Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2019, Vol. 10, No 1, 107-112
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

DOI: 10.31548/machenergy.2019.01.107-112

УДК 631.01:534.1

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕНЕРГЕТИЧНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ПРИ АНАЛІЗІ АВТОКОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

О. М. Черниш

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Кореспонденція автора: mechanics@nubip.edu.ua.

Історія статті: отримано – січень 2019, акцептовано – травень 2019.
Бібл. 11, рис. 3, табл. 0.

Анотація. Розглянуті умови зміни механічної енергії при визначенні характеристик автоколивального руху механічної системи. Проаналізовано енергетичні співвідношення у випадку автоколивань із м'яким і жорстким самозбуренням. Показані положення точок статичної і динамічної рівноваги автоколивальних систем на графічних залежностях зміни механічної енергії системи від амплітуди її коливального руху. Визначено характер стійкої і нестійкої статичної та динамічної рівноваги автоколивальних систем при необхідних початкових умовах. Показано, що режим стійких коливань з кінцевою амплітудою можливий тільки в автоколивальних системах з нелінійними властивостями. Запропоновано задачу прогнозування виникнення стійких автоколивальних рухів розв’язувати у лінійній постановці. Розглянуті стійкі автоколивання механічної системи із в’язкопружним елементом у середовищі із опором, які можна представити у вигляді вільних коливань нелінійної механічної системи.

Ключові слова: автоколивання, механічна енергія системи, статична і динамічна рівновага, стійкість коливань.

Постановка проблеми

Характер і особливості коливальних процесів у сільськогосподарському виробництві суттєво впливають на продуктивність, довговічність і надійність обладнання, а також якість переробки продукції [3-5, 11].

Автоколивання виникають в дисипативних динамічних системах з нелінійним зворотним зв’язком, в яких енергія від зовнішнього джерела перетворюється в енергію незатухаючих коливань із параметрами (амплітудою, частою, спектром коливань), що не залежать від початкових умов, а визначаються лише властивостями самої системи.

Тому дослідження і розрахунки параметрів автоколивальних процесів є невід’ємною частиною динамічних розрахунків.

Аналіз останніх досліджень

На сьогоднішній день механічним коливанням і їх практичному застосуванню присвячено багато наукових досліджень і публікацій [1-4, 6, 7, 9-11]. Але проблема вибору методик таких досліджень при розв'язанні наукових і практичних задач залишається актуальною.

Автоколивання суттєво відрізняються від змушених коливань тим, що останні викликані зовнішнім періодичним збуренням і відбуваються із частотою цього збурення, у той час коли параметри автоколивань визначається внутрішніми властивостями самої автоколивальної системи.

При роботі з автоколивальними системами як правило досліджують дві задачі. У випадку використання коливального руху у технологічному процесі, якщо коливання корисні, розв’язують першу задачу - підтримування коливань із заданими параметрами частоти, потужності і форми. У другому випадку, якщо коливання шкідливі, стоїть задача їх знешкодити. Але в обох випадках основними досліджуваними критеріями є фазові співвідношення та енергетичний баланс.

Мета досліджень

Метою досліджень є теоретичний аналіз зміни механічної енергії в автоколивальних процесах механічних систем, який допоможе не тільки усвідомити їх фізичну сутність, але і дасть можливість їх розрахунку і вибору оптимальних параметрів системи.

Результати досліджень

Для отримання енергетичних співвідношень в автоколивальному процесі спочатку розглянемо елементарне рівняння гармонійного коливального руху, коли узагальнена координата q і її похідна змінюються пропорційно синусу із аргументом, що лінійно залежить від часу:

$$q = A \cdot \sin(\omega t + \alpha), \qquad (1)$$

де A – амплітуда; ω – колова або циклічна частота; α – початкова фаза коливань.

При цьому амплітуду A будемо вважати повільно мінливою функцією у припущенні, що за один період коливань $T = \frac{2\pi}{\omega}$ вона мало змінюється у порівнянні з її середнім значенням. Таке припущення в межах періоду коливань дозволяє вважати амплітуду сталою величиною, що дорівнює її середньому значенню. Вважатимемо також, що зміна амплітуди коливань буде відбуватись лише при переході від одного періоду коливань до наступного.

Позначимо зміну механічної енергії ΔE гармонійних коливань за проміжок часу Δt, що дорівнює періоду T, як

$$\Delta E = E(t_2) - E(t_1), \tag{2}$$

де $\Delta t = t_2 - t_1 = T$.

Диференціальне рівняння коливального руху буде

$$m\ddot{q} + cq = Q(\dot{q}, t), \tag{3}$$

де m, c – відповідно інерційний і в'язкопружний коефіцієнти; Q – величина неконсервативної узагальненої сили.

Помножимо ліву і праву частину останнього рівняння на $\dot{q}dt$ [5] і отримаємо:

$$dE = Q\dot{q}dt, \tag{4}$$

Тоді зміна механічної енергії ΔE гармонійних коливань за період T буде дорівнювати:

$$\Delta E = \int_0^T Q\dot{q}dt, \tag{5}$$

де $Q\dot{q}dt = Qdq$.

Даний вираз показує, що величина зміни механічної енергії ΔE при гармонійному коливальному процесі за період T дорівнює роботі неконсервативних узагальнених сил.

Тобто, при додатній зміні механічної енергії ΔE гармонійного коливального процесу (при $\Delta E > 0$) амплітуда коливань буде зростати ($\Delta A > 0$), при від'ємній зміні механічної енергії ΔE (при $\Delta E < 0$) амплітуда коливань буде зменшуватись ($\Delta A < 0$), а при відсутності зміни (при $\Delta E = 0$) амплітуда залишиться постійною ($\Delta A = 0$).

При цьому вважатимемо, що за період коливань T величина зміни механічної енергії ΔE може мати дві складові

$$\Delta E = \Delta E_+ + \Delta E_-. \tag{6}$$

Індекс зі знаком мінус параметра ΔE означає, що енергія від коливальної системи відбирається, а зі знаком плюс – що енергія до системи надходить.

Так, наприклад, в ідеальному випадку вільних гармонійних коливань механічної системи без опору величина узагальненої сили відсутня ($Q = 0$) і зміна її енергії також відсутня: $\Delta E = 0$, а амплітуда коливань буде сталою величиною ($A = const$).

У випадку дії на вільні гармонійні коливання сили опору, що змінюється за лінійним законом із коефіцієнтом пропорційності b:

$$Q = -b\dot{q}, \tag{7}$$

величина зміни механічної енергії ΔE буде від'ємною величиною

$$\Delta E = -b\int_0^T \dot{q}^2 dt < 0, \tag{8}$$

або

$$\Delta E_- = 0{,}5\psi c A^2, \tag{9}$$

а коливання будуть згасальними ($\Delta A < 0$).

Як видно з (9), залежність енергії, що відбирається ΔE_-, від величини амплітуди A у цьому випадку буде квадратичною.

Проаналізуємо тепер з позицій зміни механічної енергії рух автоколивальної системи.

Припустимо, що коливання у такій системі вже відбуваються. Енергія цих коливань мала б зменшуватись внаслідок певних втрат на коливальний процес у самій системі. Але це зменшення постійно поповнюється за рахунок зовнішнього джерела, від якого певна частка енергії за кожний період (або взагалі періодично) подається механізмом зворотного зв'язку назад у коливальну систему.

Цілком зрозуміло, що стійкі коливання (тобто незатухаючі і не зростаючі за амплітудою) тут можливі тільки у тому випадку, коли кількість наданої від джерела енергії за період (або в одиницю часу) у точності відповідає втратам енергії за цей же час. Ця умова балансу енергії в автоколивальній системі і є умовою існування в ній незатухаючих коливань.

Також зрозуміло, що у випадку порушення балансу в розумінні, що поповнення втрат буде недостатнім, коливання будуть загасати. Якщо ж, навпаки, від джерела буде надходити надлишкова енергія, коливання будуть зростати.

Проаналізуємо тепер механізм самозбурення автоколивальної системи. Якщо на початку коливального руху в системі, тобто при найменших амплітудах, поповнення енергії перевищує її втрати, то система буде розгойдуватися, тобто амплітуда коливань буде зростати. Якби таке співвідношення між наданою і витраченою енергіями в системі збереглося і надалі, то амплітуда автоколивань зростала б необмежено.

Випадок, коли для саморозгойдування автоколивальної системи достатньо невеликого

початкового збурення, якого завжди можна досягти тими або іншими флуктуаціями, вважається м'яким самозбуренням. На відміну від цього випадок, коли для розгойдування системи потрібен певний початковий поштовх кінцевої величини, вважається жорстким самозбуренням.

Для отримання стійкого режиму автоколивань, необхідно, щоб, починаючи з деякого значення амплітуди, енергетичні втрати в системі зростали з подальшим збільшенням амплітуди швидше, ніж поповнення енергії, надане від джерела. При даній умові можливе досягнення вищезгаданого енергетичного балансу.

Це можна побачити на рис. 1 при м’якому самозбуренні автоколивальної системи.

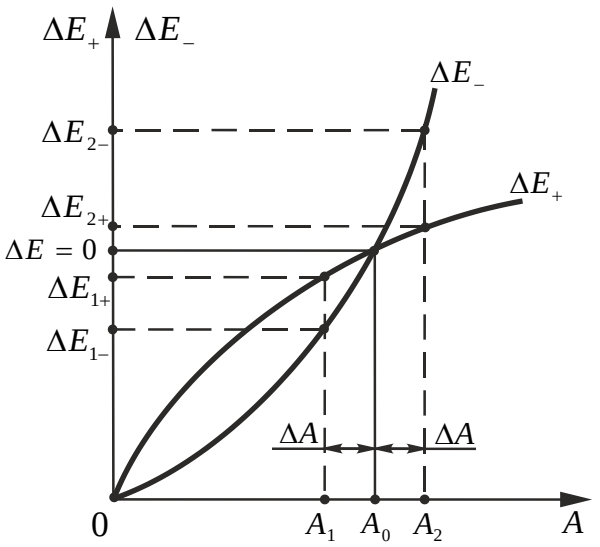

Рис. 1. Залежність ΔE_- і ΔE_+ від A при м’якому самозбуренні автоколивальної системи.

Fig. 1. Dependence ΔE_- and ΔE_+ from A to the soft simonburn auto oscillating system.

Тут енергія, що надається від джерела ΔE_+, і енергія, що витрачається коливальною системою ΔE_-, показані в залежності від амплітуди A. Точка перетину кривих ΔE_+ і ΔE_- відповідає балансу енергій, а абсциса цієї точки відповідає значенню стійкої амплітуди A_0 автоколивань системи.

Графічні залежності на рис. 2 демонструють поняття стійкості коливального руху. Рух буде стійким, якщо система, коливальний режим якої порушений яким-небудь зовнішнім впливом, повертається до першопочаткового режиму після припинення цього впливу. Навпаки, рух буде нестійким, якщо будь-який малий зовнішній вплив вибиває систему з коливального режиму, від якого система надалі відходить усе далі.

За аналогію між стійкістю рівноваги і стійкістю руху, треба розрізняти стійкість статичну і стійкість динамічну.

Для аналізу стійкості в умовах, що показані на рис. 1, візьмемо два значення амплітуди: A_1 і A_2, одна з яких менше, а друга більша значення A_0.

Тоді для першого випадку, коли $A_1 < A_0$: $\Delta E_{1+} > \Delta E_{1-}$ і амплітуда автоколивань буде зростати, поки не досягне значення A_0.

Для другого випадку, коли $A_2 > A_0$: $\Delta E_{2+} < \Delta E_{2-}$ і амплітуда автоколивань буде зменшуватись, поки знову не досягне значення A_0. Таким чином, точка перетину з абсцисою A_0, де $\Delta E = 0$, є точкою стійкої динамічної рівноваги.

При цьому початок координат діаграми 0, де криві ΔE_+ і ΔE_- також перетинаються, являється точкою статичної рівноваги. Однак статична рівновага тут буде нестійкою, у чому можна переконатись, розглянувши співвідношення при як завгодно малих, але не рівних нулю амплітудах.

Отже самозбурення автоколивальної системи є умовою її нестійкості у стані спокою.

Треба відзначити, що криві ΔE_+ і ΔE_- можуть перетинатись у декількох точках. Це видно з графічних залежностей при жорсткому самозбуренні автоколивальної системи (рис. 2).

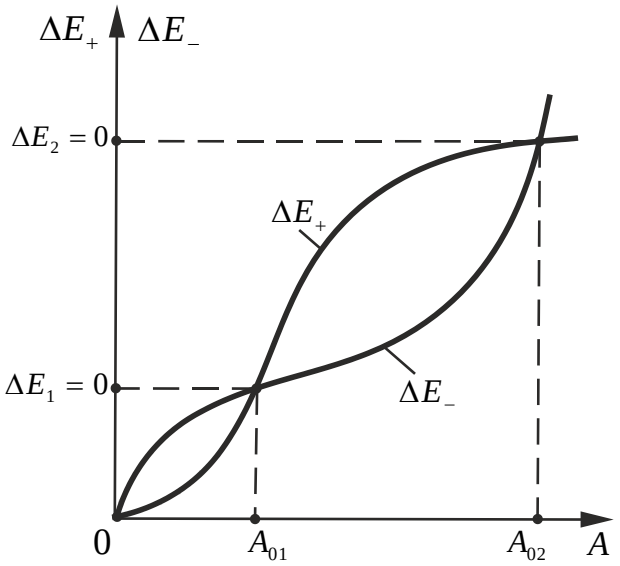

Рис. 2. Залежність ΔE_- і ΔE_+ від A при жорсткому самозбуренні автоколивальної системи.

Fig. 2. Dependence ΔE_- and ΔE_+ from A to the hard simonburn auto oscillating system.

Тут існує три точки перетину і відповідно – три стани рівноваги. Згідно із вищевикладеним легко

побачити, що два з них стійкі (абсциси 0 і A_{02}), а один – нестійкий (абсциса A_{01}).

Із того, що початок координат 0 є точкою стійкої рівноваги, можна зробити висновок, що система, яка надана самій собі, буде зберігати стан спокою і не буде самозбурюватись. Але це не говорить про те, що в такій системі неможливі стійкі автоколивання. Дійсно, у випадку, якщо у системі яким-небудь зовнішнім поштовхом, будуть збурені коливання з амплітудою, що перевищує A_{01}, то така система надалі вже самостійно досягне більшої амплітуди A_{02}.

Криві ΔE_+ і ΔE_- можуть перетинатись і у більшому числі точок. Усі точки стійкої рівноваги (за винятком початку координат) означають можливі стійкі режими автоколивальної системи, у яких вона може генерувати незатухаючі коливання.

На підставі цього можна зрозуміти, що у випадку коли б система була лінійною, то як втрати, так і приріст енергії зростали б за однаковим законом, пропорційно квадрату амплітуди. Тоді графічно ΔE_+ і ΔE_- були б представлені двома параболами, що проходили через початок координат, але більше ніде б не перетинались. При цьому одна з цих парабол лежала б вище іншої. Така система або не збурювалась би зовсім, або самозбурювалась м'яко із необмеженим зростанням амплітуди. Отже, режим стійких коливань з кінцевою амплітудою можливий тільки в нелінійній системі.

Таким чином, при дослідженні автоколивальних систем, треба розуміти, що у склад реальної автоколивальної системи, яка здатна генерувати коливання з усталеною амплітудою, обов'язково входить нелінійний елемент. Така нелінійність може бути властива як самій коливальній системі або її навантаженню, так і механізму зворотного зв'язку, або ланцюга зворотного зв'язку. Тобто, нелінійні властивості може мати кожна із складових частин механічної системи, що здійснює автоколивальний рух.

При цьому умови енергетичного балансу вказують на те, що стійкому режиму автоколивань передує область динамічної нестійкості, де $\Delta E_+ > \Delta E_-$, і з'явлення динамічної нестійкості, а відповідно, і можливість виникнення стійких автоколивальних режимів можна прогнозувати у лінійній постановці задачі.

Такі процеси характерні для механічних систем із в'язкопружними елементами при коливаннях із врахуванням сил опору середовища.

Розглянемо горизонтальні автоколивання в механічній системі із опором середовища, де елементу 1 масою m надається рух через в'язкопружний елемент 2 від рухомого із лінійною швидкістю υ_0 елементу 3 (рис. 3).

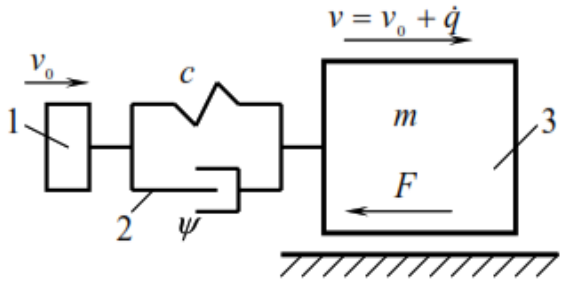

Рис. 3. Модель автоколивань в механічній системі із опором середовища.

Fig. 3. The model of oscillations in a mechanical system, the resistance of the medium

При цьому сила опору середовища, в якій рухається елемент 1, буде $F = F(\upsilon)$, а швидкість його руху

$$\upsilon = \upsilon_0 + \dot{q},$$

де q - деформація в'язкопружного елемента 2, яка визначає автоколивальний рух елемента 1.

Тоді для виразу (3) треба застосувати наступні параметри:

$$a = m; \qquad Q = -b\dot{q} - F(\upsilon_0 + \dot{q}).$$

Розкладемо функцію сили опору середовища $F(\upsilon_0 + \dot{q})$ у ряд Тейлора в границі υ_0 і отримаємо

$$F(\upsilon_0 + \dot{q}) \approx p_0 + p_1\dot{q} + p_2\dot{q}^2 + p_s\dot{q}^s, \quad (10)$$

де $p_0 = F(\upsilon_0)$;

$$p_s = \frac{1}{s!}\frac{\partial^s F}{\partial \upsilon^s}(\upsilon_0), \qquad (s = 1, 2, 3).$$

Із врахуванням (5), отримаємо

$$\Delta E = \int_0^{2\pi/k} \left(p_0 + (b + p_1)\dot{q} + p_2\dot{q}^2 + p_3\dot{q}^3\right)\dot{q}dt, \quad (11)$$

або

$$\Delta E = -(b + p_1)\pi A^2 k - 0{,}75 p_3 \pi A^4 k^3, \quad (12)$$

де $q = A \cdot \sin(\omega t + \alpha)$; $k \approx \sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Якщо при розкладенні функції сили опору середовища у ряд Тейлора обмежитись тільки двома складовими із лінійним наближенням, то у виразі (12) збережеться тільки перша складова, яка буде пропорційна квадрату амплітуди коливань.

При цьому для утворення автоколивального руху потрібно виникнення стану динамічної нестійкості, коли $\Delta E > 0$, тобто, у даному випадку

$$b + p_1 > 0.$$

Зрозуміло, що $b > 0$, тому

$$p_1 < -b < 0.$$

Так як лінійне наближення не дозволяє визначити амплітуду автоколивань A_a, то будемо вважати, що існує і третя складова виразу (11):

$$p_3 > 0.$$

Скориставшись умовою, що $\Delta E = 0$, отримаємо

$$A_a = 2\sqrt{\frac{-(b + p_1)\pi A^2 k}{3p_3 k^2}}. \qquad (12)$$

При цьому коефіцієнт пропорційності b буде

$$b = \frac{\psi c}{2\pi k},$$

де ψ - коефіцієнт розсіювання енергії.

Тоді при $A_1 < A_a$ буде $\Delta E > 0$, а при $A_1 > A_a$ - $\Delta E < 0$, що говорить про стійкість даного режиму автоколивань.

Отже, у даному випадку стійкий квазігармонійний автоколивальний рух можна представити, як вільні коливання нелінійної механічної системи, в якій від'ємна робота сил опору середовища компенсується за рахунок зовнішнього впливу.

Згідно із виразом (12) також можна отримати дійсне значення амплітуди A_a автоколивального руху і при умові $b + p_1 > 0$, $p_3 > 0$, але цей рух буде нестійким.

Висновки

1. Таким чином, при м'якому самозбуренні автоколивального руху при $A \to 0$ енергія, що підводиться до системи, більша, ніж та що відводиться ($\Delta E_+ > \Delta E_-$). Відповідно $\Delta E > 0$ і починається розгойдування системи. При $A = A_0$ буде $\Delta E = 0$, що відповідає стійким коливанням із сталою амплітудою A_0. Цей режим є стійким. Нестійкому стану системи у цьому випадку відповідає положення статичної рівноваги при $A = 0$.

2. При жорсткому збуренні положення статичної рівноваги системи при $A = 0$ стійке, стаціонарний режим із амплітудою A_{01} – нестійкий, а із амплітудою A_{02} –стійкий. Для збурення автоколивань тут потрібні деякі ненульові початкові умови, при яких $A > A_{01}$.

3. Перед стійким режимом автоколивань існує динамічна нестійкість, а тому задачу отримання динамічної нестійкості і виникнення стійких автоколивальних режимів можна прогнозувати у лінійній постановці.

4. Наведено випадок стійкого автоколивального руху механічної системи із в'язкопружним елементом у середовищі із опором, який можна представити у вигляді вільних коливань нелінійної механічної системи. Розглянутий аналіз зміни механічної енергії таких коливальних процесів дає можливість визначити їх оптимальні режими.

Список літератури

1. *Анісімов І. О.* Коливання та хвилі. Київ. Академічна преса. 2003. 280 с.
2. *Бидерман В. Л.* Теория механических колебаний. Москва. Высшая школа. 1980. 480 с.
3. *Булгаков В. М., Головач І. В.* Теорія вібраційного викопування коренеплодів. Механізація сільськогосподарського виробництва. Київ. НАУ. 2003. Т. XIV. С. 34-86.
4. *Вулфсон И. И.* Колебания машин с механизмами циклового действия. Ленинград. Машиностроение. 1990. 306 с.
5. *Коловский М. З.* Динамика машин. Ленинград. Машиностроение. 1989. 263 с.
6. *Кузнецов А .П., Кузнецов С. П., Рыскин Н. М.* Нелинейные колебания. Москва. Изд. физ.-мат. лит. 2002. 292 с.
7. *Мангус К.* Колебания. Введение в исследование колебательных систем. Москва. Мир. 1982. 304 с.
8. *Павловський М. А.* Теоретична механіка: підручник. Київ. Техніка. 2002. 512 с.
9. *Хуторова О. Г., Стенин Ю. М., Фахртдинов Р. Х.* Компьютерное моделирование физических процессов. Казань: КГУ. 2001. 53 с.
10. *Черниш О. М.* Енергетичні показники параметричного коливального процесу. Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені Петра Василенка. Харків. 2013. Вип. 139. С. 316-321.
11. *Черниш О. М., Яременко В. В.* Розрахункова модель коливального руху навісного очисника головок коренеплодів. Вібрації в техніці та технологіях. Вінниця. 2013. № 1 (69). С. 140-148.

References

1. *Anisimov I. A.* (2003). Oscillations and waves. Kiev. Academic press. 280.
2. *Biderman V. L.* (1980). Theory of mechanical vibrations. Moscow. High school. 480.
3. *Bulgakov V. M., Golovach I. V.* (2003). Theory of vibrating excavation of root crops. Mechanization of agricultural production. Kiev. NAU. T. XIV. 34-86.
4. *Wolfson I. S.* (1990). Vibrations of machines with cyclic mechanisms of action. Leningrad. Engineering. 306.
5. *Kolovsky M. O.* (1989). Dynamics of machines. Leningrad. Engineering. 263.
6. *Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Ryskin N. M.* (2002). Nonlinear oscillations. Moscow. Ed. Fiz.-Mat. lit. 292.

7. *Mangus K.* (1982). Oscillations. Introduction to the study of oscillatory systems. Moscow. World. 304.

8. *Pavlovsky N. A.* (2002). Theoretical mechanics: textbook. Kiev. Technique. 512.

9. *Khutorova E. G., Stenin Y. M., Fahrutdinov G. H.* (2001). Computer simulation of physical processes. Kazan: KSU. 53.

10. *Chernysh O. M.* (2013). Energy performance of the parametric oscillation process. Bulletin of Kharkov national technical University of agriculture named Peter Vasilenko. Kharkov. Vol. 139. 316-321.

11. *Chernysh O. M., Yaremenko V. V.* (2013). Computational model of the vibrational motion of the hinged cleaner of heads of root crops. Vibration in engineering and technology. Vinnitsa. No 1 (69). 140-148.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ ПРИ АНАЛИЗЕ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

О. Н. Черныш

Аннотация. Рассмотрены условия изменения механической энергии при определении характеристик автоколебательного движения механической системы. Проанализированы энергетические соотношения в случае автоколебаний с мягким и жестким самовозбуждением. Выяснено положение точек статического и динамического равновесия автоколебательных систем на графических зависимостях изменения механической энергии системы от амплитуды ее колебательного движения. Определен характер устойчивого или неустойчивого статического и динамического равновесия автоколебательных систем при необходимых начальных условиях. Показано, что режим устойчивых колебаний с конечной амплитудой возможен только в автоколебательных системах с нелинейными свойствами. Предложено задачу прогнозирования возникновения устойчивых автоколебательных движений решать в линейной постановке. Рассмотрены устойчивые автоколебания механической системы с вязкоупругим элементом в среде с сопротивлением, которые можно представить в виде свободных колебаний нелинейной механической системы.

Ключевые слова: автоколебания, механическая энергия системы, статическое и динамическое равновесие, устойчивость колебаний.

RESEARCH OF POWER CORRELATIONS IS AT ANALYSIS OF AUTOSWAYING SYSTEM

O. M. Chernysh

Abstract. The terms of change mechanical energy are considered at determination of descriptions of autoswaying motion of the mechanical system. Power correlations are analyzed in the case of self-excited oscillations with soft and rigid self-excitation. Position of points of static and dynamic equilibrium of the autoswaying systems is found out on graphic dependences of change of mechanical energy of the system on amplitude of its fluctuating motion. Character of steady or unsteady static and dynamic equilibrium of the autoswaying systems is certain at necessary initial conditions. It is rotined that the mode of steady vibrations with eventual amplitude is possible only in the autoswaying systems with nonlinear properties. The task of prognostication of origin of steady autoswaying motions to decide in the linear raising is offered. Steady self-excited oscillations of the mechanical system are considered with a viscidlyresilient element in an environment with resistance, which can be presented as free vibrations of the nonlinear mechanical system.

Key words: self-excited oscillations, mechanical energy of the system, static and dynamic equilibrium, stability of vibrations.

О. М. Черниш ORCID 0000-0002-4429-2020.