DOI: 10.31548/machenergy.2019.01.141-149

УДК 621.87

# МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ЗМІНИ ВИЛЬОТУ СТРІЛОВОЇ СИСТЕМИ КРАНА-МАНІПУЛЯТОРА З ВАНТАЖЕМ ПРИ СУМІЩЕНІ РУХІВ

## В. С. Ловейкін, Ю. О. Ромасевич, О. О. Сподоба

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

## Кореспонденція авторів: sp1309@ukr.net.

Історія статті: отримано – грудень 2018, акцептовано – травень 2019. Бібл. 17, рис. 13, табл. 0.

Анотація. З метою підвишення продуктивності та надійності крана-маніпулятора з гідроприводом згідно з нормативно-технічною документацією, яка регламентує безпечну експлуатацію багатоланкових кранів-маніпуляторів допускається суміщення рухів з одночасним переміщенням декількох ланок стрілової системи. В результаті в роботі розглянута методика побудови математичної моделі в площині зміни вильоту стрілової системи із вантажем кранаманіпулятора. Математична модель побудована із врахуванням трьох одночасних рухів, а саме, одночасного підйому стріли, розгортання рукояті та коливального руху захватного пристрою з вантажем. функції зміни кінематичних Розраховано та динамічних характеристик стрілової системи за одночасного переміщення її ланок. Побудова математичної моделі виконується із застосуванням рівнянь Лагранжа другого роду. При цьому за узагальнені координати моделі крана-маніпулятора прийнято, кутові координати положення ланок стрілової системи та кутове відхилення вантажу. А механічні характеристики приводу, представлені у вигляді квадратичних залежностей між діючими зусиллями та швидкостями переміщень штоків силових гідроциліндрів. Керування елементами приводу представлено у вигляді рівнянь витрати робочої рідини зі зміною площі прохідного перерізу розподільника гідравлічного золотникового за лінійним законом. В результаті отримано рівняння руху крана-маніпулятора з врахуванням впливу інерційної складової кожної ланки стрілової системи та впливу коливального руху вантажу на динамічні навантаження елементів металоконструкції та гідравлічного елементів приводу. Розроблена математична модель дозволяє теоретично визначити вплив одночасного переміщення стріли та рукояті на коливання вантажу, та вплив коливання вантажу на динамічні навантаження, які виникають в стріловій системі та елементах приводу крана-маніпулятора.

Ключові слова: математична модель, зміна вильоту, суміщення рухів, кран-маніпулятор, рівняння Лагранжа другого роду, динамічні навантаження, коливання вантажу.

#### Постановка проблеми

В процесі виконання технологічного процесу розвантажувально-завантажувальних операцій в елементах стрілової системи та елементах приводу крана-маніпулятора виникають динамічні навантаження, в наслідок нерівномірного обертання стрілової системи при рівномірному переміщені штоків гідроциліндрів. Динамічні навантаження залежать від кінематичних параметрів кранаманіпулятора та від характеру зміни швидкості переміщення ланок стрілової системи з вантажем. Згідно з нормативно-технічною документацією, яка регламентує роботу багатоланкових кранівманіпуляторів [1-2] допускається суміщення операцій одночасного переміщення декількох ланок стрілової системи крана-маніпулятора. При суміщенні операцій одночасного переміщення двох ланок стрілової системи з вантажем можна значно знизити динамічні навантаження і відповідно підвищити продуктивність, елементів стрілової надійність системи та гідравлічного обладнання крана-маніпулятора. Для визначення дійсних динамічних навантажень в конструкції крана-маніпулятора елементах при суміщені рухів ланок стрілової системи необхідно мати адекватні математичні моделі [3-8].

#### Аналіз останніх досліджень

Відомі [6-13] методи побудови математичної моделі крана-маніпулятора. В даних роботах стрілова крана-маніпулятора система представлена, як голономна механічна система, в якій центр ваги ланок металоконструкції співпадає з їх геометричними параметрами. В роботах [6-17] розглянуто побудову математичної моделі крана-маніпулятора, встановлено зв'язок між кінематичними залежностями привідної ланки крана-маніпулятора та вантажу. Проаналізовано вплив динамічних навантажень на елементи металоконструкції стрілової системи кранаманіпулятора. В роботах [10-11] розглянуто аналіз впливу суміщення рухів трьох ланок стрілової системи на динамічну завантаженість кранаманіпулятора. При досить великому обсязі розгляду проблеми динамічного аналізу суміщення одночасного руху ланок стрілової системи, розв'язок даної задачі для кранів-маніпуляторів з гідроприводом не розглянуто з врахуванням коливання вантажу на кінці стрілової системи.

#### Мета досліджень

Метою даної роботи є побудова математичної моделі динаміки зміни вильоту стрілової системи крана-маніпулятора при суміщенні операцій одночасного підйому стріли та розгортання рукояті з коливаннями вантажу на кінці стрілової системи та дослідження динаміки зміни вильоту стрілової системи крана-маніпулятора.

## Результати досліджень

При досліджені динаміки зміни вильоту стрілової системи крана-маніпулятора при суміщені рухів

(підйому стріли, розгортання рукояті та коливання вантажу) приймаємо наступні припущення:

- вважаємо, що усі ланки стрілової системи є абсолютно тверді тіла, окрім вантажу, який здійснює коливання на шарнірному підвісі в площині зміни вильоту;

- тертя в рухомих елементах і в'язке тертя рідини в трубопроводах не враховуємо;

- стисливість робочої рідини в елементах приводу не враховуємо.

Виходячи з наведених припущень стрілову систему маніпулятора в процесі зміни вильоту вантажу при суміщенні двох основних рухів та коливань вантажу представляємо як голономну механічну систему з трьома ступенями вільності. Кутові координати повороту стріли та рукояті відраховуємо від осі x, а кутову координату відхилення вантажу від осі y, (рис. 1.) За узагальнені координати системи приймаємо кутові координати: повороту стріли  $\alpha$ , повороту рукояті  $\beta$ , та відхилення від вертикалі шарнірного підвісу з вантажем  $\nu$ , (рис. 1).



**Рис. 1.** Динамічна модель стрілової системи крана-маніпулятора в процесі зміни вильоту при суміщені рухів стріли та рукояті з вантажем.

Fig. 1. Dynamic model stravo system of the crane in the process of luffing when the combined movements of the boom and stick with cargo.

На рис. 1 прийняті такі позначення:  $l_1$  - довжина стріли;  $l_2$  - довжина рукояті;  $l_3$  - довжина шарнірного підвісу;  $m_1, m_2, m_3$  - маса відповідно стріли, рукояті та вантажу;  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5$  - кути утворені геометричними параметрами елементів стрілової системи та приводних механізмів крана-маніпулятора;  $x_1, x_2, x_3$ - горизонтальні координати центрів мас стріли, рукояті та вантажу;  $y_1, y_2, y_3$ - вертикальні координати центрів мас відповідно стріли, рукояті та вантажу.

Виразимо координати центрів мас для стріли, рукояті та захватного пристрою з вантажем кранаманіпулятора через узагальнені координати:

$$x_1 = \frac{l_1}{2} Cos(\alpha);$$
  

$$y_1 = \frac{l_1}{2} Sin(\alpha);$$
(1)

$$\begin{cases} x_2 = l_1 \cdot Cos(\alpha) + \frac{l_2}{2} \cdot Cos(\beta); \\ y_2 = l_1 \cdot Sin(\alpha) + \frac{l_2}{2} \cdot Sin(\beta); \end{cases}$$
(2)

$$\begin{cases} x_3 = l_1 \cdot Cos(\alpha) + l_2 \cdot Cos(\beta) + l_3 \cdot Sin(\nu); \\ y_3 = l_1 \cdot Sin(\alpha) + l_2 \cdot Sin(\beta) - l_3 \cdot Cos(\nu). \end{cases}$$
(3)

Для складання рівнянь руху крана-маніпулятора в процесі зміни вильоту стрілової системи з вантажем за одночасного переміщення стріли, рукояті та вантажу використовуємо рівняння Лагранжа другого роду, які для системи, наведеної на (рис. 1), мають вигляд:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial \alpha} = Q_{\alpha} - \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial T}{\partial \beta} = Q_{\beta} - \frac{\partial \Pi}{\partial \beta}; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}} - \frac{\partial T}{\partial \nu} = Q_{\nu} - \frac{\partial \Pi}{\partial \nu}, \end{cases}$$
(4)

де t - час;  $T, \Pi$  - відповідно кінетична та потенціальна енергія стрілової системи кранаманіпулятора в процесі зміни вильоту вантажу;  $Q_{\alpha}, Q_{\beta}, Q_{\nu}$  - неконсервативні складові узагальнених сил системи, що відповідають координатам  $\alpha, \beta, \nu$ .

Виразимо кінетичну енергію стрілової системи крана-маніпулятора:

$$T = \frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) + \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot \left(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2\right)$$
(5)

де  $m_2$  - маса рукояті;  $m_3$  - маса вантажу;  $J_1$  - момент інерції стріли відносно осі її обертання, точки O(рис. 1);  $J_2$  - момент інерції рукояті відносно осі її обертання, точки E (рис. 1).

Запишемо вираз потенціальної енергії стрілової системи крана-маніпулятора в процесі зміни вильоту:

$$\Pi = (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) \cdot g, \tag{6}$$

де g - прискорення вільного падіння.

Візьмемо похідні від кінетичної енергії (5), що входять в систему рівнянь (4):

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = m_2 \left( \dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \alpha} + \dot{y}_2 \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \alpha} \right) + \\ + m_3 \left( \dot{x}_3 \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \alpha} + \dot{y}_3 \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial \alpha} \right); \\ \frac{\partial T}{\partial \beta} = m_2 \left( \dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \beta} + \dot{y}_2 \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \beta} \right) + \\ + m_3 \left( \dot{x}_3 \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \beta} + \dot{y}_3 \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial \beta} \right);$$

$$\begin{split} \frac{\partial T}{\partial \nu} &= m_2 \bigg( \dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \nu} + \dot{y}_2 \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \nu} \bigg) + \\ &+ m_3 \bigg( \dot{x}_3 \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \nu} + \dot{y}_3 \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial \nu} \bigg); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= J_1 \cdot \dot{\alpha} + m_2 \bigg( \dot{x}_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dot{y}_2 \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} \bigg) + \\ &+ m_3 \bigg( \dot{x}_3 \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \alpha} + \dot{y}_3 \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial \alpha} \bigg); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= J_2 \cdot \dot{\beta} + m_2 \bigg( \dot{x}_2 \frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \dot{y}_2 \frac{\partial y_2}{\partial \beta} \bigg) + \\ &+ m_3 \bigg( \dot{x}_3 \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \beta} + \dot{y}_3 \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial \beta} \bigg); \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}} &= m_2 \bigg( \dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \nu} + \dot{y}_2 \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \nu} \bigg) + \\ &+ m_3 \bigg( \dot{x}_3 \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \nu} + \dot{y}_3 \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial \beta} \bigg); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} &= J_1 \cdot \ddot{\alpha} + m_2 \bigg( \ddot{x}_2 \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \alpha} + \\ \ddot{y}_2 \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} + \dot{y}_2 \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \alpha} \bigg) + m_3 \times \\ &\times \bigg( \ddot{x}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} + \dot{x}_3 \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \alpha} + \ddot{y}_3 \frac{\partial y_3}{\partial \alpha} + \dot{y}_3 \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial \alpha} \bigg); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} &= J_2 \cdot \ddot{\beta} + m_2 \bigg( \ddot{x}_2 \frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \beta} + \\ &+ \ddot{y}_2 \frac{\partial y_2}{\partial \beta} + \dot{y}_2 \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \beta} \bigg) + m_3 \times \\ &\times \bigg( \ddot{x}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \beta} + \dot{x}_3 \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \beta} + \ddot{y}_3 \frac{\partial y_3}{\partial \beta} + \dot{y}_3 \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial \beta} \bigg); \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\nu}} &= m_2 \bigg( \ddot{x}_2 \frac{\partial x_2}{\partial \nu} + \dot{x}_2 \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial \nu} + \\ &+ \ddot{y}_2 \frac{\partial y_2}{\partial \nu} + \dot{y}_2 \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial \nu} \bigg) + m_3 \times \\ &\times \bigg( \ddot{x}_3 \frac{\partial x_3}{\partial \rho} + \dot{x}_3 \frac{\partial \dot{x}_3}{\partial \rho} + \ddot{y}_3 \frac{\partial y_3}{\partial \rho} + \dot{y}_3 \frac{\partial \dot{y}_3}{\partial \beta} \bigg); \end{aligned}$$

Візьмемо часткові похідні від потенціальної енергії (6):

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \left( m_1 \frac{\partial y_1}{\partial \alpha} + m_2 \frac{\partial y_2}{\partial \alpha} + m_3 \frac{\partial y_3}{\partial \alpha} \right) \cdot g;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \beta} = \left( m_2 \frac{\partial y_2}{\partial \beta} + m_3 \frac{\partial y_3}{\partial \beta} \right) \cdot g;$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \nu} = m_3 \frac{\partial y_3}{\partial \nu} \cdot g.$$
(8)

Визначимо неконсервативні складові узагальнених сил, що входять в систему рівнянь (4). Для цього складемо рівняння елементарних робіт:

$$Q_{\alpha}\delta\alpha + Q_{\beta}\delta\beta = F_{1}\delta U_{1} + F_{2}\delta U_{2};$$

$$\delta U_{1} = \frac{\partial U_{1}}{\partial \alpha}\delta\alpha;$$
(9)

7)

$$\begin{split} \delta U_2 &= \frac{\partial U_2}{\partial \alpha} \, \delta \alpha + \frac{\partial U_2}{\partial \beta} \, \delta \beta; \\ Q_\alpha \delta \alpha + Q_\beta \delta \beta &= F_1 \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} \, \delta \alpha + F_2 \frac{\partial U_2}{\partial \alpha} \, \delta \alpha + \\ &+ F_2 \frac{\partial U_2}{\partial \beta} \, \delta \beta; \\ Q_\alpha \delta \alpha &= \left( F_1 \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} + F_2 \frac{\partial U_2}{\partial \alpha} \right); \\ Q_\beta \delta \beta &= F_2 \cdot \delta U_2. \end{split}$$

В отриманому рівнянні виразимо варіацію переміщення штоків гідроциліндрів через варіацію узагальнених координат, в результаті чого отримаємо:

$$Q_{\alpha} = F_1 \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} + F_2 \frac{\partial U_2}{\partial \alpha};$$

$$Q_{\beta} = F_2 \frac{\partial U_2}{\partial \beta},$$
(10)

де *F*<sub>1</sub>- зусилля в гідроциліндрі підйому стріли; *F*<sub>2</sub>- зусилля в гідроциліндрі переміщення рукояті

Підставивши вирази (7...10) в систему рівнянь (4), отримаємо систему диференціальних рівнянь руху крана-маніпулятора в процесі зміни вильоту стрілової системи з вантажем при суміщені двох рухів:

$$\begin{aligned} J_{1} \cdot \ddot{\alpha} + m_{2} \cdot \left( \ddot{x}_{2} \cdot \frac{\partial x_{2}}{\partial \alpha} + \ddot{y}_{2} \cdot \frac{\partial y_{2}}{\partial \alpha} \right) + \\ + m_{3} \cdot \left( \ddot{x}_{3} \cdot \frac{\partial x_{3}}{\partial \alpha} + \ddot{y}_{3} \cdot \frac{\partial y_{3}}{\partial \alpha} \right) = \\ = F_{1} \cdot \frac{\partial U_{1}}{\partial \alpha} + F_{2} \cdot \frac{\partial U_{2}}{\partial \alpha} - \\ - \left( m_{1} \cdot \frac{\partial y_{1}}{\partial \alpha} + m_{2} \cdot \frac{\partial y_{2}}{\partial \alpha} + m_{3} \cdot \frac{\partial y_{3}}{\partial \alpha} \right) \cdot g; \\ J_{2} \cdot \ddot{\beta} + m_{2} \cdot \left( \ddot{x}_{2} \cdot \frac{\partial x_{2}}{\partial \beta} + \ddot{y}_{2} \cdot \frac{\partial y_{2}}{\partial \beta} \right) + \\ + m_{3} \cdot \left( \ddot{x}_{3} \cdot \frac{\partial x_{3}}{\partial \beta} + \ddot{y}_{3} \cdot \frac{\partial y_{3}}{\partial \beta} \right) = \\ = -F_{2} \cdot \frac{\partial U_{2}}{\partial \beta} - \left( m_{2} \cdot \frac{\partial y_{2}}{\partial \beta} + m_{3} \cdot \frac{\partial y_{3}}{\partial \beta} \right) \cdot g; \\ m_{3} \cdot \left( \ddot{x}_{3} \cdot \frac{\partial x_{3}}{\partial \nu} + \ddot{y}_{3} \cdot \frac{\partial y_{3}}{\partial \nu} \right) = -m_{3} \cdot \frac{\partial y_{3}}{\partial \nu} \cdot g. \end{aligned}$$

Знайдемо координати приводних механізмів, що входять в систему рівнянь (11).

$$AB = U_1.$$

$$U_1 = \sqrt{AO^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot Cos(\theta_2 + \alpha - \theta_3)}.$$

$$CF = U_2.$$

$$U_2 = \sqrt{CD^2 + DF^2 - 2 \cdot CD \cdot DF \cdot Cos(\angle CDF)}.$$
(13)

Для визначення  $\angle CDF$  спочатку розглянемо чотирьох ланковий механізм EDFG (рис. 2), і визначимо діагональ DG:

$$DG = \sqrt{EG^2 + DE^2 - 2 \cdot EG \cdot DE \cdot Cos(\angle DEG)}.$$
 (14)  
$$\angle DEG = \pi - (\theta_5 + \beta - \alpha).$$
 (15)

Після підстановки виразу (15) в залежність (14) отримаємо:

$$DG = \sqrt{EG^2 + DE^2 - 2 \cdot EG \cdot DE \cdot Cos(\theta_5 + \beta - \alpha)}.$$
(16)

Використовуючи теорему синусів, запишемо:

$$\frac{Sin\angle DEG}{DG} = \frac{Sin\angle EDG}{EG}$$
(17)

3 рівняння () знаходимо:  

$$\angle ADE = ArcSin\left(\frac{EG \cdot Sin(\theta_5 + \beta - \alpha)}{DG}\right)$$
(18)

Кут ∠*FDG* знайдемо з виразу:

$$FG^2 = DF + DG^2 - 2 \cdot DF \cdot DG \cdot Cos \angle FDG$$
 (19)  
Тоді:

$$\angle FDG = ArcCos\left(\frac{DG^2 + DF^2 - FG^2}{2 \cdot DF \cdot DG}\right)$$
(20)

Склавши вирази (18) і (20) знайдемо кут ∠EDF :

$$\angle EDF = \operatorname{ArcSin}\left(\frac{EG \cdot \operatorname{Sin}(\theta_5 + \beta - \alpha)}{DG}\right) + \operatorname{ArcCos}\left(\frac{DG^2 + DF^2 - FG^2}{2 \cdot DF \cdot DG}\right).$$

$$(21)$$

$$\angle CDF = \pi - \angle EDF - \theta_4 \tag{22}$$

Після підстановки виразу (22) в залежність (13) отримаємо:

$$U_2 = \sqrt{CD^2 + DF^2 + 2 \cdot CD \cdot DF \cdot Cos(\angle EDF - \theta_4)}.$$
 (23)



**Рис. 2.** Кінематична схема привода рукояті. **Fig. 2.** Кіnematic diagram of the drive handle.

Рушійні зусилля в силових гідроциліндрах визначаються з механічних характеристик, які представлені у вигляді квадратичних залежностей між діючими зусиллями та швидкостями переміщень штоків силових гідроциліндрів.

$$F_1 = P_{\mathcal{H}} \cdot A_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{A_1 \cdot \dot{U}_1}{Q_1}},$$

$$F_2 = P_{\mathcal{H}} \cdot A_2 \cdot \sqrt{1 - \frac{A_2 \cdot \dot{U}_2}{Q_2}},$$
(24)

де:  $P_{H}$ - тиск рідини в гідравлічній системі;  $A_{1}$ площа поршня гідроциліндра підйому стріли;  $A_{2}$ площа поршня гідроциліндра розгортання рукояті;  $\dot{U}_{1}$  швидкість переміщення штоку гідроциліндра підйому стріли;  $\dot{U}_{2}$  швидкість переміщення штоку гідроциліндра переміщення рукояті.

Витрата робочої рідини яка протікає через гідророзподільник для надання силовим гідроциліндрам потрібного режиму пуску та подальшого переміщення стрілової системи визначається наступними залежностями, відповідно для гідроциліндра підйому стріли та гідроциліндра переміщення рукояті:

$$Q_{1} = \mu \cdot f_{1} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \Delta P_{1}}{\rho}};$$

$$Q_{2} = \mu \cdot f_{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot \Delta P_{2}}{\rho}},$$
(25)

де:  $\Delta P_1$ - перепад тиску в гідроциліндрі підйому стріли;  $\Delta P_2$ - перепад тиску в гідроциліндрі переміщення рукояті;  $\mu$  - коефіцієнт витрати робочої рідини, який залежить від конструкції дроселя та визначається експериментально (для кромкових гідро розподільників  $\mu = 0.65 - 0.7$ );  $f_1$ - площа прохідного перерізу гідравлічного розподільника гідроциліндра підйому стріли;  $f_2$ - площа прохідного перерізу гідравлічного розподільника гідроциліндра переміщення рукояті;  $\rho$ - питома вага рідини.

Для розрахунку динаміки зміни вильоту стрілової системи крана-маніпулятора використаємо такі вихідні параметри:  $m_1 = 350 \kappa r$ ,  $m_2 = 220 \kappa r$ ,  $m_3 = 600 \kappa c, l_1 = 4 M, l_2 = 2 M, l_3 = 0.8 M, AO = 1.6 M,$ OB = 0,5M, CD = 1, 6M, $l_1 = 4M, DF = 0,425M,$ FG = 0,425M,EG = 0,425M,DE = 0,255M $P_{\rm H} = 20 \cdot 10^6 \Pi a, \qquad A_1 = 0,012265 {\rm M}^2, \ A_2 = 0,00915 {\rm M}^2,$  $\theta_2 = 1,378 pad, \qquad \theta_3 = 0,384 pad,$  $\theta_1 = 0,192 pa\partial$ ,  $\theta_4 = 0,157 pad, \ \theta_5 = 1,57 pad, \ \rho = 850 \kappa r / m^3.$ 

Початкові умови руху маніпулятора:  $\alpha[0]=0$ ,  $\dot{\alpha}[0]=0, \ \beta[0]=-1, \ \dot{\beta}[0]=0, \ \nu[0]=0, \ \dot{\nu}[0]=0.$ 

Підставивши в систему рівнянь (11) вихідні параметри та початкові умови і розв'язавши її, визначено та побудовано графічні залежності (рис. 3– рис. 13). При розв'язку системи рівнянь було прийнято такі припущення: час відкривання золотникового гідророзподільника становить 0,1 с;

площа прохідного перерізу гідророзподільника змінюється за лінійним законом.

Із системи рівнянь (11) та виразів (12-23)визначено переміщення штоків силових гідроциліндрів, відповідно підйому стріли (рис. 3) та переміщення рукояті (рис. 4). В залежності від переміщення штоків приводних гідроциліндрів визначено кутове переміщення підйому стріли (рис. 5) та кутове переміщення рукояті (рис. 6).

Аналізуючи наведені графічні залежності переміщення елементів приводу та ланок стрілової системи (рис. 3 – рис. 6), можна визначити у відповідності до геометричних та кінематичних характеристик функціональну залежність кутового переміщення ланок стрілової системи у відповідності до лінійного переміщення штоків силових гідроциліндрів.



**Рис. 3.** Графік переміщення штоку гідроциліндра підйому стріли.

**Fig. 3.** Schedule moving of a rod of a hydraulic cylinder of a boom.



**Рис. 4.** Графік переміщення штоку гідроциліндра рукояті.

**Fig. 4.** Schedule moving of a rod of the hydraulic cylinder of the handle.



**Рис. 5.** Графік кутового переміщення стріли. **Fig. 5.** Graph of angular displacement of the boom.



**Рис. 6.** Графік кутового переміщення рукояті. **Fig. 6.** Graph of angular displacement of the handle

Розв'язавши систему рівнянь з вихідними параметрами та початковими умовами побудовано графічні залежності розгону та виходу на усталений рух штоків приводних гідроциліндрів (рис. 7 – рис. 8) та відповідно елементів стрілової системи (рис. 9 – рис. 10) за умови одночасного переміщення стріли, рукояті та вантажу. Аналізуючи графічні залежності швидкостей штоків силових гідроциліндрів можна зазначити, що розгін штоку гідроциліндра підйому стріли відбувається протягом 0,8 с, та на протязі динамічними усталеного руху супроводжується навантаженнями коливального характеру. Максимальне значення швидкості усталеного руху становить 0,1 м/с. Для штоку гідроциліндра привода рукояті вихід на усталений рух відбувається протягом 1.5 с, при цьому швидкість переміщення становить супроводжується 0.08 м/с. та линамічними навантаженнями коливального характеру.





**Fig. 7.** Graph of the velocity of the cylinder rod of the boom.



**Рис. 8.** Графік швидкості переміщення штоку гідроциліндра рукояті.

Fig. 8. Graph of the velocity of the cylinder rod of the handle.

Вихід на усталений рух стріли та рукояті (рис. 9рис. 10) відбуваються у відповідності до виходу на усталений рух штоків силових гідроциліндрів, в подальшому супроводжується динамічними навантаженнями. Кутова швидкість переміщення стріли становить на початку усталеного руху 0,2 рад/с, при подальшому переміщені має незначний зріст. Кутова швидкість розгортання рукояті на початку усталеного руху становить 0,58 рад/с, при подальшому переміщені має незначний спад. Поступове зростання швидкості стріли та поступове зниження швидкості рукояті при усталеному русі викликане кінематичними параметрами кранаманіпулятора та відповідно коливальними рухом вантажу (рис. 13).



**Рис. 9.** Графік кутової швидкості стріли. **Fig. 9.** Graph the angular velocity of the boom



**Рис. 10.** Графік кутової швидкості рукояті. **Fig. 10.** Graph the angular velocity of the handle.



**Рис. 11.** Графік зміни тиску в гідроциліндрі підйому стріли.

Fig. 11. Graph of the pressure in the lift cylinder boom.

Із системи рівнянь (11) та виразів (24-25) визначено функціональну залежність зміни тиску в робочих камерах гідроциліндрів процесі в одночасного переміщення стріли, рукояті та вантажу (рис. 11 – рис. 12). Як видно з графічних залежностей тиск на початку руху дорівнює 2·10<sup>7</sup> Па, що відповідає тиску робочої рідини в гідросистемі. При подальшому переміщені ланок стрілової системи і виходу її на усталений рух тиск в гідроциліндрі підйому стріли та розгортання рукояті становить  $5 \cdot 10^6 \Pi a$ . приблизно та супроводжується динамічними навантаженнями. Цe спричинено інерційною складовою ланок стрілової системи та відповідно виникнення в ній та елементах приводу динамічних навантажень спричинених коливальним рухом вантажу (рис. 13).



**Рис. 12.** Графік зміни тиску в гідроциліндрі приводу рукояті.

**Fig. 12.** Graph of the pressure in the hydraulic cylinder of the actuator handle.



**Fig. 13.** Graph of fluctuation of the load.

Враховуючи інерційні складові ланок стрілової системи та коливання тиску робочої рідини в силових гідроциліндрах, побудовано залежність коливання вантажу на кінці стрілової системи при одночасному переміщені стріли та рукояті (рис. 13). Із наведеної графічної залежності можна побачити характерну відповідність відхилення захвату з вантажем від вертикалі (рис. 1) яка збігаються по часу із динамічними навантаженнями в елементах приводу (ри. 7 – рис. 8), ланках стрілової системи (ри. 9 – рис. 10) та коливанням тиску робочої рідини (рис. 11 рис. 12). Виходячи з початкових умов на початку руху відсутнє. При відхилення вантажу виході на усталений рух стріли (рис. 9) відхилення вантажу становить -0,11pad, рукояті (рис. 10) відхилення становить 0,14 рад. Максимальне відхилення вантажу становить 0,18 рад та має затухаючий характер.

## Висновки

1. В результаті проведеного дослідження побудовано математичну модель динаміки зміни вильоту в площині підйому стрілової системи з вантажем крана-маніпулятора, за умови суміщення рухів стрілової системи.

2. Проведено динамічний аналіз механізму підйому стріли та одночасного переміщення рукояті з коливанням вантажу. Отримано графічні залежності динамічних навантажень в стріловій системі та елементах приводу крана-маніпулятора.

3. Запропонована математична модель дає змогу визначити дійсні динамічні навантаження в елементах конструкції маніпулятора та приводних механізмах. Отримані результати можна використати у подальшому практичному використанні.

#### Список літератури

1. Руководство эксплуатации по крана манипулятора ОМТЛ-70.00.000РЭ и его модификаций: веб-сайт URL: http://servicepalfinger.ru/images/OMTL-70.pdf (Дата звернення 09.06.2019)

2. ПБ-10-257-98 Правила устройства и безопасной эксплуатации грузоподъемных крановманипуляторов.[Утвержден 31.12.98]. Гостехнадзор. Москва, 1998. 172 с. (Информация и документация)

3. Ковальский В. Ф. Математическое моделирование динамики манипуляционной системы мобильной транспортно-технологической машины с учетом упругости звеньев. Известия МАМИ. 2016. №3. С. 9-15.

4. Мильто А. А. Динамический и прочностной анализ гидравлических крано-манипуляторных установок мобильных транспортно-технологических машин: дисс. ... канд. техн. наук: Москва. МАДГТУ (МАДИ), 2016. 172 с.

5. Бакай Б. Я. Попереднє представлення рівняння динаміки маніпулятора методом Лагранжа-Ейлера. Науковий вісник НЛТУ України: Львів. Видавництво НЛТУ України, 2011. Вип. 21.18. С. 322–327.

6. Ловейкін В. С., Міщук Д. О. Математична модель динаміки зміни вильоту крана маніпулятора з жорсткими ланками. Техніка будівництва. Київ. КНУБА, 2006. Вип. №19. С. 26-29.

7. Ловейкін В. С. Міщук Д. О. Математичне моделювання зміни вильоту вантажу маніпулятором з гідроприводом. Гірничі, будівельні, дорожні і меліоративні машини. Київ. 2012. С. 9-15.

8. Лагерев И. А. Моделирование рабочих процессов манипуляционных систем мобильных многоцелевых транспортно-технологических машин и комплексов. Брянск. РИО БГУ. 2016. 371 с.

9. Ловейкін В. С. Мищук Д. О. Експериментальне дослідження динаміки руху штока гідроциліндра підйому шарнірнозчленованої стрілової системи крана-маніпулятора з гідроприводом. Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. 2011. № 78. С. 28-34.

3. К., Бартенев Н. М.. 10. Емтыль Татаренко А. П. О влияние податливости рабочей жидкости элементов гидропривода на И динамическую нагруженность гидроманипулятора при совмещении движений звеньев. Труды ФОРА (Физического Общества Республики Адыгея) Майкоп: Изд-во АГУ, 2000. № 6. С. 83-87.

11. Емтыль З. К., Бартенев И. М, Драплюк М. В., Попиков П. И., Татаренко А. П., Бухтояров Л. Д. Гидроманипулятори и лесотехническое оборудование: монография. Москва. ФЛИНТА: Наука, 2011. 408 с.

12. Добрачев А.А., Раевская Л. Т., Швец А. В. Кинематические схемы, структуры и расчет параметров лесопромышленных манипуляторных машин: монография. Екатеринбург: Урал. гос. лесотехн. ун-т, 2014. 128 с.

13. *Міщук Д. О.* Дослідження динамічної моделі гідравлічного циліндра об'ємного гідроприводу. Гірничі, будівельні, дорожні та меліоративні машини. 2016. № 87. С. 74-81.

14. *Тертычный-Даури В. Ю.* Динамика робототехнических систем. Санкт-Петербург. НИУ ИТМО, 2012. 128 с.

15. Заболотный К. С. Сирченко А. А., Жупиев А. Л. Использование прямой задачи динамики для расчета манипулятора тоннельного укладчика. Вібрації в техніці та технологіях. Національний гірничий університет. 2016. №2 (82). С. 22-27.

16. Dobrachev A. A., Raevskaya L. T., Shvets A. V. Simulating the dynamic reaction of manipulator supports. Russian Engineering Research. 2010. Vol. 30, No 1. P. 11-16.

17. Ловейкин В. С., Мищук Д. А. Синтез оптимального динамического режима движения стрелы манипулятора, установленного на упругом основании. НАУКА и ТЕХНИКА. 2019. Том 18. № 1. С. 55-61.

#### References

1. Operation manual of the crane of the OMTL-70.00.000RE manipulator and its modifications: website http://service-palfinger.ru/images/OMTL-70.pdf (Date beast 09.06.2019).

2. PB-10-257-98 (1998). Rules for the Construction and Safe Operation of loader crane [Approved 12.31.98]. Gostekhnadzor. (Information and documentation). Moscow.

3. *Kovalsky V. F.* (2016). Mathematical modeling of the dynamics of the handling system of a mobile transport-technological machine, taking into account the elasticity of the links. MAMI,  $N_{23}$ , 9-15.

4. *Milto, A. A.* (2016). Dynamic and strength analysis of hydraulic crane-manipulators of mobile transport-technological machines (Unpublished candidate thesis). Moscow.

5. *Bakai B. Ya.* (2011). The previous presentation of the dynamic of the manipulator by the Lagrange-Euler method. Vidavnitstvo NLTU Ukraine, 322 - 327. Lviv.

6. Loveykin V. S., Mishchuk D. O. (2006). Mathematical model of dynamics of change of departure of a crane of a manipulator with rigid links, Journal of Construction Engineering. KNUBA, No19, 26-29. Kyiv.

7. Loveykin V. S., Mishchuk D. O. (2012). Mathematical modeling of changes in cargo departure with a hydraulic drive. Girnichi, budivelni, dorozhni i meliorativni mashini, 9-15. Kyiv.

8. *Lagerev I. A.* (2016). Simulation of workflows of handling systems of mobile multi-purpose transport and technological machines and complexes. Monograph. RIO BGU, Bryansk

9. Loveykin V. S., Mishchuk D. O. (2011). Experimental study of dynamics of the stock of a hydraulic cylinder for lifting a hinged articulated boom system of a crane-manipulator with a hydraulic drive. Girnichi, budivelni, dorozhni i meliorativni mashini,  $N_{\rm P}.78$ , 28-34, Kyiv.

10. Emtyl Z. K., Bartenev N. M., Tatarenko A .P. (2000). About the influence of the flexibility of the working fluid and the elements of the hydraulic drive on the dynamic loading of the hydraulic manipulator when combining the movements of the links. Physical Society of the Republic of Adygea, Ne6, 83–87, Maikop.

11. *Emtyl Z. K., Bartenev I. M., Draplyuk M. V., Popikov P. I., Tatarenko A. P., Bukhtoyarov L. D.* (2011). Hydraulic manipulator and forestry equipment: monograph, FLINTA, Nauka, Moscow.

12. Dobrachev A. A., Raevskaya L. T., Shvets A. V. (2014). Kinematic schemes, structures and calculation of parameters of timber processing manipulator machines: monograph, Ural state forestry University Yekaterinburg.

13. *Mishuk, D. O.* (2016). Research of a dynamic model of a hydraulic cylinder of a volumetric hydraulic drive. Girnichi, budivelni, dorozhni i meliorativni mashini, N 87, 74-81, Kyiv.

14. *Tertychny-Dauri V. Yu.* (2012). The dynamics of robotic systems. NRU ITMO.

15. Zabolotny, K. S., Sirchenko, A. A., Zhupiev, A. L. (2016). Use of the direct problem of dynamics for calculating the manipulator of a tunnel stacker. Vibration in technology and technology. National Mining University, N (82), 22-27.

16. Dobrachev A. A., Raevskaya L. T., Shvets A. V. (2010). Simulating the dynamic reaction of manipulator supports. Russian Engineering Research,  $N_{\rm P1}$ , 11-16.

17. Loveykin V. S., Mishchuk D. A. (2019). Synthesis of the optimal dynamic mode of movement of the boom of the manipulator mounted on an elastic base. SCIENCE and TECHNOLOGY, Volume 18  $N_{21}$ , 55-61.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИКИ ИЗМЕНЕНИЯ ВЫЛЕТА СТРЕЛОВОЙ СИСЕТМЫ КРАНА-МАНИПУЛЯТОРА С ГРУЗОМ ПРИ СОВМЕЩЕНИИ ДВИЖЕНИЙ

В. С. Ловейкин, Ю. А. Ромасевич, А. А. Сподоба Аннотация. С целью повышения производительности и надежности кранаманипулятора с гидроприводом согласно нормативнотехнической документацией, регламентирующей

безопасную эксплуатацию многозвенных крановманипуляторов, допускается совмещение движений с одновременным перемещением нескольких звеньев стреловой системы. В результате в работе рассмотрена методика построения математической модели в плоскости изменения вылета стреловой системы крана-манипулятора с грузом. Математическая модель построена с учетом трех одновременных движений, а именно, одновременного подъема стрелы, развертывание рукояти колебательного движения захватного устройства с грузом. Рассчитано функции изменения кинематических и динамических характеристик стреловой системы при одновременном перемещении ее звеньев. Построение математической модели выполняется с применением уравнений Лагранжа второго рода. При этом за обобщенные координаты угловые молели крана-манипулятора принято, координаты положения звеньев стреловой системы и угловое отклонение груза. А механические характеристики привода, представленные в виде квадратичных зависимостей между действующими усилиями и скоростями перемещений штоков силовых гидроцилиндров. Управление элементами привода представлено в виде уравнений расхода рабочей жидкости с изменением площади проходного сечения золотникового гидравлического распределителя по линейному закону. В результате получено уравнение движения крана-манипулятора с учетом влияния инерционной составляющей каждого звена стреловой системы и влияния колебательного движения груза на динамические нагрузки элементов металлоконструкции и элементов гидравлического привода. Разработанная математическая модель теоретически определить позволяет влияние одновременного перемещения стрелы и рукояти на колебания груза, и влияние колебания груза на динамические нагрузки, возникающие в стреловой системе и элементах привода крана-манипулятора.

Ключевые слова: математическая модель, изменение вылета, совмещение движений, кранманипулятор, уравнения Лагранжа второго рода, динамические нагрузки, колебания груза.

## MATHEMATICAL MODEL OF DYNAMICS VARYING THE RADIUS JIB SYSTEM LOADER CRANE WITH LOAD AT ADJUSTMENT MOVEMENT

#### V. S. Loveikin, Yu. O. Romasevich, O. O. Spodoba

Abstract. In order to improve the performance and reliability of the hydraulic loader crane according to the regulatory and technical documentation governing the safe operation of multi-link loader crane, it is allowed to combine movements with simultaneous movement of several links of the jib system. As a result, the paper considers the method of constructing a mathematical model in the plane of change of departure of the jib system of a link loader crane with a load. The functions of changing the kinematic and dynamic characteristics of the jib system while simultaneously moving its links are calculated. The construction of a mathematical model is performed using the Lagrange equations of the second kind. In this case, for the generalized coordinates of the model of a loader crane, the angular coordinates of the position of the links of the jib system and the angular deviation of the load. And the mechanical characteristics of the drive, presented in the form of quadratic dependencies between the acting forces and the speeds of movement of the hydraulic-cylinder rod. The control of the drive elements is represented as equations of the working fluid flow rate with a change in the flow area of the spool hydraulic distributor according to a linear law. As a result, the equation of motion of the loader crane was obtained, taking into account the influence of the inertial component of each link of the jib system and the influence of the oscillatory movement of the load on the dynamic loads of the metal construction and the hydraulic drive elements. The developed mathematical model makes it possible to theoretically determine the effect of the simultaneous movement of the jib and arm on the oscillations of the load, and the effect of the oscillation of the load on the dynamic loads arising in the jib system and elements of the loader crane drive.

**Key words:** mathematical model, varying the radius, combination of movements, loader crane, Lagrange equations of the second kind, dynamic loads, load oscillations.

В. С. Ловейкін ORCID 0000-0003-4259-3900. Ю. О. Ромасевич ORCID 0000-0001-5069-5929. О. О. Сподоба ORCID 0000-0001-8217-866X.