Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2020, Vol. 11, No 1, 13-20
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

DOI: 10.31548/machenergy.2020.01.013-020

УДК 514.18

КОЧЕННЯ РОЗГОРТНОГО ГЕЛІКОЇДА ПО СВОЄМУ ЗГИНАННЮ

Т. А. Кресан, С. Ф. Пилипака, І. Ю. Грищенко, Я. С. Кремець

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Стаття з спеціальності: 131 – прикладна механіка.

Кореспонденція авторів: tanyakresan@i.ua

Історія статті: отримано – жовтень 2019, акцептовано – січень 2020.

Бібл. 4, рис. 10, табл. 0.

Анотація. Тема кочення поверхонь одна по одній в науковій літературі не набула широкого висвітлення. Детально вивченим є кочення поверхонь обертання, які використовуються для передачі обертального руху між мимобіжними осями та осями, що перетинаються. При проектуванні зубчатих зачеплень для передачі крутного моменту розглядаються як розгортні, так і нерозгортні поверхні у ролі аксоїдів. Загальновідомими поверхнями для передачі крутного моменту між осями, що перетинаються, є конуси із суміщеними вершинами. Якщо вершини конусів віддалені у нескінченність, тоді твірні поверхонь стають паралельними, тобто конуси перетворюються у циліндри із паралельними осями. Як у конусів, так і у циліндрів спільною лінією дотику є прямолінійна твірна обох поверхонь. При передачі крутного моменту між мимобіжними осями аксоїдами є однопорожнинні гіперболоїди обертання із спільною прямолінійною твірною дотику. Вони є нерозгортними лінійчатими поверхнями. Між перекочуванням розгортних і нерозгортних поверхонь одна по одній є суттєва відмінність. Для пар конусів і циліндрів перекочування відбувається без ковзання, а для нерозгортних поверхонь гіперболоїдів – із ковзанням вздовж спільної лінії дотику. Однак це не означає, що нерозгортні лінійчаті поверхні не можуть перекочуватися одна по одній без ковзання.

Із теорії поверхонь відомо, що поверхня може перекочуватися без ковзання по своєму згинанні. Якщо згинання вихідної лінійчатої поверхні відбувається із збереженням прямолінійних твірних, то перекочування вихідної і зігнутої поверхонь відбувається без ковзання із лінією контакту вздовж спільної твірної поверхонь незалежно від того, розгортні вони, чи нерозгортні. Керувати згинанням розгортної поверхні можна шляхом деформації її ребра звороту. Така деформація відбувається зміною його скруту із збереженням кривини у функції довжини дуги. Для розгортного гелікоїда (торса-гелікоїда) ребром звороту є гвинтова лінія. Зміною її скруту можна отримати іншу гвинтову лінію із іншим кутом її підйому. Цим двом гвинтовим лініям відповідають два розгортних гелікоїди, кожен із яких можна отримати згинанням іншого. Обидва гелікоїди мають спільну розгортку. Для кочення гелікоїдів один по одному необхідно їх сумістити так, щоб лінією їх контакту була спільна прямолінійна твірна обох поверхонь. Це означає, що у відповідних точках ребер звороту з рівними значеннями довжин дуг супровідні тригранники обох кривих повинні збігатися. Для забезпечення контакту обох поверхонь вздовж спільної прямолінійної твірної в статті здійснено поворот однієї із них за допомогою кутів Ейлера і паралельне перенесення. За отриманими рівняннями побудовано поверхні із спільною лінією контакту.

Ключові слова: розгортний гелікоїд, згинання, кочення поверхонь, ребро звороту, поворот, паралельне перенесення.

Постановка проблеми

При проектуванні зубчастих зачеплень важливу роль відіграють аксоїди – поверхні, які обкочуються одна по одній і які є основою для розрахунку і нарізання зубів. Вивченими аксоїдами є наступні поверхні обертання: циліндри – для проектування передач між паралельними осями; конуси – для проектування передач між осями, що перетинаються; гіперболоїди – для проектування передач між мимобіжними осями. Потребує вивчення процес обкочування гвинтових поверхонь одна по одній, зокрема, розгортних.

Аналіз останніх досліджень

В праці [1] сказано, що лінійчаті поверхні можуть котитися одна по одній без ковзання, якщо вони згинаються одна на одну. Такі дві поверхні називаються накладанними, тобто множині точок однієї поверхні однозначно можна поставити у відповідність множину точок на другій поверхні таким чином, що відстані між відповідними точками для обох поверхонь будуть однаковими. Частковим випадком згинання розгортної поверхні є її розгортка.

В такому випадку матимемо частковий випадок кочення поверхні по своїй розгортці.

В праці [2] сказано, що при коченні розгортних поверхонь одна по одній супровідні тригранники ребер звороту в кожен момент часу повинні збігатися. Тоді будуть збігатися дотичні до ребер звороту, які є прямолінійними твірними поверхонь і є спільною лінією контакту поверхонь.

В праці [3] здійснено розрахунок і графічними методами побудовано проекції двох торсів-гелікоїдів, один із яких є згинанням іншого, і які мають спільну прямолінійну твірну контакту. Осі торсів є мимобіжними і складають між собою прямий кут. Показано, що для забезпечення контакту між поверхнями під час їхнього обертання навколо своїх осей вони повинні здійснювати вздовж них ще і поступальний рух.

Мета досліджень

Розробити аналітичний опис процесу кочення торса-гелікоїда по своєму згинанню із забезпеченням спільної лінії контакту вздовж відповідних прямолінійних твірних в кожен момент часу.

Результати досліджень

Ребром звороту торса-гелікоїда є гвинтова лінія. Її параметричні рівняння у функції довжини дуги s мають вигляд [4, стор. 78]:

$$x = a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad y = a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad z = \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{1}$$

де a – радіус циліндра, на якому розташована гвинтова лінія;

b – гвинтовий параметр, через який можна знайти крок H гвинтової лінії: $H=2\pi b$.

Між цими параметрами і кутом β підйому гвинтової лінії існує взаємозв'язок:

$$b = a\,\mathrm{tg}\beta. \tag{2}$$

Підстановкою (2) у (1) отримаємо параметричні рівняння гвинтової лінії за заданим радіусом a і кутом підйому β:

$$x = a\cos\frac{\cos\beta}{a}s;\quad y = a\sin\frac{\cos\beta}{a}s;\quad z = s\sin\beta. \tag{3}$$

Відомо, що при згинанні торса кривина його ребра звороту у функції довжини дуги s залишається незмінною, змінюється тільки його скрут [4, стор. 285]. Кривина k гвинтової лінії є сталою і обчислюється за формулою [4, стор. 117]:

$$k = \frac{a}{a^2+b^2}. \tag{4}$$

Із врахуванням (2) вираз (4) запишеться:

$$k = \frac{\cos^2\beta}{a}. \tag{5}$$

Гвинтову лінію можна деформувати таким чином, щоб вона залишалася гвинтовою, і щоб її кривина залишалася сталою. Це можна робити зміною радіуса a і кута підйому β. Нехай після деформації ці сталі наберуть нових значень: $a_{зг}$ і $\beta_{зг}$. Тоді на основі рівності кривини (5) можна записати:

$$\frac{\cos^2\beta}{a} = \frac{\cos^2\beta_{зг}}{a_{зг}} \tag{6}$$

Деформувати гвинтову лінію будемо зміною кута її підйому β. Введемо сталу p і запишемо: $\beta_{зг}=p\cdot\beta$. Із врахуванням цього на основі рівності (6) знаходимо:

$$a_{зг} = \frac{a\cos^2 p\beta}{\cos^2\beta}. \tag{7}$$

Підставимо в параметричні рівняння (3) замість a нове значення $a_{зг}$ із (7) і замість β нове значення $\beta_{зг}=p\cdot\beta$ і отримаємо:

$$x = \frac{a\cos^2 p\beta}{\cos^2\beta}\cos\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s;\quad y = \frac{a\cos^2 p\beta}{\cos^2\beta}\sin\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s;\quad z = s\sin p\beta. \tag{8}$$

При $p=1$ параметричні рівняння (8) опишуть вихідну гвинтову лінію (3), при $p=0$ – випадок, коли гвинтова лінія перетворюється в коло. При згинанні торса-гелікоїда це означатиме, що при $p=0$ він перетворюється в розгортку.

На рис. 1 за рівняннями (8) побудовано в проекціях гвинтові лінії однакової довжини при $p=1$ (вихідна крива) і $p=2$ (деформована крива).

Обидві лінії розташовані на співвісних вертикальних циліндрах, радіуси r яких визначаються із залежності $r = a\cos^2 p\beta/\cos^2\beta$ згідно рівнянь (8).

При $p=1$ маємо вихідну гвинтову лінію, якій відповідає коло більшого радіуса на горизонтальній проекції (рис. 1), а при $p=2$ – коло меншого радіуса. Якщо задати конкретне значення довжини дуги s, наприклад, s_o, то згідно рівнянь (8) на обох проекціях кривих (тобто колах) отримаємо точки A і $A_{зг}$. Зображені на рис. 1 гвинтові лінії побудовані при $s=0$. Із початкових точок кривих проведені одиничні орти супровідних тригранників: дотичні τ і $\tau_{зг}$ та бінормалі b і $b_{зг}$.

Головні нормалі збігаються і на фронтальній проекції проекціюються в точку.

Для суміщення супровідних тригранників обох кривих потрібно знати кути між їх ортами.

Кут θ між ортами дотичних τ і $\tau_{зг}$ для гвинтових ліній є сталим і дорівнює кутові між ортами бінормалей b і $b_{зг}$.

Вираз для його знаходження запишеться:

$$\theta = \beta_{зг} - \beta = \beta(p-1). \tag{9}$$

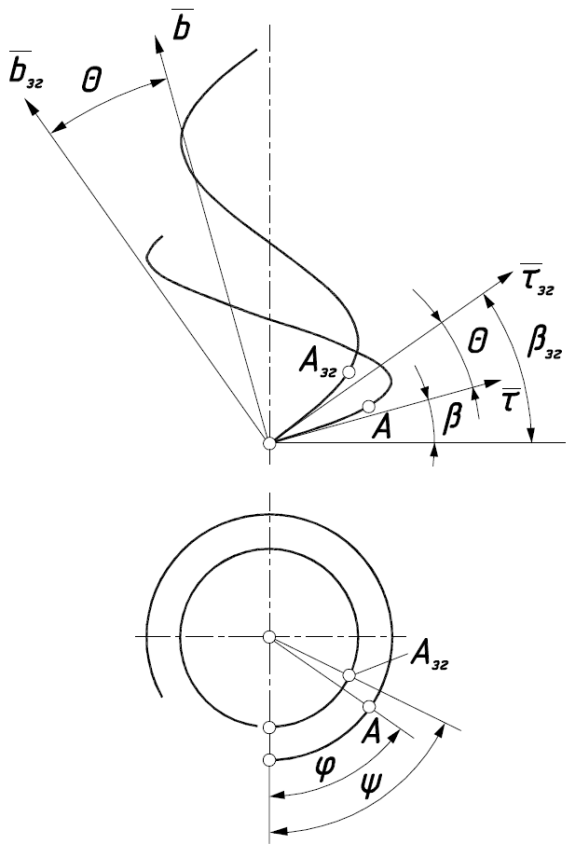

Рис. 1. Вихідна ($p=1$) і деформована ($p=2$) гвинтові лінії, побудовані за рівняннями (8) при $a=2$, $\beta=\pi/10$.

Fig. 1. The original $(p = 1)$ and deformed $(p = 2)$ screw lines constructed by equations (8) at $a = 2$, $\beta=\pi/10$.

Для того, щоб орти супровідних тригранників обох кривих при $s=0$ стали паралельними, достатньо повернути систему координат, в якій описана деформована гвинтова лінія, на кут θ навколо спільної головної нормалі, яка збігається із однією із осей нерухомої системи координат. Однак вимогу паралельності ортів обох тригранників потрібно забезпечити при довільному значенні $s=s_o$. Нехай цьому значенні дуги на кривих відповідають точки A і $A_{зг}$. Для повороту деформованої гвинтової лінії таким чином, щоб орти супровідного тригранник в точці $A_{зг}$ і в точці A були паралельними, необхідно враховувати кути φ і ψ (рис. 1). Задача полягає в перетворенні координат таким чином, щоб точки A і $A_{зг}$ обох кривих збігалися, а також збігалися їх супровідні тригранники. Для розв'язання цієї задачі скористаємося поворотом системи координат, в якій описана деформована гвинтова лінія, за допомогою трьох кутів Ейлера з наступним її паралельним перенесенням. Кутом нутації є кут θ (9). Знайдемо вирази для кутів прецесії ψ і власного обертання φ. Вони показують відхилення точки на колі – горизонтальній проекції гвинтової лінії – від початкового значення до поточного у кутовому вимірі. Ці кути закладені у рівняннях гвинтових ліній (8) і (3):

$$\psi = \frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s; \qquad \varphi = -\frac{\cos\beta}{a}s. \qquad (10)$$

Слід мати на увазі, що кути (10) визначаються для конкретних точок гвинтових ліній при заданому значенні параметра $s=s_o$. Крім того, кут φ потрібно брати із знаком «мінус», оскільки для суміщення точок A і $A_{зг}$ поворот потрібно здійснювати на різницю кутів ψ і φ (рис. 1, горизонтальна проекція).

Запишемо рівняння торса-гелікоїда, для якого гвинтова лінія (8) є ребром звороту. За допомогою кутів Ейлера ми будемо повертати отриманий торс до потрібного положення. Знайдемо вирази напрямного одиничного вектора прямолінійної твірної торса, яка є дотичною до гвинтової лінії (8). Для цього знаходимо похідні рівнянь (8), які і є напрямними косинусами:

$$\begin{aligned} x' &= -\cos p\beta \sin\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s; \\ y' &= \cos p\beta\cos\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s; \\ z' &= \sin p\beta. \end{aligned} \qquad (11)$$

Із врахуванням (11) запишемо параметричні рівняння торса-гелікоїда, для якого гвинтова лінія (8) є ребром звороту:

$$\begin{aligned} X &= \frac{a\cos^2 p\beta}{\cos^2\beta}\cos\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s - \\ &\quad -u\cos p\beta\sin\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s; \\ Y &= \frac{a\cos^2 p\beta}{\cos^2\beta}\sin\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s + \\ &\quad +u\cos p\beta\cos\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s; \\ Z &= s\sin p\beta + u\sin p\beta, \end{aligned} \qquad (12)$$

де u – довжина прямолінійної твірної торса-гелікоїда – друга незалежна змінна поверхні.

Щоб переконатися, що рівняння (12) описують однопараметричну множину торсів-гелікоїдів, яка є згинаннями вихідної поверхні, потрібно знайти першу квадратичну форму поверхні (12). Частинні похідні рівнянь (12) запишуться:

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{ds} &= -\cos p\beta\sin\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s - \\ &\quad -u\frac{\cos^2\beta}{a}\cos\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s; \\ \frac{\partial Y}{ds} &= \cos p\beta\cos\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s - \\ &\quad -u\frac{\cos^2\beta}{a}\sin\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s; \\ \frac{\partial Z}{ds} &= \sin p\beta; \\ \frac{\partial X}{du} &= -\cos p\beta\sin\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s; \\ \frac{\partial Y}{du} &= \cos p\beta\cos\frac{\cos^2\beta}{a\cos p\beta}s; \\ \frac{\partial Z}{du} &= \sin p\beta. \end{aligned} \qquad (13)$$

Знаходимо коефіцієнти першої квадратичної форми:

$$G=\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial s}Z\right)^2=$$

$$=1+\frac{u^2}{8a^2}\left(3+4\cos 2\beta+\cos 4\beta\right); \quad (14)$$

$$F=\frac{\partial X}{\partial s}\cdot\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial Y}{\partial s}\cdot\frac{\partial Y}{\partial u}+\frac{\partial Z}{\partial s}\cdot\frac{\partial Z}{\partial u}=1;$$

$$E=\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial X}{\partial u}Z\right)^2=1.$$

Перша квадратична форма торса-гелікоїда (12) запишеться:

$$dS^2=\left(1+\frac{u^2}{8a^2}\left(3+4\cos 2\beta+\cos 4\beta\right)\right)ds^2+ \quad (15)$$

$$+2ds\cdot du+du^2.$$

До виразу першої квадратичної форми (15) не входить постійна p, яка впливає на кут підйому гвинтової лінії – ребра звороту торса-гелікоїда. Від її значення залежить форма поверхні, але не залежить її перша квадратична форма. Це означає, що рівняння (12) є параметричними рівняннями неперервного згинання торса-гелікоїда. При $p=1$ рівняння (12) опишуть вихідну поверхню із заданим кутом β підйому гвинтової лінії – ребра звороту, а при $p=0$ – його розгортку. При інших значеннях $p=0...1$ ми отримаємо проміжні поверхні торса-гелікоїда при його згинанні від розгортки до вихідної поверхні.

Для повороту торса-гелікоїда (12) потрібно мати вирази напрямних косинусів повернутої системи координат по відношенню до вихідної. Вони визначаються за відомими формулами через кути Ейлера:

$$l_x=\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\psi\sin\varphi;$$

$$l_y=-\cos\psi\sin\varphi-\cos\theta\sin\psi\cos\varphi;$$

$$l_z=\sin\theta\sin\psi;$$

$$m_x=\sin\psi\cos\varphi+\cos\theta\cos\psi\sin\varphi; \quad (16)$$

$$m_y=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\psi\cos\varphi;$$

$$m_z=-\sin\theta\cos\psi;$$

$$n_x=\sin\theta\sin\varphi;$$

$$n_y=\sin\theta\cos\varphi;$$

$$n_z=\cos\theta.$$

Параметричні рівняння повернутого торса-гелікоїда запишуться:

$$X_n=Xl_x+Ym_x+Zn_x;$$

$$Y_n=Xl_y+Ym_y+Zn_y; \quad (17)$$

$$Z_n=Xl_z+Ym_z+Zn_z,$$

де $X=X(s, u)$, $Y=Y(s, u)$, $Z=Z(s, u)$ – параметричні рівняння торса-гелікоїда (12) до повороту.

Якщо у рівняннях (12) прийняти $p=1$, то отримаємо вихідну поверхню. Відповідно рівняння (17) теж дадуть вихідну поверхню, оскільки за отриманими кутами Ейлера при $p=1$ повороту не відбудеться. При $u=0$ рівняння (17) опишуть гвинтову лінію – ребро звороту торса-гелікоїда. При конкретному значенні $s=s_o$ на гвинтовій лінії буде виділено точку A. При $p=1$ точка належатиме ребру звороту вихідної поверхні, а при $p\neq 1$ точка $A_{зг}$ належатиме повернутому ребру звороту зігнутого торса. Ці точки не збігаються. Для того, щоб торси торкалися вздовж спільної прямолінійної твірної, необхідно зробити паралельне перенесення зігнутого торса на певні відрізки x_o, y_o, z_o вздовж осей вихідного торса. Вказані відрізки знаходимо, як різницю відповідних координат за формулами (17) при $u=0$ і $s=s_o$, причому для вихідної гвинтової лінії при $p=1$, а для деформованої і повернутої гвинтової лінії – при прийнятому значенні $p\neq 1$. Після цього параметричні рівняння (17) остаточно запишуться:

$$X_n=Xl_x+Ym_x+Zn_x+x_0;$$

$$Y_n=Xl_y+Ym_y+Zn_y+y_0; \quad (18)$$

$$Z_n=Xl_z+Ym_z+Zn_z+z_0.$$

За допомогою параметричних рівнянь (18) описується як вихідний торс (при $p=1$), так і його згинання (при прийнятому значенню $p\neq 1$). Обидва торси будуть торкатися один одного по спільній прямолінійній твірній, яка виходить із спільної точки дотику обох гвинтових ліній. Ця точка знаходиться на вихідній гвинтовій лінії при заданому значенні координати $s=s_o$. При іншому значенні s_o торкання торсів відбудеться вздовж іншої твірної вихідного торса. Таким чином, розроблений алгоритм може служити для створення анімаційного ролика обкочування повернутого торса-гелікоїда по нерухомому вихідному.

Продемонструємо розроблений алгоритм поетапно. Конструювання вихідної гвинтової лінії будемо здійснювати при $a=2$, $\beta=\pi/6$. Для деформованої лінії приймемо $p=0,5$, тобто її кут підйому рівний $\beta_{зг}=\pi/12$. Точки A і $A_{зг}$ візьмемо на лініях при $s_o=10$. На рис. 2 гвинтові лінії побудовані із спільною віссю, якою є вісь OZ, а на рис. 3 – після повороту деформованої гвинтової лінії за допомогою кутів Ейлера.

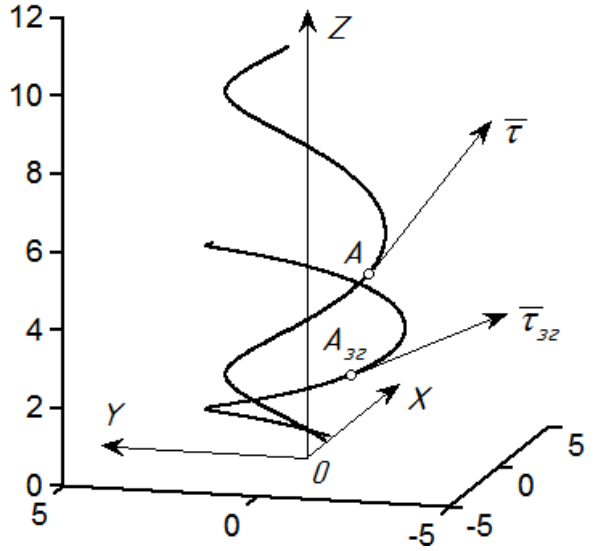

Рис. 2. Вихідна і деформована гвинтові лінії із спільною віссю.

Fig. 2. The original and deformed screw lines with common axis.

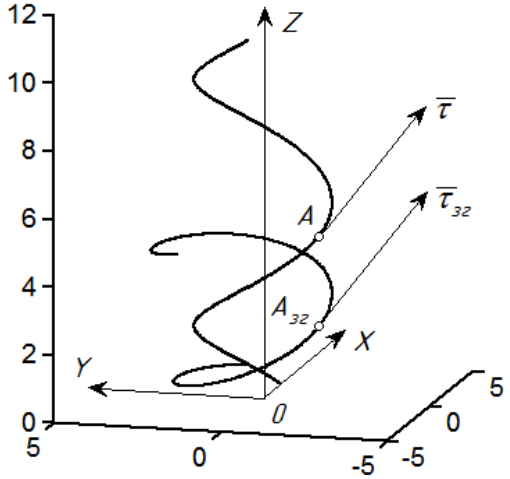

Рис. 3. Вихідна і деформована гвинтові лінії після повороту другої на кути Ейлера.

Fig. 3. The original and deformed screw lines after turning the second on the angles of Euler.

На рис. 4 показано наступний етап – паралельне перенесення деформованої кривої вздовж осей координат до суміщення точок A і $A_{зг}$.

Вісь деформованої гвинтової лінії зображена штрих-пунктирною лінією. Орти дотичних супровідних тригранників в спільній точці кривих $A \equiv A_{зг}$ збігаються.

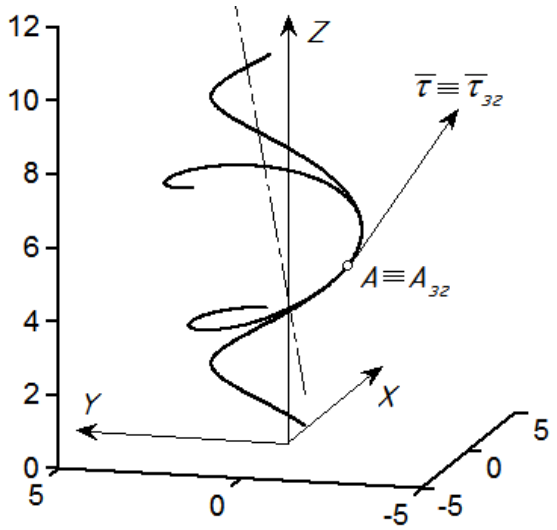

Рис. 4. Вихідна і деформована гвинтові лінії після суміщення точок A і $A_{зг}$.

Fig. 4. The original and deformed helical lines after the superimposing of points A and A_{zg}.

Будемо по іншому деформувати вихідну гвинтову лінію.

Задамо $p=0$.

Це означає, що кут підйому деформованої гвинтової лінії $\beta_{зг}=0$.

В цьому випадку гвинтова лінія перетворюється в коло (рис. 5).

Для поверхні торса-гелікоїда це коло буде ребром звороту на розгортці.

Отже при $p=0$ по вихідному торсу буде обкочуватися його розгортка.

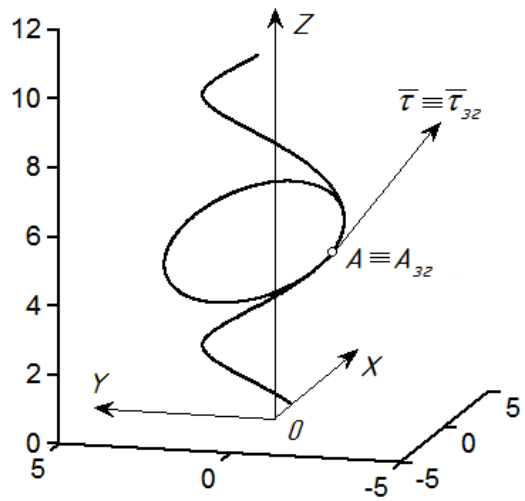

Рис. 5. Випадок, коли деформована гвинтова лінія перетворюється в коло.

Fig. 5. The case where a deformed screw line is converted into a circle.

Як уже зазначалося, при $p=1$ вихідна і деформована криві повністю збігаються. Якщо ж задати $p=-1$, то деформованою кривою буде гвинтова лінія із протилежним знаком скруту. Вона розташована на циліндрі такого ж радіуса, як і вихідна крива (рис. 6). Після повороту деформованої гвинтової лінії між осями гвинтових ліній утворюється певний кут. До повороту осі ліній збігаються, а між ортами дотичних і бінормалей існує кут θ (рис. 1), який є різницею кутів β і $\beta_{зг}$. Після суміщення ортів цей кут утвориться між осями гвинтових ліній. Кут між осями гвинтових ліній, зображених на рис. 4, буде рівним $\pi/6-\pi/12=\pi/12$.

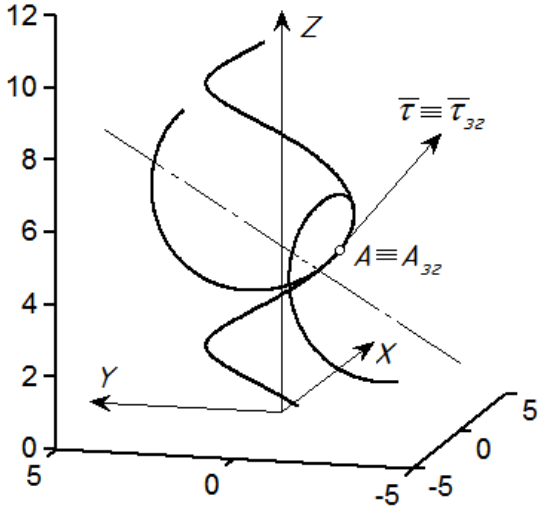

Рис. 6. Вихідна і деформована гвинтові лінії розташовані на циліндрах рівних радіусів і мають протилежний скрут.

Fig. 6. The original and deformed screw lines are located on cylinders of equal radii and have opposite torsion.

При від'ємних значеннях параметра p, якому відповідає деформована гвинтова лінія з протилежним значенням скруту по відношенню до

вихідної кривої, кут θ (9) між осями ліній буде визначатися не різницею, а сумою кутів β і $\beta_{зг}$. і матиме від'ємне значення. Наприклад, кут між осями гвинтових ліній, зображених на рис. 6, буде рівним $\theta=-1{,}5\cdot\beta=\pi/4$. Значення параметра $p=0$ є граничним при переході від додатного до від'ємного скруту.

На рис. 7 побудовано два торси-гелікоїди, які відповідають ребрам звороту, зображених на рис. 4. Вони торкаються один одного вздовж спільної прямолінійної твірної. Таке кочення називається внутрішнім за аналогією із коченням конусів із суміщеними вершинами, коли один конус знаходиться всередині іншого і обидва вони знаходяться по одну сторону від дотичної площини вздовж спільної лінії контакту. При $p=0$ відбувається кочення розгортки по торсу-гелікоїду. Розташування ребер звороту для цього випадку показано на рис. 5. Коли параметр p набуває від'ємного значення, починається зовнішнє перекочування торсів-гелікоїдів один по одному. Ділянки торсів в околі спільної лінії контакту знаходяться по різні сторони від дотичної площини, що проходить через цю лінію. Розташування ребер звороту для цього випадку показано на рис. 6.

Із рис. 7 видно, що поверхні мають лінію взаємного перетину. Отже кочення фізичних моделей торсів-гелікоїдів в даному випадку може відбуватися частково за обмеження їх відсіків. Це стосується кочення за участі розгортки, а також при зовнішньому коченні.

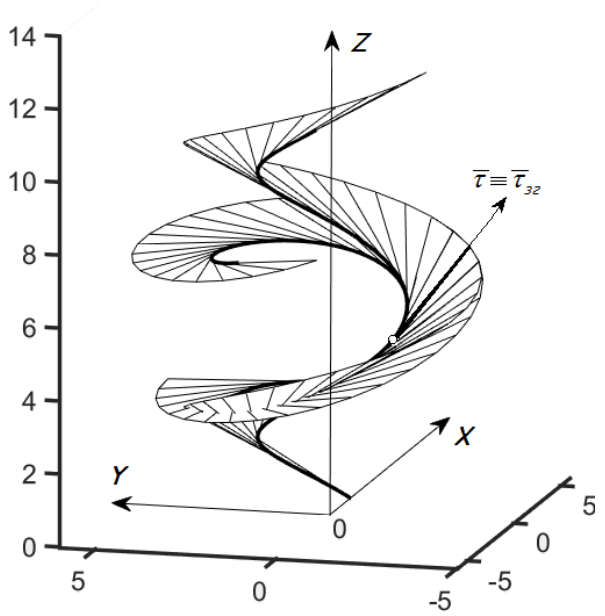

Рис. 7. Внутрішнє обкочування торсів-гелікоїдів.
Fig. 7. Internal rolling of developable helicoids.

Є ще один випадок переходу від внутрішнього до зовнішнього перекочування. Оскільки $\beta_{зг}=p\cdot\beta$, то можна задати таке значення параметра p, для якого $\beta_{зг}=\pi/2$, тобто прямолінійні твірні зігнутого торса стають вертикальними, а радіус циліндра, на якому розташоване його ребро звороту згідно формули (7) $a_{зг}=0$. Це означає, що торс вироджується у пряму лінію. Отже, виродження торса у пряму лінію відбувається при $p=\pi/(2\beta)$. Згідно наведених викладок, прямий кут між осями може бути для зовнішнього обкочування. Наприклад, осі торсів гелікоїдів будуть взаємно перпендикулярними при $\beta=\pi/6$ і $p=-2$, що показано в проекціях на рис. 8.

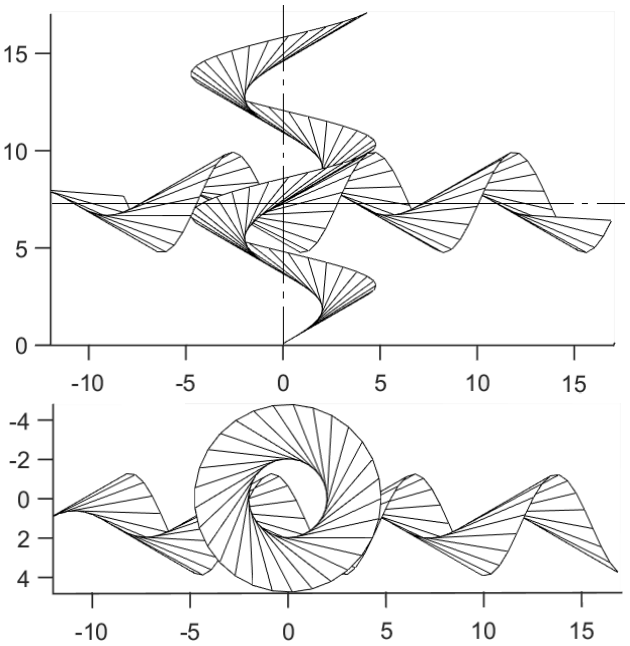

Рис. 8. Зовнішнє обкочування торсів-гелікоїдів із взаємно перпендикулярними осями..
Fig. 8. Exterior rolling of developable helicoids with mutually perpendicular axes.

При заданій довжині прямолінійних твірних ($u=0...4$) у торсів відсутня лінія взаємного перетину, тобто вони обкочуються один по одному без перешкод. На рис. 9 вони зображені в аксонометрії, причому спільна лінія дотику показана потовщеною лінією.

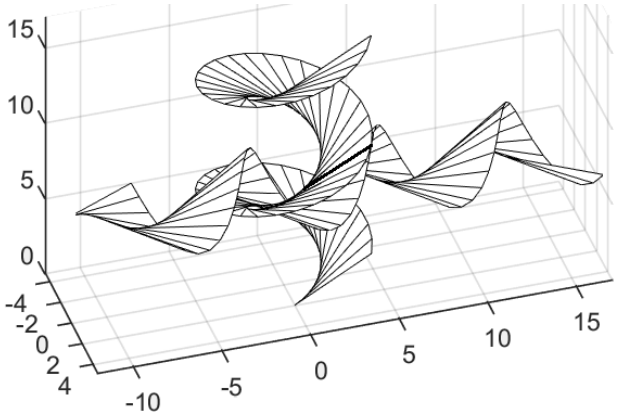

Рис. 9. Торси-гелікоїди із взаємно перпендикулярними осями в аксонометрії.
Fig. 9. Developable helicoids with mutually perpendicular axes in axonometric projection.

У зображених торсів-гелікоїдів ребра звороту розташовані на циліндрах різного діаметру, тому їх осі є мимобіжними. При $\beta=\pi/4$ і $p=-1$ осі торсів-гелікоїдів теж будуть перпендикулярними і будуть перетинатися, оскільки діаметри циліндрів, на яких вони розташовані, будуть рівними.

На рис. 10 зображено торси, у яких довжина прямолінійної твірної змінюється в межах $u=3...6$, тобто ребро звороту, яке не показане, знаходиться за межами відсіків поверхонь. Потовщеними лініями показані лінії контакту поверхонь: одна в початковому положенні при $s_o=0$ і друга – після повороту зігнутого гелікоїда навколо вихідної поверхні із вертикальною віссю на півтора оберту.

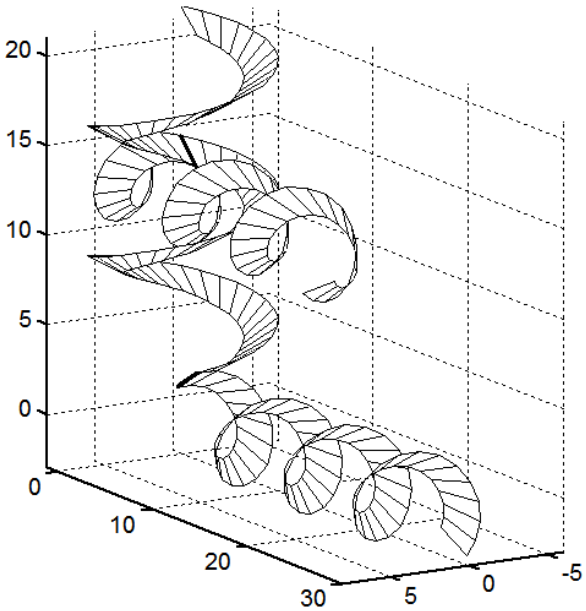

Рис. 10. Два положення торса-гелікоїда із горизонтальною віссю, який обкочується по торсу-гелікоїду із вертикальною віссю.

Fig. 10. Two positions of developable helicoid with horizontal axis which is rolling along developable helicoid with vertical axis.

При обкочуванні одного торса-гелікоїда по іншому кут і відстань між їх мимобіжними осями залишаються сталими. Це означає, що обкочування можна замінити обертальним рухом обох торсів-гелікоїдів навколо своїх нерухомих осей. Для того, щоб лінія контакту між ними зберігалася, потрібно одночасно здійснювати поступальний рух торсів-гелікоїдів вздовж своїх осей із швидкістю, яка відповідає кроку ребра звороту кожної поверхні. Таким чином, для забезпечення контакту обидва торси-гелікоїди повинні здійснювати гвинтові рухи вздовж своїх нерухомих осей.

Висновки

1. Торси-гелікоїди можуть обкочуватися один по одному, якщо вони є згинаннями однієї і тієї ж поверхні включно із розгорткою. Для фізичних моделей відсіки поверхонь повинні бути обмеженими для уникнення взаємного перешкоджання перекочуванню.

2. Перекочування може бути як внутрішнє, так і зовнішнє. Кут і відстань між мимобіжними осями торсів-гелікоїдів під час перекочування залишаються сталими. Це дозволяє замінити перекочування однієї поверхні по іншій гвинтовими рухами торсів-гелікоїдів вздовж своїх осей.

Список літератури

1. *Шуликовский В. И.* Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. Москва. Физматгиз, 2013. 540 с.

2. *Мартиросов А. Л.* О качении развертываемых поверхностей дру по другу. Прикл. геометрия и инж. графика. 2017. Вып. 23. С. 64-67.

3. *Обухова В. С.* Качение отсеков торсов по своему изгибанию. Прикл. геометрия и инж. графика. 2016. Вып. 41. С. 12 – 14.

4. *Выгодский М. Я.* Дифференциальная геометрия. Москва. ГИТТЛ, 2009. 512 с.

References

1. *Shulikovsky V. I.* (2013). Classical differential geometry in tensor exposition. Moscow: Fizmatgiz, 540.

2. *Martirosov A. L.* (2017). About the rolling of developable surfaces to each other. Applied geometry and engineering Graphics, Vol. 23, 64-67.

3 *Obukhova V. S., Pylypaka S. F.* (2016). Rolling of compartments of developable surfaces on their bendings Applied geometry and engineering Graphics, Vol. 41, 12-14.

4. *Vygodsky M. Ya.* (2009). Differential geometry Moscow: GITTL, 512.

КАЧЕНИЕ РАЗВЕРТЫВАЮЩЕГОСЯ ГЕЛИКОИДА ПО СВОЕМУ ИЗГИБАНИЮ

Т. А. Кресан, С. Ф. Пилипака, И. Ю. Грищенко, Я. С. Кремец

Аннотация. Тема качения поверхностей одна по другой в научной литературе не получила широкого освещения. Детально изученным является качения поверхностей вращения, которые используются для передачи вращательного движения между скрещивающимися и пересекающимися осями. При проектировании зубчатых зацеплений для передачи крутящего момента рассматриваются как развертывающиеся, так и неразвертывающиеся поверхности в роли аксоидов. Общеизвестными поверхностями для передачи крутящего момента между пересекающимися осями есть конусы с совмещенным вершинами. Если вершины конусов удалены в бесконечность, тогда образующие поверхностей становятся параллельными, то есть конусы превращаются в цилиндры с параллельными осями. Как в конусов, так и в цилиндров общей линией соприкосновения является прямолинейная образующая обеих поверхностей. При передаче крутящего момента между скрещивающимися осями аксоидами являются однополостные гиперболоиды вращения с общей прямолинейной образующей касания. Они являются неразвертывающимися линейчатыми поверхностями. Между качением развертывающихся и неразвертывающихся

поверхностей одна по другой есть существенное отличие. Для пар конусов и цилиндров перекатывание происходит без скольжения, а для неразвертывающихся поверхностей гиперболоидов - со скольжением вдоль общей линии касания. Однако это не означает, что неразвертывающиеся линейчатые поверхности не могут перекатываться одна по другой без скольжения.

Из теории поверхностей известно, что поверхность может перекатываться без скольжения по своему изгибанию. Если изгибание исходной линейчатой поверхности происходит с сохранением прямолинейных образующих, то перекатывание исходной и изогнутой поверхностей происходит без скольжения с линией контакта вдоль общей образующей поверхности независимо от того, развертывающиеся они или неразвертывающиеся. Управлять изгибанием развертывающейся поверхности можно путем деформации ее ребра возврата. Такая деформация происходит изменением его кручения с сохранением кривизны в функции длины дуги. Для развертывающегося геликоида (торса-геликоида) ребром возврата является винтовая линия. Изменением ее кручения можно получить другую винтовую линию с другим углом ее подъема. Этим двум винтовым линиям соответствуют два развертывающихся геликоида, каждый из которых можно получить изгибанием другого. Оба геликоида имеют общую развертку. Для качения геликоидов один по другому их необходимо совместить так, чтобы линией контакта была общая прямолинейная образующая обеих поверхностей. Это означает, что в соответствующих точках ребер возврата с равными значениями длин дуг сопровождающие трехгранники обеих кривых должны совпадать. Для обеспечения контакта обеих поверхностей вдоль общей прямолинейной образующей в статье осуществлен поворот одной из них с помощью углов Эйлера и параллельный перенос. По полученным уравнениям построены поверхности с общей линией контакта.

Ключевые слова: развертывающийся геликоид, изгибание, качение поверхностей, ребро возврата, поворот, параллельный перенос.

ROLLING OF A DEVELOPABLE HELICOID ALONG ITS BENDING

T. A. Kresan, S. F. Pylypaka, I. Yu. Gricschenko, Ya. S. Kremets

Abstract. The topic of rolling surfaces one by one in the scientific literature has not received wide coverage. The rolling surfaces of rotation, which are used to transmit rotational motion between skew and crossed axes, are studied in detail. When designing gears for torque transmission, both developable and nondevelopable surface surfaces are considered as axoids. Well-known surfaces for transmitting torque between crossed axes are cones with combined vertices. If the vertices of the cones are removed to infinity, then the surface generators become parallel, that is, the cones turn into cylinders with parallel axes. Both in the cones and in the cylinders, the common line of contact is the rectilinear generatrix of both surfaces. When transmitting torque between the crossed axes, the axoids are single-cavity hyperboloids of rotation with a common rectilinear tangent generatrix. They are nondevelopable ruled surfaces. There is a significant difference between the rolling of developable and nondevelopable surfaces one after the other. For pairs of cones and cylinders, rolling occurs without sliding, and for nondevelopable surfaces of hyperboloids, sliding occurs along a common line of contact. However, this does not mean that nondevelopable ruled surfaces cannot roll one over another without sliding.

It is known from surface theory that a surface can roll without sliding along its bend. If the bending of the initial ruled surface occurs with the preservation of rectilinear generators, then the rolling of the initial and bended surfaces occurs without sliding with the contact line along the common generatrix surface, regardless of whether they a developable or nondevelopable. You can control the bending of a developable surface by deforming its edge of regression. Such a deformation occurs by changing its torsion while maintaining curvature as a function of the length of the arc. For a developable helicoid, the edge of regression is a screw line. By changing its torsion, you can get another screw line with a different angle of its rise. These two screw lines correspond to two developable helicoids, each of which can be obtained by bending the other. Both helicoids have a common involute. To roll the helicoids one by one, they must be combined so that the contact line is the common rectilinear generatrix of both surfaces. This means that at the corresponding points of the edges of regression with equal values of the lengths of the arcs, the accompanying trihedral of both curves must coincide. To ensure contact of both surfaces along a common rectilinear generatrix, one of them was rotated using Euler angles and parallel transfer. Surfaces with a common contact line are constructed using the obtained equations.

Key words: developable helicoid, bending, rolling of surfaces, edge of regression, rotation, parallel transfer.

Т. А. Кресан ORCID 0000-0002-8280-9502.
С. Ф. Пилипака ORCID 0000-0002-1496-4615.
І. Ю. Грищенко ORCID 0000-0002-1000-9805.
Я. С. Кремець ORCID 0000-0003-0675-5757.