

cles were received taking into account multipole substrate-particle interactions as well as interactions between the particles themselves. For a case of two different spherical particles, frequencies of surface plasmon modes were obtained. All the calculations are performed in the electrostatic approximation.

Surface plasmon, electrodynamics response, multipole interaction.

УДК 681.5.07

ОЦІНЮВАННЯ ОБЛАСТЕЙ СТІЙКОСТІ ПАРАМЕТРИЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ

Л.А. Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук

Наведено результати чисельного розрахунку областей практичної стійкості лінійних параметричних систем зі змінною структурою. Розглянуто постановки задач стійкості на скінченному проміжку часу для структурно заданих множин початкових умов і параметрів.

Параметри, практична стійкість, лінійні системи зі змінною структурою, збурення.

У багатьох задачах прикладного характеру, зокрема прискорювальної техніки, фазові траєкторії динамічної системи можуть мати розриви на деяких поверхнях у певні моменти часу. Так, під час руху частинки у прискорюючому електричному прямокутному полі на вході та виході її з трубки дрейфу змінюється напрямок швидкості частинки [1]. Це означає, що проекції швидкості частинки мають певні розриви. Задачі аналізу розривних динамічних систем [5] охоплюють оцінювання областей стійкості, допусків на параметри, гарантованої чутливості [1,3,4]. Такого роду задачі, на підставі загальних теорем практичної стійкості для систем зі змінною структурою [3], пропонується розглядати з єдиних позицій, а відповідні оцінки одержувати в аналітичному вигляді.

Мета досліджень — розробка конструктивних алгоритмів побудови областей стійкості для лінійних параметричних систем зі змінною структурою за наявності постійно діючих збурень.

Матеріали та методика досліджень. У роботі застосовуються математичні методи практичної та параметричної стійкості за частиною змінних. Як параметри, зокрема можуть розглядатись і початкові умови у заданих структурах.

Дослідимо задачу про практичну стійкість для лінійних нестационарних параметричних систем зі змінною структурою

$$\frac{dx}{dt} = A^{(i)}(t)x + G^{(i)}(t)\alpha + f^{(i)}(t), \quad t \in [t_{i-1}, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (1)$$

Тут $A^{(i)}(t)$, $G^{(i)}(t)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ — матриці з інтегрованими елементами вимірності $n \times n$ та $n \times m$ відповідно, а постійно діючі збурення $f^{(i)}(t)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$ припускаються відомими або ж невідомими, але обмеженими:

$$\|f^{(i)}(t)\| \leq \left(\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left(\sum_{j=1}^n |f_j^{(i)}(\tau)|^q \right)^{\frac{q_1}{q}} d\tau \right)^{\frac{1}{q_1}} \leq \bar{R}^{(i)}, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad 1 \leq q_1 < \infty, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

Нехай Φ_t — множина допустимих станів вектора x у момент часу $t \in [t_0, T]$ ($0 \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$), а G_0^x , $G_0^\alpha \subset G_\alpha$ — множини допустимих початкових станів і параметрів системи (1) відповідно.

Означення 1. Незбурений розв'язок $x(t, 0) = 0$ системи (1) будемо називати $\{G_0^x, G_0^\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$ — стійким, якщо $x(t, \alpha) \in \Phi_t$, $t \in [t_0, T]$ для будь-яких початкових умов $x(t_0, \alpha) \in G_0^x$ та довільних $\alpha \in G_0^\alpha \subset G_\alpha$.

Якщо обмеження на вектори станів і параметрів сумісного типу: x , $\alpha \in \Phi_{t, \alpha}$, $t \in [t_0, T]$, а оцінка початкової області визначається множиною $G_0^{x, \alpha}$, за аналогією вводиться поняття $\{G_0^{x, \alpha}, \Phi_{t, \alpha}, t_0, T\}$ — стійкості.

Означення 2. Незбурений рух $x(t, 0) = 0$ системи (1) будемо називати $\{G_0^{x, \alpha}, \Phi_{t, \alpha}, t_0, T\}$ — стійким, якщо $x(t)$, $\alpha \in \Phi_{t, \alpha}$, $t \in [t_0, T]$, лише тільки $x(t_0)$, $\alpha \in G_0^{x, \alpha}$.

Для одержання чисельних алгоритмів стійкості розглянемо лінійні та не- лінійні обмеження [3] на фазові координати:

$$\Phi_t = \Gamma_t = \{x : |l_s^*(t)x| \leq 1, \quad s = 1, 2, \dots, N\}, \quad t \in [t_0, T]; \quad (4)$$

$$\Phi_t = \Psi_t = \{x : \psi(x, t) \leq 1\}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (5)$$

У випадку, коли оцінка початкової області визначається множиною $G_0^{x, \alpha}$, розглядатимуться обмеження на фазові координати та параметри системи сумісного типу:

$$\Phi_{t, \alpha} = \Gamma_{t, \alpha} = \{x, \alpha : |l_s^*(t)x + m_s^* \alpha| \leq 1, \quad s = 1, 2, \dots, N\}, \quad t \in [t_0, T]; \quad (6)$$

$$\Phi_{t, \alpha} = \Psi_{t, \alpha} = \{x, \alpha : \psi(x, t, \alpha) \leq 1\}, \quad t \in [t_0, T]. \quad (7)$$

У співвідношеннях (4) — (7) $l_s(t)$, $s = 1, 2, \dots, N$ — задані вектори вимірності n з кусково-неперервними елементами; m_s , $s = 1, 2, \dots, N$ — відомі сталі m -вимірні вектори; $\psi(x, t, \alpha)$, $\psi(x, t)$ — неперервно-диференційовні по x , α скалярні функції, за змінною t умова диференційовності може, взагалі кажучи, не виконуватись у точках t_i , $i = 1, 2, \dots, N$.

Для чисельного оцінювання областей стійкості задамо множини початкових умов і параметрів у формі еліпсоїдів

$G_0^x = \{x | x^* B x \leq c^2\}$, $G_0^\alpha = \{\alpha | \alpha^* B_\alpha \alpha \leq c_\alpha^2\}$, $G_0^{x, \alpha} = \{x, \alpha | x^* B x + \alpha^* B_\alpha \alpha \leq c^2\}$, де B , B_α — відомі додатноозначені квадратні матриці вимірності n та m відповідно. Тоді незбурений розв'язок $x(t, 0) = 0$ системи (1) у розумінні

означення 1 стійкості будемо називати $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Phi_t, t_0, T\}$ — стійким, а за наявності сумісних обмежень — досліджувати $\{c, B, B_\alpha, \Phi_{t,\alpha}, t_0, T\}$ - стійкість [3].

Критерій 1. Для того, щоб системи (1) була $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Gamma_t, t_0, T\}$ — стійкою за наявності відомих збурень, необхідно та достатньо, щоб виконувалась нерівність

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \min_{s=1,2,\dots,N} \min_{\alpha \in G_\alpha^0} \frac{[1 - l_s^*(t)P^{(i)}(t, \alpha)]^2}{l_s^*(t)[Q^{(i)}(t)]^{-1}l_s(t)}, |l_s^*(t)P^{(i)}(t, \alpha)| < 1, t \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, \dots, N, \\ s = 1, 2, \dots, N, \alpha \in G_0^\alpha = \{\alpha \mid \alpha * B_\alpha \alpha \leq c_\alpha^2\}. \quad (8)$$

Тут

$$P^{(i)}(t, \alpha) = X^{(i)}(t, t_{i-1}) X^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2}) \dots X^{(2)}(t_2, t_1) [\tilde{G}^{(1)}(t_1)\alpha + \tilde{a}^{(1)}(t_1)] + X^{(i)}(t, t_{i-1}) \\ X^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2}) \dots$$

$$X^{(3)}(t_3, t_2) [\tilde{G}^{(2)}(t_2)\alpha + \tilde{a}^{(2)}(t_2)] + X^{(i)}(t, t_{i-1}) X^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2}) \dots X^{(4)}(t_4, t_3) [\tilde{G}^{(3)}(t_3)\alpha + \tilde{a}^{(3)}(t_3)] +$$

$$+ \dots + X^{(i)}(t, t_{i-1}) [\tilde{G}^{(i-1)}(t_{i-1})\alpha + \tilde{a}^{(i-1)}(t_{i-1})] + \tilde{G}^{(i)}(t)\alpha + \tilde{a}^{(i)}(t), i = 1, 2, \dots, N;$$

$$\tilde{G}^{(i)}(t) = \int_{t_{i-1}}^t X^{(i)}(t, \tau) G^{(i)}(\tau) d\tau;$$

$$\tilde{a}^{(i)}(t) = \int_{t_{i-1}}^t X^{(i)}(t, \tau) f^{(i)}(\tau) d\tau; X^{(i)}(t, t_{i-1}) - \text{нормована за моментом } t_{i-1} \text{ фундамен-}$$

тальна матриця розв'язків однорідної системи (1) при $\alpha = 0$:

$$\frac{dX^{(i)}(t, t_{i-1})}{dt} = A^{(i)}(t)X^{(i)}(t, t_{i-1}), X(t_{i-1}, t_{i-1}) = E, t \in [t_{i-1}, t_i], \quad (9)$$

а матриця $[Q^{(i)}(t)]^{-1} = [X^{(i)}(t, t_{i-1})X^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2})X^{(i-2)}(t_{i-2}, t_{i-3}) \dots X^{(1)}(t_1, t_0)]$.

$$\cdot B^{-1} [X^{(i)}(t, t_{i-1})X^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2})X^{(i-2)}(t_{i-2}, t_{i-3}) \dots X^{(1)}(t_1, t_0)]^*, t \in [t_{i-1}, t_i].$$

Доведення. Якщо послідовно, на кожному проміжку $[t_{i-1}, t_i]$, записати розв'язок системи (1) у формі Коші, одержимо таку формулу загального розв'язку для будь-якого моменту часу $t \in [t_{i-1}, t_i]$:

$$x(t) = X^{(i)}(t, t_{i-1}) X^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2}) \dots X^{(1)}(t_1, t_0) x(t_0, \alpha) + P^{(i)}(t, \alpha).$$

Далі подамо умову належності траєкторії системи (1) множині Γ_t у вигляді:

$$z(t) \in \{z(t) : -1 - l_s^*(t)P^{(i)}(t, \alpha) \leq l_s^*(t)z(t) < 1 - l_s^*(t)P^{(i)}(t, \alpha), s = 1, 2, \dots, N\}, t \in [t_{i-1}, t_i],$$

де $z(t) = X^{(i)}(t, t_{i-1}) X^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2}) \dots X^{(1)}(t_1, t_0) x(t_0, \alpha)$.

Визначивши відповідні екстремуми лінійної форми $l_s^*(t)z(t)$ на еліпсоїдах $\{z(t) : z^*(t)Q^{(i)}(t)z(t) \leq c^2\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, приходимо до нерівності (8).

Якщо постійно діючі збурення $f^{(i)}(t)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$ задовольняють умові (2), необхідно у формулі (8) взяти додатково мінімум по області $\{f^{(i)}(t): \|f^{(i)}(t)\| \leq \tilde{R}^{(i)}\}$.

Критерій 2. Для того, щоб система (1) була $\{c, B, c_\alpha, B_\alpha, \Psi_t, t_0, T\}$ – стійкою за наявності відомих збурень, необхідно та достатньо, щоб

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \min_{\bar{x} \in \Psi'_t} \min_{\alpha \in G_\alpha^0} \frac{[g^*(\bar{x}, t)(\bar{x} - P^{(i)}(t, \alpha))]^2}{g_s^*(\bar{x}, t)[Q^{(i)}(t)]^{-1} g(\bar{x}, t)},$$

$g^*(\bar{x}, t)(\bar{x} - P^{(i)}(t, \alpha)) > 0$, $\bar{x} \in \Psi'_t$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, N$, $\alpha \in G_\alpha^0 = \{\alpha \mid \alpha^* B_\alpha \alpha \leq c_\alpha^2\}$, де Ψ'_t , $t \in [t_0, T]$ – межа множини Ψ_t , $g^*(\bar{x}, t) = \text{grad}_x^* \psi(\bar{x}, t)$.

Доведення критерію 2 здійснюється аналогічно. При цьому замкнена опукла множина Ψ_t попередньо апроксимується дотичними гіперплощинами:

$$\Psi_t = \{x: \psi(x, t) \leq 1\} = \{x: g^*(\bar{x}, t)x \leq g^*(\bar{x}, t)\bar{x}, \bar{x} \in \Psi'_t\}, \quad t \in [t_0, T].$$

Критерій 3. Для того, щоб система (1) була $\{c, B, B_\alpha, \Gamma_{t,\alpha}, t_0, T\}$ – стійкою при відомих $f^{(i)}(t)$, $t \in [t_{i-1}, t_i]$, необхідно та достатньо, щоб виконувалось співвідношення

$$c^2 \leq \min_{i=1,2,\dots,N} \min_{t \in [t_{i-1}, t_i]} \min_{s=1,2,\dots,N} \frac{[1 - |p_s^*(t)\bar{P}^{(i)}(t, \alpha)|]^2}{p_s^*(t)[\tilde{Q}^{(i)}(t)]^{-1} p_s(t)},$$

$$|p_s^*(t)\bar{P}^{(i)}(t, \alpha)| < 1, \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

де $p_s(t) = \begin{pmatrix} l_s(t) \\ m_s \end{pmatrix}$ – $(n+m)$ - вимірний вектор, а матриця $[\tilde{Q}^{(i)}(t)]^{-1}$

визначається за такою рівністю:

$$[\tilde{Q}^{(i)}(t)]^{-1} = [Y^{(i)}(t, t_{i-1})Y^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2})Y^{(i-2)}(t_{i-2}, t_{i-3}) \dots Y^{(1)}(t_1, t_0)] \cdot \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & B_\alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

$$[Y^{(i)}(t, t_{i-1})Y^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2})Y^{(i-2)}(t_{i-2}, t_{i-3}) \dots Y^{(1)}(t_1, t_0)]^*, \quad t \in [t_{i-1}, t_i].$$

$$P^{(i)}(t, \alpha) = Y^{(i)}(t, t_{i-1}) Y^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2}) \dots Y^{(2)}(t_2, t_1) \bar{a}^{(1)}(t_1) + Y^{(i)}(t, t_{i-1}) Y^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2}) \dots Y^{(3)}(t_3, t_2) \bar{a}^{(2)}(t_2) +$$

$$+ Y^{(i)}(t, t_{i-1}) Y^{(i-1)}(t_{i-1}, t_{i-2}) \dots Y^{(4)}(t_4, t_3) \bar{a}^{(3)}(t_3) + \dots + Y^{(i)}(t, t_{i-1}) \bar{a}^{(i-1)}(t_{i-1}) + \bar{a}^{(i)}(t),$$

$$\bar{a}^{(i)}(t) = \int_{t_i}^t Y^{(i)}(t, \tau) \bar{f}^{(i)}(\tau) d\tau, \quad \bar{f}^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} f^{(i)}(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y^{(i)}(t, t_{i-1}) = \begin{pmatrix} X^{(i)}(t, t_i) & \tilde{G}^{(i)}(t) \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Щоб одержати необхідні й достатні умови стійкості у випадку нелінійних обмежень (7) необхідно множину $\Psi_{t,\alpha}$ апроксимувати гіперплощинами та скористатися результатами критерію 3.

Наведені алгоритми можна застосовувати для розрахунку областей практичної стійкості нелінійних систем зі змінною структурою шляхом їх попередньої лінеаризації лінійно-незалежними функціями [2].

Результати досліджень. Для лінійних параметричних систем зі змінною структурою доведено необхідні та достатні умови практичної стійкості, що поширюються на нелінійні системи шляхом їх попередньої лінеаризації.

Висновки

На підставі загальних теорем практичної стійкості для параметричних систем розроблено алгоритми оцінки областей початкових умов і параметрів, зв'язаних з проектуванням реальних динамічних об'єктів.

Список літератури

1. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. – К.: Наук. думка, 1985. – 304 с.
2. Панталієнко Л.А. Дослідження практичної стійкості нелінійних систем, залежних від параметрів / Л.А. Панталієнко // Науковий вісник НАУ. – 2005. – №90 – С. 185–191.
3. Панталієнко Л.А. Дослідження практичної стійкості параметричних моделей зі змінною структурою / Л.А. Панталієнко // Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». – 2012. – Вип. 174, ч.1. – С. 152–156.
4. Розенвассер Е.Н. Чувствительность систем управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов. – М.: Наука, 1981. – 464 с.
5. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк – К.: Вища шк., 1987. – 287 с.

Приведены результаты численного расчета областей практической устойчивости линейных параметрических систем с переменной структурой. Рассмотрены постановки задач устойчивости на конечном промежутке времени для структурно заданных множеств начальных условий и параметров.

Параметры, практическая устойчивость, линейные системы с переменной структурой, возмущения.

The results of numerical calculation of areas of practical stability of linear parametric systems with variable structure. Considered tasking stability in a finite period of time for given sets of structural parameters of the initial conditions.

Parameters, practical stability, linear systems with variable structure, perturbations.