

3. Розенвассер Е.Н. Чувствительность систем управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов.— М.: Наука, 1981. — 464 с.

4. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк. — К.: Вища шк., 1987. — 287 с.

Приведены результаты численного расчета областей допусков на параметры для линейных параметрических систем с переменной структурой. Рассмотрены постановки задач расчета допусков, которые включаются в алгоритмы практической устойчивости.

Допуски на параметры, устойчивость, критерии оценки, системы с переменной структурой.

The results of numerical calculation of tolerance on the parameters for parametric linear systems with variable structure. Considered problem statement calculating tolerances covered algorithms practical stability.

Tolerances on parameters, stability, evaluation criteria, systems with variable structure.

УДК 519.21

УМОВИ ВИНИКНЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ СЛАБОЗБУРЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ (ВИПАДОК $k = -2$)

Р.Ф. Овчар, кандидат фізико-математичних наук

Запропоновано і доведено теорему для отримання достатніх умов існування розв'язків слабозбурених лінійних неоднорідних крайових задач з імпульсною дією у випадку, коли умова $P_{B_0} = 0$, $P_{B_0} P_{Q_2} = 0$ не виконується.

Слабозбурена лінійна неоднорідна крайова задача, однорідна крайова задача з імпульсною дією, ортопроектор, ряд, псевдо-обернена матриця.

Актуальність цієї теми обумовлена, перш за все, важливістю практичного застосування теорії крайових задач у теорії нелінійних коливань, теорії стійкості руху, теорії управління, ряді геофізичних задач. З іншого боку, отримані в статті нові результати суттєво доповнюють дослідження по теорії нелінійних коливань для слабозбурених крайових задач.

Мета досліджень — знаходження достатніх умов існування розв'язків лінійних неоднорідних імпульсних крайових задач з малими збуреннями у випадку, коли породжуюча крайова задача з імпульсною дією не має розв'язків при довільних правих частинах.

Матеріали та методика досліджень. При дослідженні розв'язків поставленої задачі використано методи теорії збурень, розроблені в працях А.М.Ляпунова та його послідовників, асимптотичні методи нелінійної механіки, розроблені в працях М.М.Крилова, М.М.Боголюбова, Ю.О.Митропольського та А.М.Самойленка.

Результати досліджень. Введемо такі позначення: $Q = lX(\cdot) - (m \times n)$ – вимірна матриця; $Q^* = Q^T - (n \times m)$ – вимірна матриця; $P_{Q^*} - (m \times n)$ – вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує $\mathbb{R}^m$ на $N(Q^*)$, $P_{Q^*}: \mathbb{R}^m \rightarrow N(Q^*)$; $P_{Q_d^*} - (d \times m)$ – вимірна матриця, рядки якої є повною системою d лінійно незалежних рядків матриці P_{Q^*} ; Q^+ – єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до $Q (n \times m)$ – вимірна матриця; $P_{B_0} - (r \times r)$ – вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує $\mathbb{R}^r$ на нуль-простір $N(B)$ $(d \times r)$ – вимірної матриці B_0 , $P_{B_0}: \mathbb{R}^r \rightarrow N(B_0)$; $P_{B_0^*} - (d \times d)$ – вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує $\mathbb{R}^d$ на нуль-простір $N(B_0^*)$ $(r \times d)$ – вимірної матриці $B_0^* = B_0^T$, $P_{B_0^*}: \mathbb{R}^d \rightarrow N(B_0^*)$.

Якщо умова $P_{B_0} = 0$, $P_{B_0^*}P_{Q_d^*} = 0$ не виконується, то для отримання достатніх умов існування розв'язків крайової задачі

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + \varepsilon A_1(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i; \\ \Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z = \alpha_i + \varepsilon A_{1i} z(\tau_i - 0); \\ lz = \alpha + \varepsilon l_1 z \end{cases} \quad (1)$$

при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ і $\alpha \in \mathbb{R}^m$ приходимо до теореми, яка узагальнює відповідний результат для крайових задач без імпульсів з [1].

Теорема. Нехай $\text{rank } Q = n_1 < n$ і критерій розв'язності

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - l \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^p \bar{K}(\cdot, \tau_i) \alpha_i \right\} = 0, \quad d = m - n_1$$

не виконується. Іншими словами, припустимо, що породжуюча крайова задача, яка отримується з (1) при $\varepsilon = 0$:

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z + f(t), \quad t \neq \tau_i; \\ \Delta z|_{t=\tau_i} - S_i z = \alpha_i; \\ lz = \alpha \end{cases} \quad (2)$$

не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Тоді справедливі такі еквівалентні твердження:

а) при довільних $f(t) \in C([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}^n$ і $\alpha \in \mathbb{R}^m$ крайова задача (1) має єдиний розв'язок $z(t, \varepsilon)$ у вигляді збіжного при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ ряду

$$z(t, \varepsilon) = \sum_{i=-2}^{+\infty} \varepsilon^i z_i(t); \quad (3)$$

б) при довільному r -вимірному постійному векторі $\varphi_0 \in \mathbb{R}^r$ r -вимірна алгебраїчна система

$$(B_0 + \varepsilon B_1 + \dots) u_\varepsilon = \varphi_0 \quad (4)$$

має єдиний розв'язок у вигляді збіжного при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ ряду

$$u_\varepsilon = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i u_i; \quad (5)$$

в) виконанні умови

$$P_{B_0} \neq 0, \quad P_{B_0} P_{B_1} = 0, \quad P_{B_0} P_{B_1} P_{Q_0^*} = 0. \quad (6)$$

При цьому умови $P_{B_0} \neq 0$, $P_{B_0} P_{B_1} = 0$ забезпечують єдиність, а умова $P_{B_0} P_{B_1} P_{Q_0^*} = 0$ – існування розв'язків.

Доведення. Підставимо ряд (3) у крайову задачу (1) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε .

При ε^{-2} отримаємо однорідну крайову задачу:

$$\begin{cases} \dot{z}_{-2} = A(t)z_{-2}, \quad t \neq \tau_i; \\ \Delta z_{-2}|_{t=\tau_i} = S_i z_{-2}(\tau_i - 0); \\ l z_{-2} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

яка за припущенням теореми має r -параметричну систему ($r = n - n_1$, $n_1 = \text{rank } Q$) розв'язків виду $z_{-2}(t) = X_r(t)c_{-1}$, де c_{-1} – довільний r -вимірний вектор-стовпець із $\mathbb{R}^r$.

При ε^{-1} приходимо до крайової задачі:

$$\begin{cases} \dot{z}_{-1} = A(t)z_{-1} + A_1(t)z_{-2}, \quad t \neq \tau_i; \\ \Delta z_{-1}|_{t=\tau_i} = S_i z_{-1}(\tau_i - 0) + A_{1i} z_{-2}(\tau_i - 0); \\ l z_{-1} = l_1 z_{-2}. \end{cases} \quad (8)$$

Для цієї крайової задачі з врахуванням $B_0 = P_{Q_0^*} \left\{ l_1 X_r(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, \tau) A_1(\tau) X_r(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^p \bar{K}(\cdot, \tau_i) A_{1i} X_r(\tau_i - 0) \right\}$ отримаємо алгебраїчну відносно $c_{-1} \in \mathbb{R}^r$ систему

$$B_0 c_{-1} = 0.$$

При цьому крайова задача (8) має r -параметричну систему розв'язків виду

$$z_{-1}(t) = X_r(t)c_0 + G_1(t)c_{-1},$$

де c_0 – довільний r -вимірний вектор-стовпець із $\mathbb{R}^r$;

$G_1(t)c_{-1} = \bar{z}_{-1}(t) = \left(G \begin{bmatrix} A_1(\tau)z_{-2}(\tau, c_{-1}) \\ A_{1i}z_{-2}(\tau_i - 0) \end{bmatrix} \right)(t) + X(t)Q^+ l_1 z_{-2}(\cdot, c_{-1})$ – частинний розв'язок задачі (8);

вираз $\left(G \begin{bmatrix} * \\ * \end{bmatrix}\right)(t)$ (7) має вигляд:

$$\left(G \begin{bmatrix} A_1(\tau)z_{-2}(\tau, c_{-1}) \\ A_{1i}z_{-2}(\tau_i - 0) \end{bmatrix}\right)(t) \equiv \\ \left(\left[\int_a^b K(t, \tau) * d\tau - X(t)Q^+l \int_a^b K(\cdot, \tau) * d\tau, \sum_{i=1}^p \bar{K}(t, \tau_i) * - X(t)Q^+l \sum_{i=1}^p \bar{K}(\cdot, \tau_i) *\right]\right) \times \\ \times \begin{bmatrix} A_1(\tau)z_{-2}(\tau, c_{-1}) \\ A_{1i}z_{-2}(\tau_i - 0) \end{bmatrix}.$$

Після прирівнювання коефіцієнтів при ε^0 одержимо крайову задачу для визначення $z_0(t)$:

$$\begin{cases} z'_0 = A(t)z_0 + A_1(t)z_{-1}(t) + f(t), & t \neq \tau_i; \\ \Delta z_0|_{t=\tau_i} = S_i z_0(\tau_i - 0) + A_{1i}z_{-1}(\tau_i - 0) + a_i; \\ lz_0 = \alpha + l_1 z_{-1}, \end{cases} \quad (9)$$

де $z_1(t) = X_r(t)c_0 + G_1(t)c_{-1}$.

Із умови (необхідної і достатньої) розв'язності

$$P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - l \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^p \bar{K}(\cdot, \tau_i) a_i \right\} = 0, \quad d = m - n_1$$

для крайової задачі (9) відносно $c_0, c_1 \in \mathbb{R}^r$ маємо алгебраїчну систему

$$B_0 c_0 + B_1 c_{-1} = \varphi_0,$$

де φ_0 – r -вимірний довільний постійний вектор із $\mathbb{R}^r$ у силу довільності $f(t) \in C([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ і $\alpha \in \mathbb{R}^m$;

$$\varphi_0 = -P_{Q_d^*} \left\{ \alpha - l \int_a^b K(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^p \bar{K}(\cdot, \tau_i) a_i \right\},$$

$d \times r$ – вимірна матриця B_1 має вигляд:

$$B_1 = P_{Q_d^*} \left\{ l_1 G_1(\cdot) - l \int_a^b K(\cdot, \tau) A_1(\tau) G_1(\tau) d\tau - l \sum_{i=1}^p \bar{K}(\cdot, \tau_i) A_{1i} G_1(\tau_i - 0) \right\}. \quad (10)$$

Крайова задача (9) має r -параметричну систему розв'язків:

$$z_0(t) = X_r(t)c_1 + G_1(t)c_0 + G_2(t)c_{-1} + f_1(t),$$

де c – довільний r -вимірний вектор-стовпець із $\mathbb{R}^r$;

$$G_2(t)c_{-1} = \left(G \begin{bmatrix} A_1(\tau)G_1(\tau)c_{-1} \\ A_{1i}G_1(\tau_i - 0)c_{-1} \end{bmatrix}\right)(t) + X(t)Q^+l_1 G_1(\cdot)c_{-1};$$

$$f_1(t) = \left(G \begin{bmatrix} f(\tau) \\ a_i \end{bmatrix}\right)(t) + X(t)Q^+\alpha.$$

Продовжуючи цю процедуру, зауважимо, що для того, щоб ряд (3) був розв'язком крайової задачі (1) при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$ і $\alpha \in \mathbb{R}^m$ необхідно і достатньо, щоб була

розв'язна відносно $c_i \in \mathbb{R}^r (i = -1, 0, 1, \dots)$ така система алгебраїчних рівнянь при довільному $\varphi_0 \in \mathbb{R}^r$:

$$\begin{cases} B_0 c_{-1} = 0; \\ B_0 c_0 + B_1 c_{-1} = \varphi_0 \end{cases} \quad (11)$$

і далі

$$\begin{cases} B_0 c_1 + B_1 c_0 + B_2 c_{-1} = \varphi_1; \\ B_0 c_2 + B_1 c_1 + B_2 c_0 + B_3 c_{-1} = \varphi_2. \end{cases} \quad (12)$$

З іншого боку, підставляючи ряд (5) у (4), отримаємо, що для того, щоб ряд (5) був розв'язком системи (4), необхідно і достатньо, щоб коефіцієнти $u_i \in \mathbb{R}^r$ задовольняли системі, аналогічній (11), (12), але з $\varphi_i = 0, i = 1, 2, \dots$:

$$\begin{cases} B_0 u_{-1} = 0; \\ B_0 u_0 + B_1 u_{-1} = \varphi_0 \end{cases} \quad (13)$$

і далі

$$\begin{cases} B_0 u_1 + B_1 u_0 + B_2 u_{-1} = 0; \\ B_0 u_2 + B_1 u_1 + B_2 u_0 + B_3 u_{-1} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Для розв'язання системи алгебраїчних рівнянь (13) необхідно і достатньо виконати умову (6). Далі, для завершення доведення теореми підтвердимо, що в випадку розв'язності системи рівнянь (13), система рівнянь (14) також розв'язана, причому із умови розв'язності останнього рівняння (13) знаходимо коефіцієнт u_{-1} . Із умови розв'язності (що збігається з попередньою умовою) першого рівняння (14) знаходимо u_0 і т.д. Доведення цієї частини теореми повторює доведення відповідної теореми з [1], і тому не повторюється.

Висновки

Якщо умова $P_{B_0} = 0$, $P_{B_0} P_{Q_0^*} = 0$ не виконується, то для отримання достатніх умов існування розв'язків крайової задачі (1) при довільних неоднорідностях $f(t) \in C([a, b] \setminus \{\tau_i\}_I)$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ необхідно залучити $(d \times r)$ – вимірну матрицю B_1 (10). Розв'язок $z(t, \varepsilon)$ крайової задачі (1) шукається при цьому у вигляді збіжного при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*)$ ряду з $k \geq 2$.

Список літератури

1. Бойчук А.А. Конструктивные методы анализа краевых задач / А.А. Бойчук. –К.:Наук. думка, 1990. -96 с.
2. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А.М. Самойленко, Л.А. Перестюк. –К.:Вища шк., 1987. –287 с.
3. Овчар Р.Ф. Дослідження розв'язків слабозбурених крайових задач для систем з імпульсною дією / Р.Ф. Овчар // Науковий вісник НУБіП України. –2011. –Вип.166, ч.1. –С.243–248.

Предложена и доказана теорема для получения достаточных условий существования решений слабозмущенных линейных неоднородных краевых

задач с импульсным воздействием в случае, когда условие $P_{B_0} = 0$, $P_{B_0}P_{Q_0^*} = 0$ не выполняется.

Слабовозмущенная линейная неоднородная краевая задача, однородная краевая задача с импульсным воздействием, ортопроектор, ряд, псевдообратная матрица.

It is proposed and proved a theorem to obtain sufficient conditions for the existence of solutions of weakly perturbed linear inhomogeneous boundary value problem in the case where the condition $P_{B_0} = 0$, $P_{B_0}P_{Q_0^} = 0$ is not fulfilled.*

Weakly perturbed linear inhomogeneous boundary value problem, homogeneous boundary value problem with impulse action, orthogonal projector, series, pseudoinverse.

УДК 517.51

ТОПОЛОГІЧНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Т. Г. Криворот, асистент

Мовою альтернуючих послідовностей досліджено топологічну еквівалентність функцій. Доведено, що для кожної кусково-лінійної функції, яка має $n-1$ локальний екстремум, існує поліном степеня n , що є топологічно еквівалентний цій функції.

Топологічна еквівалентність, поліном, альтернуюча послідовність, кусково-лінійна функція.

Серед багатьох проблем, які стоять перед математиками, однією з важливих є дослідження поведінки функцій на різноманітних многовидах. Відомо, що багато процесів можна описати за допомогою гладких функцій [1], [4]. Наприклад, такі науки, як біологія, біофізика, фізика зараз суттєво використовують математичні знання відносно поведінки гладких функцій в околі критичних точок.

У теорії функцій важливим напрямком є проблема дослідження умов топологічної еквівалентності функцій. Цією проблемою займалися М. Морс, В. Каплан, В.В. Шарко, О.О. Пришляк, В.А. Арнольд, А.Т. Фоменко, С. Стоілов.

Мета досліджень – розгляд топологічної еквівалентності функцій зі скінченним числом екстремальних точок, наведення топологічної класифікації таких функцій з подальшим дослідженням умови їх топологічної еквівалентності.

Матеріали та методика досліджень. Для кожного класу еквівалентності вводиться невід'ємна функція, яка приймає в точках екстре-