Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2019, Vol. 10, No 4, 121-127
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

DOI: 10.31548/machenergy.2019.04.121-127

УДК 534.1.004.14:62-868

АНАЛІЗ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ ЕЛЕМЕНТІВ (КАНАТІВ) ВАНТАЖОПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ КРАНІВ: АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД, ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНА МОДЕЛЬ

Ю. В. Човнюк, І. М. Сівак

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Стаття з спеціальності: 133 – галузеве машинобудування.

Кореспонденція авторів: ychovnyuk@ukr.net, sivakim@ukr.net.

Історія статті: отримано – серпень 2019, акцептовано – листопад 2019.
Бібл. 20, рис. 0, табл. 1.

Анотація. Обґрунтований метод та дискретно – континуальна модель для аналізу вимушених коливань пружних елементів (канатів) вантажопідйомних механізмів кранів при довільному й гармонічному від часу законів зміни зовнішніх сил. Запропонований критерій якості руху канатів вантажопідйомного механізму крана, який при його реалізації дозволяє встановлювати такі режими руху пружних елементів, котрі мінімізують напруження у останніх. Реалізація цілі даного дослідження дозволяє встановити коефіцієнти динамічності у різних перерізах канатів та вказати методи / напрямки, які ведуть до їх мінімізації на перехідних ділянках функціонування вказаних механізмів підйому вантажу кранів.

Розв'язок відповідних диференціальних рівнянь, які є математичною моделлю задачі, здійснений шляхом розкладу у ряд за власними функціями шуканих розв'язків вказаних рівнянь (у частинних похідних по просторовій й часовій координатам). Для зовнішнього навантаження обраний узагальнений закон зміни у просторі й часі. Знайдені умови резонансу / антирезонансу у випадку гармонічної збуджуючої зовнішньої сили для різних кінцевих (граничних умов закріплення пружного елементу (канату).

Ключові слова: аналіз, вимушені коливання, пружність, канати, вантажопідйомні механізми, крани, аналітичний підхід, дискретно-континуальна модель.

Постановка проблеми

Для реалізації аналітичного підходу при аналізі вимушених коливань пружних елементів (канатів) вантажопідйомних механізмів кранів (у межах дискретно-континуальних моделей) можна використати два основних способи розв'язку початково-граничної задачі. Все залежить від характеру вимушених сил, котрі діють на систему з розподіленими характерами (тобто на канат). Якщо вимушена зовнішня сила є гармонічним збудженням, тоді зручно знайти стаціонарний розв'язок задачі, який відповідає вимушеним коливанням (після закінчення перехідного періоду), що відбуваються з частотою збудження методом розділення змінних (методом Фур'є).

Якщо зовнішня вимушена сила є довільно заданим у часі збудженням, слід здійснювати розклад шуканого розв'язку у ряд по власним просторовим (і часовим) функціям, котрі відповідають власним (вільним) коливанням пружних елементів (канатів) для відповідних граничних умов їх закріплення.

Останній підхід особливо необхідний для аналізу перехідних процесів (пуску, гальмування тощо) у вантажопідйомних механізмах кранів й визначення коефіцієнтів динамічності у різних перерізах канатів з метою запобігання розривів та руйнувань останніх, а також задля підвищення надійності й довго - довічності роботи, як самих пружних елементів, так і механізмів підйому вантажу кранів у цілому.

На думку авторів даної роботи, існуючі методи аналізу вимушених коливань вантажопідйомних механізмів кранів вимагають подальшого уточнення й вдосконалення, особливо у зв'язку з метою оптимізації їх режимів руху, за котрих будуть у перехідних ділянках функціонування вказаних вище механізмів мінімізовані коефіцієнти динамічності канатів.

Аналіз останніх досліджень

Основні підходи та методи аналізу вимушених коливань у системах з розподіленими параметрами викладені у роботах [1-9]. Автори вказаних досліджень у основному використовують знані моделі дискретно-континуальних систем, а саме – моделі гнучких деформованих (у повздовжньому напрямку, тобто вздовж їх прямолінійної вісі) стрижнів.

Проте застосування подібних моделей та підходів до пружних елементів (канатів) вантажопідйомних

механізмів кранів практично відсутнє у науковій літературі відповідного напрямку дослідження.

Слід зазначити, що результати робіт [4, 8, 9] будуть частково використані у даному дослідженні.

Мета досліджень

Мета роботи полягає у обґрунтуванні дискретно-континуальної моделі та аналітичного підходу до аналізу вимушених коливань пружних елементів (канатів) вантажопідйомних механізмів кранів за різних граничних умов закріплення вказаних елементів (канатів) для різних за характером вимушених сил. Реалізація цілі даного дослідження дозволяє встановити коефіцієнти динамічності у різних перерізах канатів та вказати методи / напрямки, які ведуть до їх мінімізації на перехідних ділянках функціонування вказаних механізмів підйому вантажу кранів.

Результати досліджень

1. Поздовжні коливання канатів (гнучких стрижнів) при гармонічному збудженні.

Будемо у цьому пункті й у подальшому використовувати у якості моделі канату вантажопідйомного механізму крану – модель гнучкого прямолінійного стрижня, який здатен підтримувати поздовжні коливання при його збудженні ззовні. При цьому не враховуватимемо дисипативні процеси, які виникають при повздовжніх вимушених коливаннях стрижня.

Отже, розглянемо випадок, коли стрижень / канат знаходиться під впливом однієї зосередженої поздовжньої сили, яка змінюється за гармонічним законом:

$$P = P_o \cdot sin\omega t \ , \qquad (1)$$

де: P_o – амплітуда, ω – кругова частота зовнішньої сили P, t – час.

Стаціонарні вимушені коливання відбуваються з частотою збудження ω й відповідно мають бути описані законом:

$$u(x, t) = U(x) \cdot sin\omega t \ , \qquad (2)$$

де $U(x)$ – функція абсциси x (форма вимушених коливань), яку слід визначити, користуючись граничними умовами та рівнянням хвильового типу[8]:

$$c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (3)$$

де: $u = u(x, t)$ - переміщення поздовжнього типу довільного перерізу стрижня при його вимушених коливаннях;

$c^2 = \dfrac{E}{\rho}$, c – швидкість розповсюдження повздовжніх хвиль у канаті/стрижні,

E – модуль Юнга, ρ – щільність / густина матеріалу стрижня.

Підставляючи у (3) вираз (2), згідно з методом Фур'є, прийдемо до звичайного диференціального рівняння для функції $U(x)$:

$$U'' + \frac{\omega^2 U}{c} = 0 \qquad (4)$$

де штрихи біля функції U(x) означають диференціювання по координаті x. Розв'язок (4) запишемо у вигляді:

$$U(x) = A \cdot \sin\left(\frac{\omega x}{c}\right) + \mathrm{D} \cdot \cos\left(\frac{\omega x}{c}\right) \qquad (5)$$

Постійні C та D повинні бути визначені з граничних умов, котрі формуються наступним чином.

1) Закріплений кінець стрижня. У цьому випадку $n = 0$ при будь – якому t.

Отже, у даному перерізі повинне виконуватись рівняння $U = 0$.

2) До кінця стрижня прикладена сила, яка відповідає рівнянню (1).

Вона повинна бути рівною повздовжній силі (N) у кінцевому перерізі.

Для N маємо:

$$N = E \cdot S \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = ES \cdot U' \cdot sin\omega t \ . \qquad (6)$$

У (6) E – модуль Юнга матеріалу стрижня, S – площа його поперечного перерізу

$$U'(x) = \frac{\mathrm{d}U(x)}{\mathrm{d}x}$$

Прирівнюючи (1) до (6), матимемо:

$$U' = \frac{P_o}{(E \cdot S)} \qquad (7)$$

3) Кінець стрижня вільний від навантаження. Згідно з (7) $U' = 0$.

На кінці стрижня присутня зосереджена маса m_o. Сила інерції, яка нею розвивається $\left(-m_o \ddot{u}_o\right) = m_o \omega^2 \cdot U_o \cdot sin\omega t$, $\ddot{u}_o = \dfrac{\mathrm{d}^2 u_o(t)}{\mathrm{d}t^2}$

(u_o й U_o – величини, які відносяться до точки закріплення маси m_o), повинна дорівнювати повздовжній силі: $N_o = E \cdot S \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} = ES \cdot U'_o \cdot sin\omega t$.

Отже,

$$\frac{m_o \cdot \omega^2 \cdot U_o}{(ES)} = U'_o \qquad (8)$$

Розглянемо кілька типових для вантажопідйомних механізмів задач, коли ці механізми знаходяться під впливом гармонічного зовнішнього збудження.

А. Визначимо амплітуду коливань стрижня / канату, до якого прикладена сила $P(t) = P_o \cdot sin\omega t$ (у перерізі $x = 0$), а на іншому кінці стрижня присутня зосереджена маса m_o (у перерізі $x = l$).

Отже, маємо: $U' = \dfrac{P_o}{(ES)}$ при x = 0 й $\dfrac{m_o \cdot \omega^2 \cdot U}{(ES)} = U'_o$ при $x = l$.

Зі вказаних граничних умов отримаємо для цього випадку коефіцієнти просторової форми коливань (5)

$$A = \frac{c \cdot P_o}{ES \cdot \omega};$$

$$D = \frac{c \cdot P_o}{ES \cdot \omega} \cdot \left\{ \frac{\frac{1}{c} \cdot \cos\left(\frac{\omega l}{c}\right) - \frac{m_o \cdot \omega}{ES} \cdot \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right)}{\frac{1}{c} \cdot \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) + \frac{m_o \omega}{ES} \cdot \cos\left(\frac{\omega l}{c}\right)} \right\}. \quad (9)$$

Отже, амплітуда коливань кінця стрижня ($x=l$) має вид:

$$U(l) = \frac{P_o \cdot c}{ES \cdot \omega} \cdot \left\{ \frac{1}{\sin\left(\frac{\omega l}{c}\right) + \frac{m_o \cdot \omega \cdot c}{ES} \cdot \cos\left(\frac{\omega l}{c}\right)} \right\}. \quad (10)$$

Якщо частота вимушеної сили, прикладеної до канату у перерізі ($x = 0$) відповідає розв'язку трансцендентного рівняння:

$$tg\left(\frac{\omega l}{c}\right) = -\frac{m_o \cdot \omega \cdot c}{E \cdot S}, \quad (11$$

тоді у канаті $U(l) \to \infty$, тобто виникає резонанс. (Це відповідає ситуації резонансного повздовжнього розгойдування вантажу, маси m_o, коли у верхній точці канату ($x = 0$) існує збуджуюча гармонійна сила (тобто, по суті, у точці підвісу канату до приводного механізму з барабаном є гармонічні коливання)).

Зрозуміло, що рівняння (11) має безліч розв'язків ω_n, n = 1,2,3….

В. Визначимо амплітуду коливань кінця стрижня / каната, до якого у перерізі ($x=l$) гармонічна сила $P(t) = P_o \cdot sin\omega t$, а інший його кінець ($x=0$) закріплений (нерухомий).

Тоді маємо наступні граничні умови: $U = 0$ при $x = 0$; $U' = \dfrac{P_o}{ES}$ при $x = l$. Для коефіцієнтів просторової форми коливань каната $U(x)$ (5) маємо:

$$A = \frac{(P_o \cdot c)}{\left(ES \cdot \omega \cdot \cos\left(\frac{\omega l}{c}\right)\right)}; \; D = 0. \quad (12)$$

Відповідно, амплітуда коливань кінця стрижня / каната:

$$U(l) = \frac{P_o \cdot c \cdot tg\left(\frac{\omega l}{c}\right)}{(ES\omega)}. \quad (13)$$

При умові:

$$\frac{\omega \cdot l}{c} = (2n - 1) \cdot \frac{\pi}{2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots, \quad (14)$$

амплітуда $U(l) \to \infty$, що відповідає резонансу, а $\omega_1 = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{c}{l}$ дорівнює найнижчій власній частоті:

При умові:

$$\frac{\widetilde{w} \cdot l}{c} = m \cdot \pi, \; m = 1,2,3,\ldots, \quad (15)$$

кінцевий переріз ($x=l$) нерухомий, тобто виникає т.з. антирезонанс. Його найнижча власна частота $\widetilde{w}_1 = \frac{\pi \cdot c}{l}$.

У таблиці 1 наведені найнижчі власні частоти резонансних, $\left(\omega_1 = \dfrac{\pi c}{2l}\right)$ й антирезонансних власних коливань канату / стрижню для різних довжин l.

У якості матеріалу канатів обрана сталь ($c = 5 \cdot 10^3$ м/с).

Таблиця 1. Залежність w_1 й $\widetilde{w}_1$ частот від довжини канату l, $c = 5 \cdot 10^3$ м/с.

Table 1. The dependence of w_1 and $\widetilde{w}_1$ frequencies on the length of the rope l, $c = 5 \cdot 10^3$ м/с.

l, м	"Резонанс", $\omega_1 = \frac{\pi \cdot c}{2l}$, c^{-1}	"Антирезонанс", $\widetilde{\omega}_1 = \frac{\pi \cdot c}{l}$
10	785,4	1570,8
20	392,7	785,4
30	261,8	523,6
50	157,1	314,2
100	78,5	157
200	39,3	78,6
500	15,7	31,4
1000	7,9	15,8

Визначимо амплітуду коливань кінця стрижня, до якого прикладена сила $P = P_o \cdot sin\omega t$, й на цьому кінці ($x = l$) також знаходиться зосереджена маса m_o (вантаж) , а інший кінець ($x = 0$) закріплений (нерухомий).

У цьому випадку граничні умови:

$$U = 0 \text{ при } x = 0;$$

$$U' = \frac{\left(P_o + m_o \omega^2 \cdot U\right)}{(ES)} \text{ при } x = l. \quad (16)$$

Друга гранична умова виражає, по суті, рівність повздовжньої сили на правому кінці стрижня / каналу сумі вимушеної гармонічної сили й сили інерції кінцевої маси.

Виходячи з (16) для просторової форми коливань канату (5) маємо:

$$A = \frac{P_o}{\left[\frac{ES\omega}{c} \cdot \cos\left(\frac{\omega l}{c}\right) - m_o \omega^2 \cdot \sin\left(\frac{\omega l}{c}\right)\right]}, \; D = 0. \quad (17)$$

Амплітуда коливань кінця стрижня / канату ($x = l$):

$$U(l) = P_o \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega l}{c}\right)}{\left[\frac{ES}{c}\cdot\omega\cdot\cos\left(\frac{\omega l}{c}\right) - m_o\cdot\omega^2\cdot\sin\left(\frac{\omega l}{c}\right)\right]} \quad (18)$$

Резонанс у цьому випадку, який приводить до $U(l) \to \infty$, виникає при умові:

$$tg\left(\frac{\omega l}{c}\right) = \frac{ES}{c\cdot m_o\cdot\omega}. \quad (19)$$

2. Повздовжні коливання канатів (гнучких стрижнів) при довільному розподілі навантаження по довжині й залежності від часу.

Нехай зовнішнє навантаження довільним чином розподілене по довжині і є будь – якою функцією часу t: $q = q(x, t)$. Зокрема навантаження може змінюватись у часі за законом, загальним для усіх точок (канату):

$$q = q_o(x)\cdot H(t). \quad (20)$$

Враховуючи елементарне зовнішнє навантаження $q\cdot dx$ при складанні диференціального рівняння хвильового типу для каната, матимемо при $ES = const$.[8]:

$$E\cdot S\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\cdot S\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (21)$$

Дані навантаження $q(x, t)$ та переміщення $u(x, t)$ можна подати у вигляді рядів за власними функціями відповідної задачі про вільні коливання:

$$q(x, t) = X_1(x)\cdot S_1(t) + X_2(x)\cdot S_2(t) + ...; \quad (22)$$

$$u(x, t) = X_1(x)\cdot T_1(t) + X_2(x)\cdot T_2(t) + ... \quad (23)$$

Для визначення функції часу $S_i(t)$ помножимо обидві частини рівняння (22) на $X_i(x)$ й проінтегруємо результат впродовж всієї довжини стрижня / канату.

При інтегруванні у правій частині зникнуть всі складові, крім *i*-ої (внаслідок ортогональності власних функцій), й для $S_i(t)$ матимемо формулу:

$$S_i(t) = \frac{\left[\int_o^{к} q(x, t)\cdot X_i(x)\,dx\right]}{\left[\int_o^l X_i^2(x)\,dx\right]} \quad (24)$$

Якщо навантаження змінюється за законом (20), тоді

$$S_i(t) = H(t)\cdot\frac{\left[\int_0^l q_o(x)\cdot X_i(x)\,dx\right]}{\left[\int_o^l X_i^2(x)\,dx\right]}, \quad (25)$$

тобто функції $S_i(t)$ для всіх номерів (*i*) відрізняються лише масштабом.

Якщо навантаження здійснюється зосередженими силами $P_a(t)$, $P_b(t)$,... у перерізах з абсцисами *a,b*...,тоді формула (24) приймає вид:

$$S_i(t) = \frac{\left[P_a(t)\cdot X_i(a) + P_b(t)\cdot X_i(b) + ...\right]}{\left[\int_o^l X_i^2(x)\,dx\right]}, \quad (26)$$

Визначення функції $T_i(t)$ засноване на тій обставині, що кожна складова у (22) викликає рух, який визначається відповідною складовою (23). Тому у рівняння (21) можна підставити:

$$q(x, t) = X_i(x)\cdot S_i(t);\ u(x, t) = X_i(x)\cdot T_i(t). \quad (27)$$

Тоді матимемо рівняння:

$$ES\cdot X_i''\cdot T_i - \rho\cdot S\cdot X_i\cdot\ddot{T}_i = X_i\cdot S_i, \quad (28)$$

або після ділення на $\rho S\cdot X_i\cdot T_i$:

$$c^2\cdot\frac{X_i''}{X_i} = \frac{\ddot{T}_i}{T_i} + \frac{S_i}{(\rho\cdot S\cdot T_i)}. \quad (29)$$

Ліва частина отриманої рівності (29) постійна і дорівнює $-p_i^2$ [8], де p_i - i_a- власна частота вільних коливань канату. Відповідно, тому ж значенню $-p_i^2$ дорівнює й права частина, отже:

$$\ddot{T}_i + p_i^2 T_i = -\frac{S_i}{(\rho\cdot S)}. \quad (30)$$

Ця формула й вирішує задачу, оскільки дає можливість утворити суму (23), бо згідно розв'язку неоднорідного диференціального рівняння (30) маємо:

$$T_i(t) = -\frac{1}{\rho S\cdot p_i}\cdot\int_o^t S_i(\tau)\cdot\sin\left[p_i(t-\tau)\right]d\tau. \quad (31)$$

У найбільш загальному випадку для $S_i(t)$ з (24) можна для $T_i(t)$ згідно (31) записати:

$$T_i(t) = -\frac{\int_o^l\int_o^t q(x,\tau)\cdot X_i(x)\cdot\sin\left[p_i\cdot(t-\tau)\right]dx\,d\tau}{\rho S\cdot p_i\cdot\int_o^b X_i^2\,dx} \quad (32)$$

Якщо навантаження відповідає закону (20), тоді із врахуванням виразу (25) можна написати:

$$T_i(t) = -\frac{\int_o^l q_o(x)\cdot X_i(x)\,dx}{\rho S\cdot p_i\cdot\int_o^l X_i^2(x)\,dx}\cdot\int_o^t H(\tau)\cdot\sin\left[p_i(t-\tau)\right]d\tau \quad (33)$$

Слід зазначити, що функції $X_i(x)$ визначаються граничними умовами конкретної задачі і є розв'язком хвильового рівняння з нульовою правою частиною

(3). Стосовно виразу (26) слід вказати, що зовнішні зосереджені сили прикладені, як правило, до кінця канату, тобто до перерізів $x=0$ й $x=l$. Тому для аналізу вимушених коливань канатів вантажопідйомних механізмів кранів маємо:

$$S_i(t) = \frac{\left[P_o(t)\cdot X_i(0) + P_l(t)\cdot X_i(l)\right]}{\left[\int_o^l X_i^2(x)\,\mathrm{d}x\right]}. \qquad (34)$$

Загальний розв'язок (21) подаємо у вигляді:

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_i(x)\cdot T_i(t). \qquad (35)$$

Слід зазначити, що (35) визначає лише вимушені коливання стрижня / канату і не враховує його власні вільні коливання, які виникають навіть при відсутності зовнішніх впливів і визначаються виключно початковими умовами задачі, а також граничними.

Розраховувати оптимальні режими пуску / гальмуваня вантажопідйомного механізму крана слід таким чином, щоб задовольнявся наступний критерій якості руху даної дискретно- континуальної системи:

$$\left[\frac{1}{t_s}\int_o^{t_s} ES\cdot\left\{\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right\}^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \to \min. \qquad (36)$$

Фізичний зміст (36) полягає у наступному. Він дозволяє реалізувати такий оптимальний рух даної дискретно-континуальної системи "приводний механізм з барабаном – канат - вантаж", за якою мінімізується середньоквадратичне зусилля, що діє у канаті протягом розгону / гальмування (тривалістю t_s) при підйомі / спуску вантажу.

Зрозуміло, що реалізація критерію (36) залежить від місця розташування конкретного перерізу каната, тобто від x ($0 \le x \le l$). Ця незручність зникає, коли усереднити вираз під знаком інтегралу по t у (36) ще й по x на всій довжині канату, тобто:

$$\left\{\frac{1}{l\cdot t_s}\int_o^l\int_o^{t_s}\left[E\cdot S'\cdot\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]^2 \mathrm{d}t\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \min. \qquad (37)$$

Висновки

1. Обґрунтована дискретно-континуальна модель для реалізації аналітичного підходу в аналізі вимушених коливань пружних елементів (канатів) вантажопідйомних механізмів кранів при довільному й гармонічному від часу t законів зміни зовнішніх сил.

2. Запропонований критерій якості руху канатів вантажопідйомного механізму крана, який при його реалізації дозволяє встановлювати такі режими руху пружних елементів, котрі мінімізують напруження у останніх.

3. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для вдосконалення й уточнення існуючих інженерних методів розрахунку вантажопідйомних механізмів та їх елементів як на стадіях проектування / конструювання, так і у режимах реальної експлуатації.

Список літератури

1. *Кушнарёв А., Шевченко И., Дюжаев В., Кушнарев С.* Механика взаимодействия рабочих органов на упругой подвеске с почвой. Техника АПК. 2008. №8. С. 22–25.

2. *Шевченко И.* Экспериментально-теоретическое обоснование параметров рабочих органов с упругими стойками культиваторов для предпосевной обработки почв: Дис. … канд. техн. наук. Москва. 1988. 176 с.

3. *Кушнарев С. А.* Обоснование энергосберегающих технологических процессов обработки почв и параметров упругих рабочих органов для условий южной степной зоны Украины: Дис. … канд. техн. наук. Глеваха, 1998. 194 с.

4. *Дюжаев В. П.* Построение математической модели колебательной системы рабочий орган-почва. Труды ТГАА. Мелитополь, 1998. Т. 5. С. 77–82.

5. *Войтюк Д. Г., Човнюк Ю. В., Діктерук М. Г., Гуменюк Ю. О., Гуцол О. П.* Виникнення параметричних коливань та резонансів культиваторів з пружною підвіскою робочих органів. Міжвідомчий науковий збірник. Глеваха, 2013. Вип. 98. Том 1. С. 376–384.

6. *Базаров В. П.* Дополнительный упругий элемент и его влияние на упругую подвеску. Конструирование и технология производства сельскохозяйственных машин. 1980. №10. С. 9–11.

7. *Бидерман В. П.* Теория колебаний. Москва. Высшая школа. 1980. 408 с.

8. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. Москва. Наука, 1965. 559 с.

9. *Войтюк Д. Г., Човнюк Ю. В., Діктерук М. Г., Гуменюк Ю. О., Гуцол О. П.* Физико-механический анализ автоколебательных режимов работы вибрационной рыхлительной лапы культиватора. Вібрації в техніці та технологіях. 2012. Вип. 4(68). С. 24–30.

10. *Гринченко О. С., Алфьоров О. І., Савченко В. Б., Юр'єва Г. П.* Теоретичний аналіз автоколивань ґрунтообробних органів на пружній підвісці з урахуванням стохастичних факторів. Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів. 2016. № 5. С. 222–226.

11. *Гринченко А. С., Алфьоров А. И.* Теоретические модели функционирования и обеспечения механической надежности культиваторов с подпружиненными рабочими органами. Загальнодержавний міжвідомчий науково-технічний збірник. Кіровоград, 2015. Вип. 45. Частина І. С. 205–212.

12. *Василенко Н. В.* Теория колебаний. Киев. Высшая школа. 1992. 430 с.

13. *Пановко Я. Г.* Введение в теорию механических колебаний. Москва. Наука, 1980. 272 с.

14. *Закржевский М. В.* Колебания существенно-нелинейных механических систем. Рига: Зинатне, 1980. 190 с.

15. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. Москва. Мир, 1968. 432 с.

16. *Хвингия М. В.* Колебания и устойчивость упругих систем машин и приборов. Тбилиси. Мецниереба, 1974. 284 с.

17. *Закржевский М. В., Иванов Ю. М., Федоренко А. Н.* Самовозбуждение субгармонических колебаний в неавтономной колебательной системе с билинейной упругой характеристикой. В кн.: Виброзащита человека-оператора и колебания в машинах. Москва. Наука, 1977. С. 376–384.

18. *Кобринский А. Е.* Механизм с упругими связями. Москва. Наука, 1964. 390 с.

19. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Москва. Наука, 1972. 472 с.

20. *Пановко Я. Г.* Основы прикладной теории упругих колебаний. Москва. Машиностроение, 1967. 316 с.

References

1. *Kushnarev, A., Shevchenko, I., Dugaev, V., Kushnarev, S.* (2008). Mechanics of interaction of working bodies on an elastic suspension with the soil. Technique APK. No 8. 22-25.

2. *Shevchenko, I.* (1988). Experimentally-theoretical substantiation of parameters of working bodies with elastic stands cultivators for pre-sowing treatment of soil: Dis. kand. tech. Sciences. Moscow. 176.

3. *Kushnarev, S. A.* (1998). Substantiation of power saving processing of soil and the elastic parameters of working bodies for the conditions of southern steppe zone of Ukraine: Dis. kand. tech. Sciences. Glevaha, 194.

4. *Dugaev, V. P.* (1998). Mathematical model of the oscillating system working on the soil. Proceedings of TGAA. Melitopol', Vol. 5. 77-82.

5. *Voytyuk, D. G., Chovnyk, Yu. V., Dickery, M. G., Gumenyuk, A. Y., Gutsol, O. P.* (2013). Occurrence of parametric vibrations and resonances of the cultivators with an elastic suspension of working bodies. The interdepartmental scientific collection. Glevaha, Vol. 98. Volume 1. 376-384.

6. *Bazarov, V. P.* (1980). Additional elastic element and its influence on the elastic suspension. Design and production technology of agricultural machinery. No 10. 9-11.

7. *Biderman, V. P.* (1980). Theory of oscillations. Moscow. High school. 408.

8. *Babakov, S. M.* (1965). Theory of vibrations. Moscow. Nauka, 559.

9. *Voytyuk, D. G., Chovnyk, Yu. V., Dickery, M. G., Gumenyuk, A. Y., Gutsol, O. P.* (2012). Physico-mechanical analysis of self-oscillating modes of vibration loosening the clutches of the cultivator. Vibration in engineering and technology. Vol. 4(68). 24-30.

10. *Grinchenko, A. S. Alferov, A. I., Savchenko, V. B., Yuriev, G. P.* (2016). Theoretical analysis for oscillation tillage bodies on an elastic suspension with the consideration of stochastic factors. Technical services agricultural, forestry, and transport complexes. No 5. 222-226.

11. *Grinchenko, A. S., Alferov, A. S.* (2015). Theoretical models of functioning and ensure mechanical reliability of cultivators with spring tines. The national interdepartmental scientific-technical collection. Kirovograd, Vol. 45. Part. 205-212.

12. *Vasilenko, N. V.* (1992). Theory of oscillations. Kiev. High school. 430.

13. *Panovko, J. G.* (1980). Introduction to the theory of mechanical vibrations. Moscow. Nauka, 272.

14. *Zakrzewski, N. V.* (1980). Vibrations of essentially nonlinear mechanical systems. Riga: Zinatne, 190.

15. *Hayashi, T.* (1968). Nonlinear oscillations in physical systems. Moscow. Mir, 432.

16. *Khvingia, M. V.* (1974). Vibrations and stability of elastic systems and machines. Tbilisi. Marinieres, 284.

17. *Zakrzewski, N. V., Ivanov, Yu. M., Fedorenko, A. N.* (1977). The self-excitation of subharmonic oscillations in a nonautonomous oscillatory system with bilinear elastic characteristic. In the book: Protection of the human operator and the fluctuations in the machines. Moscow. Science, 376-384.

18. *Kobryn, A. E.* (1964). Mechanism with elastic links. Moscow. Science, 390.

19. *Neimark, Yu. S.* (1972). The method of point mappings in the theory of nonlinear oscillations. Moscow. Science, 472.

20. *Panovko, J. G.* (1967). Fundamentals of applied theory of elastic vibrations. Moscow. Mechanical engineering, 316.

АНАЛИЗ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГОГО ЭЛЕМЕНТА (КАНАТА) ГРУЗОПОДЪЕМНЫХ МЕХАНИЗМОВ КРАНОВ: АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД, ДИСКРЕТНО - КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

Ю. В. Човнюк, И. Н. Сивак

Аннотация. Обоснован метод и дискретно-континуальная модель для анализа вынужденных колебаний упругих элементов (канатов) грузоподъемных механизмов кранов при произвольном и гармоничном от времени законов изменения внешних сил. Предложенный критерий качества движения канатов грузоподъемного механизма крана, при его реализации позволяет устанавливать такие режимы движения упругих элементов, которые минимизируют напряжение в последних. Реализация цели данного исследования позволяет установить коэффициенты динамичности в разных сечениях канатов и указать методы / направления, которые ведут к минимизации на переходных участках функционирования указанных механизмов подъема груза кранов.

Решение соответствующих дифференциальных уравнений, является математической моделью задачи, осуществлен путем разложения в ряд по собственным функциям искомых решений указанных уравнений (в частных производных по пространственной и временной координатам). Для внешней нагрузки выбран обобщенный закон изменения в пространстве

и времени. Найдены условия резонанса / антирезонанса в случае гармоничной возбуждающей внешней силы для различных конечных (граничных условий закрепления упругого элемента (каната).

Ключевые слова: анализ, вынужденные колебания, упругость, канаты, грузоподъемные механизмы, краны, аналитический подход, дискретно – континуальная модель.

ANALYSIS OF FORCED VEHICLES OF ELASTIC ELEMENTS (ROPES) OF LOADING LIFT MECHANISMS OF CRANES: ANALYTICAL APPROACH, DISCRETE – CONTINUAL

Yu. V. Chovnuk, I. M. Sivak

Abstract. The substantiated method and discrete - continuum model for the analysis of forced oscillations of elastic elements (ropes) of lifting mechanisms of cranes at arbitrary and time – harmonic laws of the change of external forces. The proposed criterion of the quality of the rope movement of the lifting mechanism of the crane, which, when implemented, permits the establishment of such modes of motion of elastic elements, which minimize the stresses in the latter. Realization of the purpose of this study allows to determine the dynamics coefficients in different sections of ropes and specify the methods / directions that lead to their minimization in the transition areas of the functioning of these mechanisms lifting cargo cranes.

The solution of the corresponding differential equations, which is a mathematical model of the problem, is carried out by decomposition in a series of eigenfunctions of the desired solutions of the indicated equations (in partial derivatives in spatial and temporal coordinates). For the external load, a generalized law of change in space and time is chosen. Conditions for resonance / antiresonance are found in the case of harmonic excitatory external force for various endpoints (boundary conditions for fixing an elastic element (rope).

Key words: analysis, forced oscillations, elasticity, ropes, load-lifting mechanisms, valves, analytical approach, discrete-continuum model.

Ю. В. Човнюк ORCID 0000-0003-1889-0876.
І. М. Сівак ORCID 0000-0002-6297-587X.