ошемков, В. В. Шарко // Матем. сборник. – 1998. – № 7. – С. 93–140.

3. Шарко В. В. Гладкая и топологическая эквивалентность функций на поверхностях / В. В. Шарко // Укр. мат. жур. – 2003. – № 5. – С. 687–700.

References

1. Bolsinov, A., Oshemkov, S., Sharko, V. (1996). On classification of flows on manifolds, 2 (2), 51–60.

2. Oshemkov, A. A., Sharko, V. V. (1998). O klassifikacii potokov Morsa-Smejla na dvumernyh mnogoobraziyah [On the classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds]. Mathematical collection, 7, 93–140.

3. Sharko, V. V. (2003). Gladkaya i topologicheskaya ehkvivalentnost' funkcij na poverhnostyah [Smooth and topological equivalence of functions on surfaces]. Ukrainian mathematical journal, 5, 687–700.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Т. Г. Криворот

Аннотация. *Рассмотрена задача для непрерывных функций с конечным числом экстремальных точек, заданных на отрезке и числовой оси. Показано, что в каждом классе эквивалентности таких функций присутствует неотрицательная функция, которая принимает в точках экстремумов все целочисленные значения из множества 0, 1, 2, ..., l. Для полной альтернирующей последовательности определено кусочно-линейную функцию, которая называется PL-реализацией альтернирующей последовательности. Доказано, что каждая непрерывная функция с конечным числом экстремальных точек, заданная на отрезке будет топологически эквивалентной PL-реализации своей полной альтернирующей последовательности.*

Определена периодическая альтернирующая последовательность, которая строится согласно последовательности экстремумов непрерывной функции, заданной на отрезке [a, b], и чисел, соответствующих критическим значениям заданной функции. Введено специальную функцию и поставлено в соответствие специальной функции периодическую альтернирующую последовательность. Доказано существование полинома, топологически эквивалентного кусочно-линейной функции.

Ключевые слова: альтернирующая последовательность, экстремум, топологическая эквивалентность, полином, кусочно-линейная функція

TOPOLOGICAL EQUIVALENCE PIECEWISE-LINEAR FUNCTIONS

T. Krivorot

Abstract. *In this paper we consider the problem for continuous functions with a finite number of extremal points defined on an interval and a numerical axis. It is shown that in each equivalence class of such functions there is a nonnegative function that takes at the extremum points all integer values from the set 0, 1, 2, ..., l. For a complete alternating sequence, a piecewise linear function is defined, which is called a PL-realization of an alternating sequence. It is proved that every continuous function with a finite number of extremal points, given on an interval, will be topologically equivalent to PL-realization of its complete alternating sequence.*

A periodic alternating sequence is defined which is constructed according to the sequence of extrema of a continuous function defined on the interval [a, b] and numbers corresponding to the critical values of the given function. A special function is introduced and a special alternating function is assigned to the special function. The existence of a polynomial topologically equivalent to a piecewise-linear function is proved.

Keywords: alternating sequence, extremum, topological equivalence, polynomial, piecewise-linear function

УДК 372.851

МІЖПРЕДМЕТНІ ЗВ'ЯЗКИ У ПРОЦЕСІ ВИКЛАДАННЯ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ МАЙБУТНІМ ІНЖЕНЕРАМ

О. Ю. ДЮЖЕНКОВА, кандидат фізико-математичних наук, доцент
Національний університет біоресурсів і природокористування України
E-mail: oduzen@ukr.net

Анотація. *Важливою складовою якісної підготовки майбутніх інженерів є підвищення рівня їх математичної освіти. Це передбачає розуміння суті основних понять і тверджень, що вивчаються в курсі вищої математики, їх тлумачення в різних науках, уміння будувати математичні моделі та застосовувати математичні методи при розв'язанні прикладних задач. У статті розглянуто основні підходи для встановлення міжпредметних зв'язків у процесі викладання вищої математики студентам інженерних спеціальностей, зокрема, в галузі енергетики.*

Підкреслено важливість використання задач, які ілюструють необхідність введення основних математичних понять, що дає мотивацію та стимулює до вивчення математики. Для реалізації професійного спрямування курсу вищої математики значну увагу слід приділити прикладним задачам, які сприяють розвитку дослідницьких навичок майбутніх фахівців. Зазначено, що математичне моделювання