

УДК 534.222

## МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ХВИЛЬ СКІНЧЕНОЇ АМПЛІТУДИ У М'ЯКИХ ГРУНТАХ СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОГО ПРИЗНАЧЕННЯ ПРИ ЇХ ВЗАЄМОДІЇ З РОБОЧИМИ ОРГАНАМИ ГРУНТООБРОБНИХ МАШИН ВІБРАЦІЙНО-ХВИЛЬОВОЇ ДІЇ

Д. Г. Войтюк, Ю. О. Гуменюк, Ю. В. Човнюк

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Кореспонденція авторів: [ugmsg@ukr.net](mailto:ugmsg@ukr.net).

Історія статті: отримано – травень 2018, акцептовано – вересень 2018.

Бібл. 6, рис. 0, табл. 0.

**Анотація.** Отримане рівняння, яке описує розповсюдження довгохвильових сигналів скінченої амплітуди у м'яких ґрунтах сільськогосподарського призначення при їх взаємодії з робочими органами ґрунтообробних машин вібраційно-хвильової дії. Обчислений коефіцієнт нелінійності насичення спорового середовища. Досліджений відносний внесок нелінійних ефектів та дисипативних, обумовлених відносним рухом компонент середовища. У даній роботі розглянута поведінка збурення відносно невеликої амплітуди, яке розповсюджується у вигляді ударної хвилі. У цьому наближенні обчислений коефіцієнт нелінійності насиченого спорового середовища й описаний як нестационарний, так і стаціонарний режими розповсюдження збурення, при якому нелінійність врівноважується релаксаційною в'язкістю, що виникає за рахунок обміну імпульсом між фазами. Показано, що у широкому діапазоні характерних параметрів ґрунтів врахування нелінійних складових у хвилях невеликої амплітуди є визначальним. Розвинутий у роботі підхід дозволяє послідовно вказати межі застосування лінійного наближення та відносної ролі нелінійних та дисипативно-дисперсійних складових у хвильовому рівнянні.

**Ключові слова:** моделювання, аналіз, хвилі, скінчена амплітуда, м'які ґрунти, сільське господарство, взаємодія, робочі органи, ґрунтообробні машини, вібраційно-хвильова дія.

### Постановка проблеми

Зазвичай у м'яких ґрунтах (у т.ч. сільськогосподарського призначення) існують хвилі 1-го роду, які розповсюджуються як у однофазному середовищі з внутрішньою ступінню вільності руху, а також і хвилі 2-го роду, що характеризуються невеликою швидкістю розповсюдження й аномально високим коефіцієнтом поглинання. Фронт слабкої нелінійної хвилі у м'яких ґрунтах сільськогосподарського призначення (МГСП) формується звуковими збуреннями 1-го роду й описується у межах моделі насиченого спорового середовища з рівними тисками – моделлю Х. А. Рахматуліна.

Дослідженню процесу розповсюдження стаціонарних сильних ударних хвиль присвячена робота Борисова С.Н., Ніколаєвського В.Н., Радченко В.П. [3], проте аналіз поведінки збурень відносно невеликої (але скінченої) амплітуди у МГСП відсутній.

### Аналіз останніх досліджень

Питаннями розповсюдження хвиль у насичених спорових середовищах займалися багато дослідників. Зокрема, у [1] наведена детальна бібліографія. Значний внесок у теорію був зроблений авторами робіт [1-3].

Як встановлено у [1], м'які ґрунти (МГСП) характеризуються відносно малими значеннями параметру цементації  $\kappa = \beta_1 K$  (де  $\beta_1$  – стиснення матеріалу твердої матриці,  $K^{-1}$  – ефективне стиснення скелету середовища) та фазові тиски у водонасиченому МГСП рівні між собою з точністю до величин порядку  $\kappa$  [1, 2]. У МГСП існують, як вказано вище, хвилі 1-го та 2-го роду. Основні параметри стаціонарних сильних ударних хвиль досліджені у [3].

У роботах [4,5] вказано на те, що для ґрунтів характерні доволі великі коефіцієнти нелінійності

$$\varepsilon = \rho \left( c \frac{\partial c}{\partial \rho} \right), \quad \text{де } \rho - \text{щільність середовища,}$$

$c$  – швидкість звуку. Як показано нижче, у широкому діапазоні характерних параметрів ґрунтів врахування нелінійних складових у хвилях невеликої амплітуди є визначальним. Розвинутий у даній роботі підхід дозволяє послідовно вказати межі застосування лінійного наближення й відносної ролі нелінійних та дисипативно-дисперсійних складових у хвильовому рівнянні.

### Мета досліджень

Мета дослідження полягає у обґрунтуванні моделі розповсюдження хвиль скінченої амплітуди у МГСП, що виникають при взаємодії робочих органів ґрунтообробних машин вібраційно-хвильової дії з

оброблюваним середовищем, й аналізі основних параметрів вказаних хвиль у процесі їх просторово-часової еволюції.

### Результати досліджень

У межах моделі Х.А. Рахматуліна система рівнянь безперервності та руху для кожної фази у плоскому одновимірному випадку приймає наступний вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(m\rho_2) + \frac{\partial}{\partial x}(wm\rho_2) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}[(1-m)\rho_1] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x}[(1-m)u\rho_1] = 0, \\ m\rho_2\left(\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + m\frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ m_0(1-m_0)\frac{\rho_{01}\rho_{02}}{\theta\rho_0}(w-u) = 0, \\ (1-m)\rho_1\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + (1-m)\frac{\partial p}{\partial x} - \\ &- m_0(1-m_0)\frac{\rho_{01}\rho_{02}}{\theta\rho_0}(w-u) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $\rho_1, \rho_2, u, w$  – щільності фаз та їх масові швидкості,  $m_0, m$  – початкова та поточна пористість,  $p$  – тиск у фазах,  $\rho_0 = (1-m_0)\rho_{01} + m_0\rho_{02}$  – рівноважна щільність середовища,  $\theta = k_0(1-m_0)\rho_{01}\rho_{02}/(\mu m_0\rho_0)$  – час релаксації,  $k_0$  – проникність середовища,  $\mu$  – в'язкість рідкої фази. Індекс 1 відповідає твердій фазі МГСП, а індекс 2 – рідкій.

Система рівнянь (1) доповнюється рівнянням стану Тета для кожної фази  $p = \rho_{01}c_i^2/n_i[(\rho_i/\rho_{0i})^{n_i} - 1]$  де  $c_i$  – рівноважні швидкості звуку у кожній з фаз,  $n_i$  – постійні,  $i = 1, 2$ . Система рівнянь (1) описує суспензію твердих часточок у рідині, а також МГСП.

Розглянемо довгохвильові збурення скінченної амплітуди, які розповсюджуються у одному напрямку, з характерними частотами, такими, що  $\omega\theta \ll 1$  (значення  $m_0^{-1}\theta$  для різних ґрунтів наведені у [1]:  $m_0^{-1}\theta \approx 10^{-9} - 10^{-3}$ ). Вважаємо, що число Маха  $M = w/c_0$  мале  $M \ll 1$ , де  $c_0 = (\beta\rho_0)^{-1/2}$  – рівноважна швидкість звуку у середовищі,  $\beta = (1-m_0)\beta_1 + m_0\beta_2$  – стиснення двофазного середовища,  $\beta_i = (\rho_{0i}c_i^2)^{-1}$  – стиснення  $i$ -ої фази. Припускаючи, що нелінійні та дисипативні ефекти справляють незначний вплив на профіль хвилі на відстанях порядку її довжини хвилі, у системі рівнянь (1) залишимо члени до другого порядку малості включно по відношенню до величин

$w/c_0, \rho_i'/\rho_{0i}, p'/(\rho_0c_0^2), m'/m_0$ , де штрихом позначені відхилення відповідних величин від їх рівноважних значень. Переходячи у супутню систему координат  $x = x, \tau = t - x/c_0$ , врахуємо, що за відсутності дисипативних та нелінійних складових у рівняннях всі величини залежать тільки від однієї змінної  $\tau$ . При врахуванні нелінійних та дисипативних складових залежність усіх величин буде також визначатись й повільною змінною  $x$  [6]. Оскільки зміна форми хвилі на відстанях порядку її довжини незначна, тоді слід очікувати прояв нелінійних ефектів на відстанях  $x \gg \lambda$ , де  $\lambda$  – довжина хвилі. З точністю до величин другого порядку малості у нових змінних система рівнянь (1) приймає інший вид (тут, у зв'язку з громіздкістю цієї системи, вона не приведена).

З рівнянь Тета випливає, що:

$$\rho_i' = \frac{p'}{c_i^2} - \frac{\varepsilon_i}{\rho_{0i}c_i^4}(p')^2, \quad \varepsilon_i = \frac{n_i - 1}{2}. \quad (2)$$

Підставимо (2) у систему рівнянь з точністю до величин другого порядку малості у нових змінних (тут не наведена). Виключаючи з рівнянь безперервності фаз  $m'$ , отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\beta p' - \frac{V}{c_0}\right) = m_0 A_1 - (1-m_0) A_2, \quad (3)$$

$$V = (1-m_0)u + m_0w$$

де  $V$  – середньо об'ємна швидкість середовища (МГСП).

Помножимо рівняння руху  $i$ -ої фази на величину  $\rho_{0i}[(1-m_0)\delta_{i1} + m_0\delta_{i2}]$  (де  $\delta_{i1}, \delta_{i2}$  – символи Кронекера) й складаючи отримані рівняння, будемо мати:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\beta p' - \frac{U}{c_0}\right) = -\frac{m_0\rho_{02}A_3 + (1-m_0)\rho_{01}A_4}{\rho_0}, \quad (4)$$

де  $U = \rho_0^{-1}[(1-m_0)\rho_{01}u + m_0\rho_{02}w]$  – середня масова швидкість середовища.

У рівняннях (3), (4)  $A_1 - A_4$  визначаються наступними виразами:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\varepsilon_2}{\rho_{02}^2 c_2^4} \frac{\partial (p')^2}{\partial \tau} - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{c_0 m_0} \frac{\partial}{\partial \tau}(wm') - \\ &- \frac{1}{\rho_{02} c_0} \frac{\partial}{\partial \tau}(w\rho_2') - \frac{1}{m_0 \rho_{02}} \frac{\partial}{\partial \tau}(m'\rho_2'); \\ A_2 &= \frac{\varepsilon_1}{\rho_{01}^2 c_1^4} \frac{\partial (p')^2}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial x} - \\ &- \frac{1}{c_0 (1-m_0)} \frac{\partial}{\partial \tau}(um') - \frac{1}{\rho_{01} c_0} \frac{\partial}{\partial \tau}(u\rho_1') - \\ &- \frac{1}{(1-m_0)\rho_{01}} \frac{\partial}{\partial \tau}(m'\rho_1'); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= \frac{w}{c_0^2} \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{m'}{m_0 \rho_{02} c_0^2} \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \\
&- \frac{1}{\rho_{02} c_0} \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{m'}{m_0 c_0} \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{\rho_2'}{\rho_{02} c_0} \frac{\partial w}{\partial \tau}; \\
A_4 &= \frac{u}{c_0^2} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{m'}{(1-m_0) \rho_{01} c_1^2} \frac{\partial p'}{\partial \tau} - \\
&- \frac{1}{\rho_{01} c_0} \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{m'}{(1-m_0) c_0} \frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\rho_1'}{\rho_{01} c_0} \frac{\partial u}{\partial \tau}.
\end{aligned} \quad (5)$$

З рівнянь системи, отриманої з точністю до величин другого порядку малості у нових змінних, можна визначити з точністю до 2-го порядку включно (у [1] це рівняння виведене у лінійному наближенні):

$$\begin{aligned}
\theta \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{V}{c_0} - \frac{\rho_0 U}{\rho_\infty c_0} \right) &= \frac{U-V}{c_0}, \\
\rho_\infty^{-1} &= (1-m_0) \rho_{01}^{-1} - m_0 \rho_{02}^{-1}.
\end{aligned} \quad (6)$$

У складових 2-го порядку замінимо величини  $u, p', m', V, U$  через величину  $w$  за допомогою співвідношень, які випливають з лінійної теорії:

$$w = u = \beta c_0 p' = \frac{\beta c_0 m'}{m_0 (1-m_0) (\beta_1 - \beta_2)} = V = U.$$

Як вказано вище, у низькочастотній межі масові швидкості фаз дорівнюють одна одній і хвиля розповсюджується зі швидкістю  $c_0 = (\beta \rho_0)^{-1/2}$ . У наступному наближенні необхідно враховувати, що різниця швидкостей фаз є величиною 2-го порядку малості.

Підставляючи значення  $\partial(U-V)/\partial \tau$  з рівняння (6) у рівняння, отримане шляхом віднімання рівняння (4) з (3), отримаємо рівняння відносно величини  $w$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha w \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}; \\
u - w &= \frac{\rho_0 \theta (1 - \rho_0 / \rho_\infty)}{m_0 (1 - m_0) (\rho_{01} - \rho_{02})} \frac{\partial w}{\partial \tau}, \\
\alpha &= \frac{3}{4 c_0^2} + \frac{m_0 (1 - m_0) (\beta_1 - \beta_2)^2}{2 \beta^2 c_0^2} + \\
&+ \frac{m_0 (1 - m_0) (\beta_1 - \beta_2) (\rho_{01} - \rho_{02})}{4} - \\
&- \frac{1}{4} \left( \frac{m_0}{c_1^2} + \frac{1 - m_0}{c_2^2} \right) + \\
&+ \frac{1}{2 \beta^2 c_0^2} [m_0 \varepsilon_2 \beta_2^2 + (1 - m_0) \varepsilon_1 \beta_1^2], \\
\gamma &= \theta (\rho_0 / \rho_\infty - 1) / (2 c_0).
\end{aligned} \quad (7)$$

Складова у правій частині рівняння (7) обумовлена неоднаковою інерційністю фаз. За малої проникності чи значної в'язкості рідини МГСП вирівнювання швидкостей відбувається швидко; за малої в'язкості чи великої проникності значення швидкості

теї фаз визначається тільки інерційними властивостями компонент. Зазначимо, що внутрішнє тертя у кожній з фаз пропорційне в'язкості, у той самий час як дисипація у середовищі (МГСП) обернено пропорційна в'язкості (у широкому діапазоні зміни параметрів в'язкості й проникності основною дисипативною складовою у правій частині рівнянь руху є сила тертя між компонентами).

Розв'язок рівняння (7) відомий [6]. З нього випливає, що сигнал скінченої амплітуди послаблюється, причому різниця швидкостей компонент вирівнюється з віддаленням від фронту хвилі.

Розглянемо розв'язок, який відповідає стаціонарній хвилі, коли дія нелінійних ефектів зрівноважується в'язкими. Тоді стаціонарна хвиля стрибка різниці масових швидкостей фаз має вид:

$$\begin{aligned}
w - u &= \frac{\alpha \rho_0 c_0 w_0^2}{4 m_0 (1 - m_0) (\rho_{02} - \rho_{01})} ch^{-2} \times \\
&\times \left[ \frac{\alpha w_0}{4 \gamma} (\tau - \tau_0) \right],
\end{aligned} \quad (8)$$

де ширина фронту стаціонарної хвилі (солітона)  $\delta \Phi$  дорівнює  $4 \gamma / (\alpha w_0)$ . Наприклад, для водонасиченого кварцового піску ширина фронту при  $\mu \approx 10^{-4}$  складає  $\delta \Phi \approx 5 \text{ м}$ , у той час як у лінійній теорії  $\delta \Phi$  зростає з відстанню [3].

Проаналізуємо відносну роль нелінійних складових у рівнянні (7) при розповсюдженні хвиль скінченої амплітуди у середовищах типу МГСП. Параметр  $z = \rho_{01} \rho_{02} k_0 / (2 \mu \rho_0)$  для глинистого піску при  $m_0 \approx 0,2 - 0,4$  порядку  $5 \cdot 10^{-6} - 3 \cdot 10^{-4}$  [1] й, відповідно,  $w / c_0 \approx c_0 \omega \gamma \approx (10^{-4} - 10^{-3}) \omega$  при  $c_0 = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$ , тому для хвиль з частотами  $\omega \approx 0,1 - 10 \text{ Гц}$  нелінійні ефекти повинні переважати над дисипативними при  $w_0 > 0,1 \text{ м/с}$ , що може бути виконано лише для хвиль великої інтенсивності, які виникають при взаємодії робочих органів ґрунтообробних машин вібраційно-хвильової дії з оброблюваним ними МГСП. У суглинку карбонатному, глині чи солонцевій глині  $z \approx 10^{-9} - 10^{-7}$  [1] і вплив нелінійних ефектів буде значним й при малих інтенсивностях хвиль. Врахування дисперсії у рівнянні (7) може призвести до осциляторної поведінки збурень за фронтом слабкої ударної хвилі, що, у свою чергу може сприяти розжиженню середовища (МГСП).

## Висновки

1. Обґрунтована нелінійна фізико-механічна та математична моделі м'яких ґрунтів сільськогосподарського призначення (МГСП), для яких встановлені основні закономірності просторово-часової еволюції хвиль, виникаючих при взаємодії робочих органів ґрунтообробних машин вібраційно-хвильової дії з оброблюваним середовищем.

2. Прояв нелінійних ефектів у МГСП слід чекати у таких середовищах, якщо вони мають малу проникність чи великий коефіцієнт в'язкості, що відповідає малим значенням релаксаційного часу. Наявність у таких середовищах зацмленого повітря призведе до значного збільшення ролі нелінійної взаємодії.

3. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення і вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку параметрів робочих органів ґрунтообробних машин вібраційно-хвильової дії, взаємодіючих з МГСП, як на стадіях їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

### Список літератури

1. Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А. Механика насыщенных пористых сред. Москва. Недра. 1970. 335с.
2. Николаевский В. Н. О процессах неустойчившейся деформации водонасыщенных грунтов. Arch. Mech. Stosow. 1965. V. 17. No 3. P. 441–452.
3. Борисов С. Н. О структуре фронта ударной волны в водонасыщенном грунте. Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. №3. С. 55–63.
4. Садовский М. А., Николаев А. В. Новые методы сейсмической разведки. Перспективы развития. Вестник АН СССР. 1982. №1. С. 57–64.
5. Гуцин В. В., Шалашов Г. М. О возможности использования нелинейных сейсмических эффектов в задачах вибрационного просвечивания Земли. В книге: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками. Москва. Наука. 1981. С. 144–155.
6. Руденко О. В., Солуян С. С. Теоретические основы нелинейной акустики. Москва. Наука. 1975. 288 с.

### References

1. Nikolaev, V. N., Basniev, K. S., Gorbunov, A. T., Zotov, G. A. (1970). Mechanics of saturated porous media. Moscow. Bowels. 335.
2. Nikolaev, V. N. (1965). In the unsteady processes of deformation of saturated soils. Arch. Mech. Stosow. V. 17. No 3. 441-452.
3. Borisov, S. N. (1967). In the structure of shock wave front in water-saturated soil. News of Academy of Sciences of the USSR. Mechanics of liquid and gas. No 3. 55-63.
4. Sadovsky, M. A., Nikolayev, A. V. (1982). New methods of seismic exploration. Prospects. Bulletin of the USSR Academy of Sciences. No 1. 57-64.
5. Gushchin, V. V., Shalashov, G. M. (1981). About the possibility of using nonlinear seismic effects in problems of vibration transmission of the Ground. In the book: the study of the Earth's non-explosive seismic sources. Moscow. Science. 144-155.
6. Rudenko, A. V., Soluyan, S. S. (1975). Theoretical fundamentals of nonlinear acoustics. Moscow. Science. 288.

### МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В МЯГКИХ ПОЧВАХ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО НАЗНАЧЕНИЯ ПРИ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С РАБОЧИМИ ОРГАНАМИ ПОЧВООБРАБАТЫВАЮЩИХ МАШИН ВИБРАЦИОННО-ВОЛНОВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Д. Г. Войтюк, Ю. О. Гуменюк, Ю. В. Човнюк

**Аннотация.** Получено уравнение, которое описывает распространение длинноволновых сигналов конечной амплитуды в мягких грунтах сельскохозяйственного предназначения при их взаимодействии с рабочими органами почвообрабатывающих машин вибрационно-волнового действия. Вычислен коэффициент нелинейности насыщения поровой среды. Исследован относительный вклад нелинейных эффектов и диссипативных, обусловленных относительным движением компонент среды. В данной работе рассмотрено поведение возмущения относительно небольшой амплитуды, которое распространяется в виде ударной волны. В этом приближении вычислен коэффициент нелинейности насыщенного поровой среды и описан как стационарный, так и нестационарный режимы распространения возмущения, при котором нелинейность уравнивается релаксационной вязкостью, которая возникает за счёт обмена импульсом между фазами. Показано, что в широком диапазоне характерных параметров грунтов учёт нелинейных составляющих в волнах небольшой амплитуды является определяющим. Разработанный в работе подход позволяет последовательно указать границы применения линейного приближения и относительную роль нелинейных и диссипативно-дисперсионных составляющих в волновом уравнении.

**Ключевые слова:** моделирование, анализ, волны, окончена амплитуда, мягкие почвы, сельское хозяйство, взаимодействие, рабочие органы, почвообрабатывающие машины, вибрационно-волновая действие.

### MODELING AND ANALYSIS OF FINITE-AMPLITUDE WAVES IN SOFT SOILS FOR AGRICULTURAL PURPOSES IN THEIR INTERACTION WITH WORKING BODIES OF TILLAGE MACHINES VIBRATION-WAVE IMPACT

Voytyuk D. G., Gumeniuk Yu. O., Chovnyuk Yu. V.

**Abstract.** The equation for the propagation of the long-wave signals of finitely valued amplitude in the soft agricultural soils during their interaction with working organs of the soil's treated machines of vibrate-wave action is obtained. The coefficient of the nonlinearity of the saturation of the pore's media is calculated. The comparative contribution of the nonlinear effects and of the dissipative, as well, which are attributed to relative motion of media's components, is researched. The behavior of the relatively little amplitude of perturbation, which propagates as a shock-wave, is discussed at this work. According to this approach, the coefficient of nonlinearity for the saturated pore media is calculated. The stationary and no stationary regimes of the perturbation propagation are described just for the situation when the nonlinearity is

balanced by the relaxation viscosity and appears with the help of the impulse change between the phases. For the wide range of the soil's characteristic parameters, the account of the nonlinear components in the waves of the no large amplitude is principal. The approach of this work gives one the possibility for the consistent indication of the boundaries for the linear approximation and the relative role of nonlinear and dissipative and dispersion components at the wave equation.

**Key words:** modeling, analysis, wave over the amplitude of the soft soil, agriculture, communication, working bodies tillage machines, vibration and wave action.

