

УДК 631.01:534.1

## ВИЗНАЧЕННЯ РЕЗОНАНСНИХ ПАРАМЕТРІВ ІНЕРЦІЙНОГО ВІБРАТОРА

О. М. Черниш, М. Г. Березовий

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Кореспонденція авторів: [mechanics\\_chair@nubip.edu.ua](mailto:mechanics_chair@nubip.edu.ua).

Історія статті: отримано – вересень 2018, акцентовано – листопад 2018.  
Бібл. 11, рис. 1, табл. 0.

**Анотація.** Розглянуто диференціальні рівняння руху вібраційної машини разом із її інерційним дебалансовим приводом у вигляді двох обертальних ексцентриків. В умовах переходу через зону резонансу отримано загальний розв'язок рівнянь руху у першому наближенні. Знайдені вирази для максимальних резонансних амплітуд і відповідних значень фази і швидкості обертання дебалансів інерційного вібратора. Дан аналіз отриманих виразів у період розгону і вибігу вібраційного приводу машини.

**Ключові слова:** механічні коливання, вібраційна машина, інерційний привод, резонанс.

### Постановка проблеми

Вібраційні технології набувають широкого впливу на інтенсифікацію технологічних процесів як у світовому, так й у вітчизняному виробництві. Застосування вібраційних методів у виробництві продукції агропромислового комплексу завдяки їх характеру та особливостям позитивно впливає на продуктивність і якість при сепарації, транспортуванні, розсіюванні тощо. Відомі та досить розповсюджені ґрунтообробні, клубнезбиральні та коренезбиральні машини, що використовують вібраційні робочі органи [2, 9], а також інше обладнання та устаткування, розробка та обґрунтування режимів роботи якого потребує розрахунків коливань та вібрацій [3, 4, 10].

Проте, процес створення вібраційних машин для підприємств аграрної галузі та переробної промисловості має певні труднощі. Це пов'язано із складністю фізичних процесів, які виникають при взаємодії вібраційних робочих органів машини з оброблюваним середовищем або сировиною, хоча самі вібраційні машини за своєю конструкцією можуть бути доволі простими. Адже для того, щоб правильно проектувати, створювати та експлуатувати вібраційну техніку, необхідно чітко уявляти фізичну природу дії вібрації на матеріал, а також динамічні основи забезпечення раціональних конструкційних та кінематичних параметрів вібраційних машин.

Тому теоретичне обґрунтування основ і принципів дії вібраційних машин, підвищення їх технологічної і енергетичної ефективності є вкрай важливим завданням.

### Аналіз останніх досліджень

Вібраційним коливанням і їх практичному застосуванню присвячені чисельні наукові дослідження [1-4, 6-8]. Особливої уваги заслуговують механічні системи, для яких характерно зворотний вплив руху коливальної частини на джерело збурення. У цих системах збурюючі сили істотно залежать не лише від стану коливальної системи, але і від стану вібраційного приводу, поведінка якого описується додатковим диференціальним рівнянням або системою рівнянь.

Традиційний підхід до завдання про взаємодію коливальної системи з джерелом збурення полягає в тому, що обертання ротора електродвигуна вважається рівномірним, а його кутова швидкість не залежить від руху системи. В такому випадку коливання можна описати лінійним диференціальним рівнянням. Проте, вже давно експериментально з'ясовано, що зарезонансна крива такої системи є нестійкою і часто не може бути реалізована [7]. З цієї причини в зазначеному випадку потрібно розглядати коливання системи спільно із вібраційним приводом, враховуючи зворотний вплив на нього самої системи.

Проблемі взаємодії різного роду коливальних систем із механічними дебалансовими вібраційними електроприводами різних типів також присвячені чисельні роботи [1, 8, 11]. При цьому взаємодія коливальної системи із джерелом збурення має важливе значення для дослідження перехідних режимів, зокрема, процесу проходження через резонанс у вібраційних машинах з інерційним збуренням. Аналітичні розв'язки проводяться, як правило, методом малого параметру або асимптотичними методами і дозволяють математично описати вібраційні ефекти та інші характерні явища.

### Мета досліджень

Метою досліджень є теоретичне визначення максимальних резонансних амплітуд і відповідних значень фази і швидкості обертання дебалансів інерційного вібратора, а також аналіз отриманих виразів у моменти розгону і вибігу вібраційного приводу машини.

## Результати досліджень

Розглянемо вібраційну механічну систему масою  $m$  із одним ступенем вільності, яка знаходиться на пружній основі сумісно із інерційним дебалансовим приводом, який складений з двох симетричних обертальних ексцентрикових полумас  $\frac{m_0}{2}$  (рис. 1):

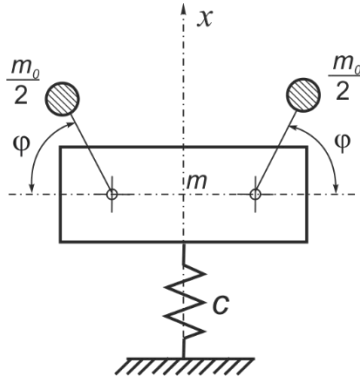


Рис. 1. Модель вібратора з інерційними дебалансами.

Рух цієї системи разом із дебалансовим приводом описується системою диференціальних рівнянь виду

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon f_1(x, \dot{x}, \ddot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}), \\ \ddot{\varphi} &= \varepsilon f_2(x, \dot{x}, \ddot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

де  $x$  – лінійне переміщення системи;  $\varphi$  – кутове переміщення дебалансів;  $\varepsilon$  – малий параметр нелінійності системи;  $\omega$  – частота власних коливань системи.

Згідно із асимптотичним методом, розв'язок системи рівнянь (1) біля резонансної частоти, можна знайти у формі

$$\left. \begin{aligned} x &= A \sin \psi + \varepsilon u_1(A, \theta, \nu, \varphi) + \dots, \\ \psi &= \frac{p}{q} \varphi + \theta, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \nu + \varepsilon v_1(A, \theta, \nu, \varphi) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

де  $A$ ,  $\theta$ ,  $\nu$  – відповідно амплітуда, фаза і частота коливань;  $\theta$  – фаза;  $\nu$  – частота (середнє за цикл значення кутової швидкості дебалансів);  $p$ ,  $q$  – цілі взаємно прості числа, які підбираються в залежності від розглядаемого резонансу.

Параметри  $A$ ,  $\theta$ ,  $\nu$  як функції від часу, визначаються рівняннями

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \varepsilon a_1(A, \theta, \nu) + \varepsilon^2 \dots, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - \frac{p}{q} \nu + \varepsilon b_1(A, \theta, \nu) + \varepsilon^2, \\ \frac{d\nu}{dt} &= \varepsilon c_1(A, \theta, \nu) + \varepsilon^2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

За параметр  $A$  приймемо повну амплітуду основної гармоніки коливань, а за параметр  $\nu$  – середнє за цикл значення кутової швидкості дебалансів. Це рівнозначно відсутності у складі функції  $u_i$  першої гармоніки аргументу  $\psi$ , а у складі функції  $v_i$  сталої складової, вільної від  $\varphi$  і  $\psi$ .

Переіменувавши в системі (1) змінні згідно до системи (2), із врахуванням (3) і вимог, що накладені на функції  $u_i$  і  $v_i$  після перетворень можна шукати функції амплітуди, фази коливань і кутової швидкості біля резонансу у наступному загальному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} f_1(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \varphi, \nu, 0) \cos \psi d\left(\frac{\varphi}{q}\right), \\ b_1 &= -\frac{1}{2\pi\omega a} \int_0^{2\pi} f_1(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \varphi, \nu, 0) \sin \psi d\left(\frac{\varphi}{q}\right), \\ c_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \varphi, \nu, 0) d\left(\frac{\varphi}{q}\right), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

де

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= A \sin \psi, \\ \dot{x}_0 &= A \omega \cos \psi, \\ \ddot{x}_0 &= -A \omega^2 \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Чисельне інтегрування рівнянь (3) при заданих параметрах системи і початкових умовах дозволяє отримати картину проходження системи через резонанс. Труднощі викликають підбір початкових параметрів. Але в багатьох випадках достатньо мати тільки максимальні значення амплітуди і частоти, при яких спостерігаються ці максимуми.

В цьому разі для знаходження максимумів амплітуди і відповідних значень фази і кутової швидкості можна скористатись умовами:

$$\frac{dA}{dt} = 0, \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\nu}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2A}{dt^2} < 0 \quad (6)$$

Застосувавши ці умови до системи (3), можна отримати наступну систему рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} a_1(A, \theta, \nu) &= 0, \\ \left(-\frac{p}{q} + \varepsilon \frac{\partial b_1}{\partial \nu}\right) \cdot \frac{d\nu}{dt} + \varepsilon \frac{\partial b_1}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial c_1}{\partial \nu} \cdot \frac{d\nu}{dt} + \frac{\partial c_1}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} &= 0, \\ \frac{\partial a_1}{\partial \theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial a_1}{\partial \nu} \cdot \frac{d\nu}{dt} &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Рівняння (7) сумісно з (3) є системою кінцевих рівнянь, із яких можна отримати максимуми амплітуд і відповідні їм значення фази і частоти.

Згідно з наведеними вище міркуваннями визначимо резонансні значення вібраційного приводу із інерційним збудувачем, рух якого описаний наступною системою диференціальних рівнянь [7]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x &= \varepsilon \left[ Q(\dot{\varphi}^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi} \cos \varphi) - h\dot{x} \right], \\ \ddot{\varphi} &= \varepsilon \left[ M_1(\dot{\varphi}) - Q_1(g + \ddot{x}) \cos \varphi - L(\ddot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) \right]. \end{aligned} \right\} (8)$$

В цій системі

$$\omega^2 = \frac{c}{m}; \quad \varepsilon \cdot Q = \frac{rm_0}{m}; \quad \varepsilon \cdot h = \frac{\alpha}{m}; \quad \varepsilon \cdot M_1(\varphi) = \frac{M(\dot{\varphi})}{J};$$

$$\varepsilon \cdot Q_1 = \frac{rm_0}{J};$$

$$\varepsilon L(\ddot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}) = \frac{\mu rm_0}{J} \left\{ g^2 + \ddot{x}^2 + 2gx + r^2(\dot{\varphi}^4 + \dot{\varphi}^2) + 2r(g + \ddot{x})(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

де  $m$  – маса коливальної системи;  $J$  – момент інерції обертальних дебалансів;  $\alpha$  – коефіцієнт в'язкості;  $\mu$  – зведений коефіцієнт тертя у підшипниках вібратора;  $M(\dot{\varphi})$  – обертальний момент двигуна;  $\varepsilon L(\ddot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$  – момент тертя у підшипниках, який прийнятий пропорціональним тиску в кінематичних парах.

Розглядаючи момент переходу через основний резонанс ( $p = q = 1$ ) і маючи на увазі, що для цих вібротомашин  $\frac{g}{rv^2} \ll 1$ ,  $\frac{A}{r} \ll 1$ , прийнемо:

$$\varepsilon L(-A\omega^2 \sin \psi, \varphi, v, 0) \square \frac{\mu rm_0}{J} (rv^2 + A\omega^2 \sin \psi \sin \varphi) \quad (9)$$

Користуючись викладеною методикою, отримаємо рівняння першого наближення

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= -\frac{\alpha A}{m} - \frac{rm_0 v^2 \sin \theta}{m(\omega + v)}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega - v - \frac{rm_0 v^2 \cos \theta}{mA(\omega + v)}, \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{J} \left[ M(v) - Mr^2 m_0 v^2 + \frac{1}{2} rm_0 A \omega^2 \sin \theta \right]. \end{aligned} \right\} (10)$$

Визначимо максимальні амплітуди і відповідні значень фази і швидкості обертання дебалансів, використовуючи умови (7):

$$\frac{1}{J} \left[ M'(v) - 2\mu m_0 r^2 v \right] \left[ M(v) - \mu m_0 r^2 v^2 + \frac{1}{2} rm_0 A \omega^2 \sin \theta \right] + \frac{1}{2} rm_0 A \omega^2 \cos \theta \left[ \omega - v - \frac{rm_0 v^2 \cos \theta}{mA(\omega + v)} \right] = 0. \quad (11)$$

Тоді за методом послідовних наближень можна записати.

Із другого рівняння системи (14) зрозуміло, що у період запуску частота  $V$ , яка відповідає максимуму амплітуди, більше частоти власних коливань  $\omega$  і відрізнятиметься від неї тим більше, чим більшим буде запас потужності двигуна

$$M(v) - \mu r^2 m_0 v^2 - \frac{\alpha A^2 \omega^2 (\omega + v)}{4v^2}.$$

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{2rm_0 v^2 \sin \theta}{\alpha(\omega + v)}, \\ v &= \sqrt{\frac{\omega^2 + \frac{2m(\omega + v)}{J\alpha} \left( 1 + \frac{rm_0 v(2\omega + v)}{mA(\omega + v)^2} \cos \theta \right)}{1 + \frac{rm_0 \cos \theta}{ma}} \times} \\ &\times \sqrt{M(v) - \mu m_0 v^2 - \frac{\alpha A^2 \omega^2 (\omega + v)}{4v^2}} \\ \cos \theta &= \frac{rm_0 v^2}{mA(\omega^2 + v^2)} \left[ 1 - \left( \frac{\alpha A(\omega + v)}{2rm_0 v^2} \right)^2 \right] - \\ &- \frac{2 \left[ M'(v) - 2\mu m_0 r^2 v \right] \left[ M(v) - \mu r^2 m_0 v^2 - \frac{\alpha A^2 \omega^2 (\omega + v)}{4v^2} \right]}{Jrm_0 A \omega^2 (\omega - v)}. \end{aligned} \right\} (14)$$

Із другого рівняння системи (14) зрозуміло, що у період запуску частота  $V$ , яка відповідає максимуму амплітуди, більше частоти власних коливань  $\omega$  і відрізнятиметься від неї тим більше, чим більшим буде запас потужності двигуна:

$$M(v) - \mu r^2 m_0 v^2 - \frac{\alpha A^2 \omega^2 (\omega + v)}{4v^2}.$$

У період вибігу  $M(v) \equiv 0$  і максимальні амплітуди спостерігаються при  $v < \omega$ .

Із третього рівняння системи (14) видно, що при зупинці  $\cos \theta > 0$ , а при запуску  $\cos \theta < 0$ .

Так як збурення буде пропорційно квадрату частоти  $V$  і максимум амплітуди при запуску відбувається при  $v > \omega$ , тут не відбувається суттєвого зниження максимуму амплітуди в перехідному процесі у порівнянні із резонансною частотою у стаціонарному режимі коливань. Якщо ж праві частини рівнянь прирівняти до нуля можна отримати стаціонарний режим коливань.

Схожі результати були отримані і при інших дослідженнях, коли резонансні амплітуди при запуску були значно більше, ніж при вибігу, а кутова швидкість двигуна, що відповідає максимуму амплітуди, при запуску значно більша, ніж при зупинці [1, 7, 10].

Отже, отримані вирази для максимальної резонансної амплітуди і відповідні значення фази коливань та швидкості обертання дебалансів інерційного вібратора дають можливість теоретично проаналізувати поведінку даної механічної коливальної системи у моменти розгону і вибігу, а отже вибрати оптимальні параметри вібраційного приводу машини.

## Висновки

1. Таким чином, розглянуто розв'язок диференціальних рівняння руху вібраційної машини разом із її інерційним дебалансовим приводом у вигляді двох обертальних ексцентриків. Методом перших наближень отримано загальний розв'язок рівнянь руху при переході через резонанс даної коливальної механічної системи. Знайдені вирази для максимальних резонансних амплітуд і відповідних

значень фази і швидкості обертання дебалансів інерційного вібратора.

2. Отримані вирази також дають можливість проаналізувати динамічні процеси у період розгону та вибігу вібраційного приводу машини.

### Список літератури

1. *Алифов Ф. Ф., Фролов К. В.* Взаимодействие нелинейных колебательных систем с источниками энергии. Москва. Наука. 1985. 328 с.

2. *Булгаков В. М., Головач І. В.* Теорія вібраційного викопування коренеплодів. Механізація сільськогосподарського виробництва. Київ. НАУ. 2003. Том XIV. С. 34–86.

3. *Вибрационные процессы и машины.* Вибрации в технике. Справочник, Том 4. Ред. Э. Э. Лавендела. Москва. Машиностроение. 1981. 509 с.

4. *Яцун С. Ф., Сафаров Д. И., Мищенко В. Я., Локтионова О. Г.* Вибрационные машины и технологии. Баку. Элм. 2004. 408 с.

5. *Коловский М. З.* Динамика машин. Ленинград. Машиностроение. 1989. 263 с.

6. *Кузнецов А. П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.* Нелинейные колебания. Москва. Изд. физ.-мат. лит. 2002. 292 с.

7. *Кононенко В. О.* Колебательные системы с ограниченным возбуждением. Москва. Наука. 1964. 324 с.

8. *Пресняков В. К., Филер З. Е.* Колебания двухмассных вибромашин с нелинейными упругими связями. Разработка месторождений полезных ископаемых. Киев. 1966. № 6. С. 46–59.

9. *Кошук О. Б., Лузан П. Г., Мося І. А., Герлянд Т. М., Романов Л. А.* Сільськогосподарські і меліоративні машини: навчальний посібник. Київ. ПІТО НАПН України. 2015. 291 с.

10. *Черниш О. М., Яременко В. В.* Розрахункова модель коливального руху навісного очисника головок коренеплодів. Вібрації в техніці та технологіях. Вінниця. 2013. № 1 (69). С. 140–148.

11. *Ярошевич Т. С.* Дослідження пуску вібраційної машини з дебалансним приводом. Вісник Національного університету «Львівська політехніка». 2007. № 557. С. 94–102.

### References

1. *Alifov, F. F., Frolov, K. V.* (1985). Interaction of nonlinear oscillatory systems with energy sources. Moscow. Science. 328.

2. *Bulgakov, V. M., Golovach, I. V.* (2003). Theory of vibrating excavation of root crops. Mechanization of agricultural production. Kiev. NAU. Volume XIV. 34-86.

3. *Vibration processes and machines.* Vibrations in the technique. (1981). Reference, Volume 4. Ed. E. E. Lavendel. Moscow. Engineering. 509.

4. *Yatsun, S. F., Safarov, D. S., Mishchenko, V. Ya., Loktionova, E. G.* (2004). Vibrating machines and technology. Baku. Elm. 408.

5. *Kolovsky, M. O.* (1989). Dynamics of machines.

Leningrad. Engineering. 263 p.

6. *Kuznetsov, A. P., Kuznetsov, S. P., Ryskin, N. M.* (2002). Nonlinear oscillations. Moscow. 292.

7. *Kononenko, V. A.* (1964). Vibrating systems with limited excitation. Moscow. Science. 324.

8. *Presnyakov, V. K., Filer, Z. E.* (1966). Fluctuations dvuhmestnij vibrators with nonlinear elastic connections. The development of mineral deposits. Kiev. No 6. 46-59.

9. *Kachuk, B. A., Luzan, P. G., Mosa, I. A., Gerland, T. M., Romanov, L. A.* (2015). Agricultural and reclamation machines: textbook. Kiev. PTO of NAPS of Ukraine. 291.

10. *Blackie, A. M., Yaremenko, V. V.* (2013). Computational model of the vibrational motion of the hinged cleaner of heads of root crops. Vibration in engineering and technology. Vinnitsa. No 1 (69). 140-148.

11. *Yaroshevich, T. S.* (2007). Study of the start of vibration machines with debalance drive. Herald of National University "Lviv Polytechnic". No 557. 94-102.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ПАРАМЕТРОВ ИНЕРЦИОННОГО ВИБРАТОРА

*О. Н. Черныш, Н. Г. Березовий*

**Аннотация.** Рассмотрены дифференциальные уравнения движения вибрационной машины вместе с ее инерционным дебалансовым приводом в виде двух вращающихся эксцентриков. В условиях перехода через зону резонанса получено общее решение уравнений движения в первом приближении. Найлены выражения для максимальных резонансных амплитуд и соответствующих значений фазы и скорости вращения дебалансов инерционного вибратора. Дан анализ полученных выражений в период разгона и выбега вибрационного привода машины.

**Ключевые слова:** механические колебания, вибрационная машина, инерционный привод, резонанс.

### DETERMINATION OF RESONANCE PARAMETERS OF INERTIAL VIBRATOR

*Chernysh O. M., Berezovyi M. G.*

**Abstract.** Differential equations of motion of a vibration machine together with its inertial unbalance drive in the form of two rotating eccentrics are considered. The general solution of the equations of motion is obtained in the first approximation under the conditions of transition through the resonance zone. The expressions for the maximum resonant amplitudes and the corresponding values of the phase and rotational speed of the inertial vibrator unbalances are found. The analysis of the obtained expressions during the acceleration and run-out of the vibratory drive of the machine is given.

**Key words:** mechanical vibrations, vibration machine, inertial drive, resonance.