Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2020, Vol. 11, No 2, 49-57
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

DOI: 10.31548/machenergy.2020.02.049-057

УДК 514.18

РОЗРАХУНОК ГРАВІТАЦІЙНОГО СПУСКУ, УТВОРЕНОГО ПОВЕРХНЕЮ КОСОГО ЗАКРИТОГО ГЕЛІКОЇДА

Т. А. Кресан

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Стаття з спеціальності: 131 – прикладна механіка.

Кореспонденція авторки: tanyakresan@i.ua.

Історія статті: отримано – січень 2019, акцептовано – квітень 2020.
Бібл. 9, рис. 5, табл. 0.

Анотація. В статті розглянуто теоретичні питання проектування гравітаційних спусків. Переміщення вантажів або матеріалу по них здійснюється під дією сили власної ваги. Такий транспорт широко використовується на вугільних шахтах, рудниках, збагачувальних фабриках. Транспортування матеріалу може здійснюватися по спеціальних поверхнях: настилах, каскадних та гвинтових спусках, трубах, жолобах тощо. Характер руху частинки залежить від особливостей конструкції таких спусків.

Найпростіше розрахувати спуск у вигляді похилої площини. Частинка рухається по ньому по прямолінійній траєкторії, яка є лінією найбільшого нахилу. Якщо робочою поверхнею спуску є криволінійна поверхня, то траєкторією руху буде крива лінія. В цьому випадку виникає додаткова сила інерції – відцентрова, величина якої залежить від кривини траєкторії. Ця сила може відхиляти траєкторію руху від лінії найбільшого нахилу, а також збільшувати тиск частинки на поверхню, що призводить до збільшення сили тертя. При складанні диференціальних рівнянь руху потрібно враховувати всі прикладені сили.

В роботі розглянуто конструювання гвинтового спуску, у якого робочою поверхнею є нерозгортний (косий) гелікоїд. Щоб не складати диференціальних рівнянь руху частинки, в роботі запропоновано описати її рух після стабілізації, тобто після того, як вона починає рухатися по гвинтовій лінії із сталою швидкістю. Диференціальне рівняння руху частинки в цьому випадку заміняється рівняннями рівноваги прикладених до неї сил в проекціях на осі координат. Рівняння рівноваги сил складено в проекціях як на осі нерухомої системи координат, так і на орти рухомого тригранника Дарбу. В обох випадках отримано однакові аналітичні залежності. Вони дозволяють конструювати спуск за заданою розрахунковою швидкістю руху частинки при відомому коефіцієнті тертя. Одну і ту ж розрахункову швидкість руху частинки при заданому коефіцієнті тертя можна забезпечити поверхнею косого гелікоїда із різними конструктивними параметрами.

Ключові слова: гравітаційний спуск, сила ваги, рівняння рівноваги сил, косий гелікоїд, стаціонарний режим.

Постановка проблеми

Для переміщення вантажів вниз можна скористатися силами гравітації таким чином, щоб переміщення вантажів або матеріалу вниз здійснювалося під дією сили власної ваги із допустимою заданою швидкістю. Транспортування матеріалу здійснюється по спеціальних шорстких поверхнях, які загальмовують їх швидкість опускання. Деякі спуски можуть мати дві ділянки. На одній ділянці з більшим кутом нахилу вантаж рухається швидше, а на другій із меншим кутом – рухається повільніше і згодом зупиняється. Використовуються також інерційні конвеєри – вібраційний і хитний. У вібраційного конвеєра частота хитання велика, а амплітуда мала. У хитного конвеєра навпаки – частота хитань менша, а амплітуда велика. В першому випадку переміщення відбувається мікрокидками з відривом частини вантажу від поверхні, а в другому – здійснюється силами інерції без відриву від поверхні.

У гравітаційного транспорту є переваги перед іншими видами транспорту: простота, відсутність складних пристроїв, висока продуктивність, дешевизна. Є і суттєві недоліки: інтенсивний знос поверхні транспортування, пошкодження вантажу, залежність роботи від властивостей робочої поверхні спуску, вологості, інших кліматичних умов.

Аналіз останніх досліджень

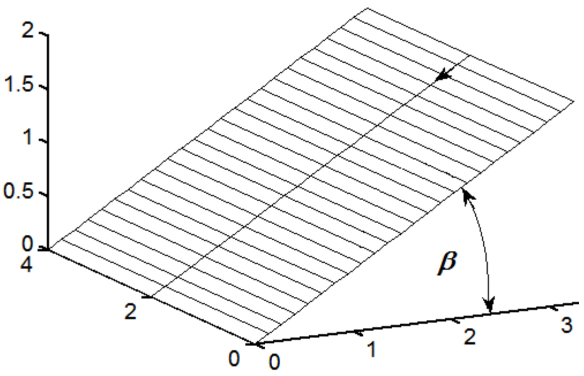
В роботі [1] робочою поверхнею гвинтового спуску є гвинтовий коноїд, по якому частинка починає свій рух по лінії найбільшого нахилу. По мірі розгону вона віддаляється від осі коноїда і згодом може зупинитися, оскільки кут нахилу траєкторії до горизонтальної площини зменшується і згодом стає меншим від кута тертя [2-5]. Щоб цього не відбувалося, поверхню гвинтового коноїда обмежують вертикальною стінкою, яка є відсіком співвісного із коноїдом циліндра. Загальні підходи до розрахунку і проектування гравітаційного самопливного транспорту розкрито в джерелах [6-9].

Мета досліджень

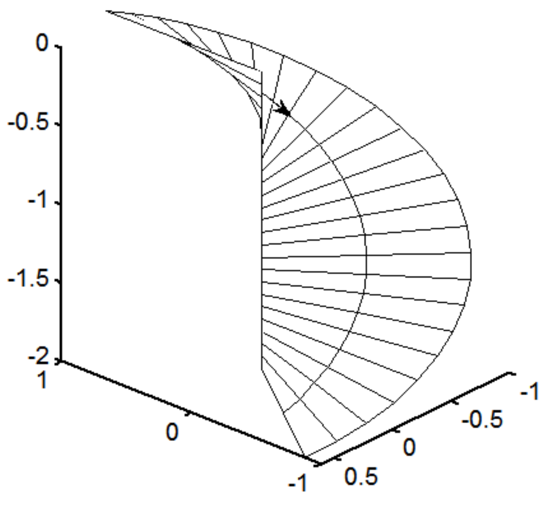
Розробити аналітичний опис руху вантажу на прикладі матеріальної частинки по поверхні косого (нерозгортного) гелікоїда після стабілізації руху, тобто після того, як швидкість частинки стане постійною, а траєкторією буде гвинтова лінія.

Результати досліджень

Рух частинки по гвинтовій поверхні можна певним чином порівнювати із її рухом по похилій площині (рис. 1). Для того, щоб рух вантажу був можливим по похилій площині, кут нахилу β не повинен бути меншим від кута тертя (рис. 1,а).



а



б

Рис. 1. До порівняння руху частинки по площині: а) і поверхні гвинтового коноїда; б), у якого на початковому етапі напрям руху збігається із напрямом лінії найбільшого нахилу поверхні.

Fig. 1. For comparing the motion of a particle on the plane: a) and the surface of the helical conoid; b) in which at the initial stage the direction of motion coincides with the direction of the line of greatest slope of the surface

Якщо кут β дорівнює кутові тертя, то частинка буде рухатися по прямій лінії, яка є лінією найбільшого нахилу площини, із сталою швидкістю, яку їй було надано на початку руху.

Для гвинтового коноїда, рух по якому нами було розглянуто в попередній роботі [1], частинка теж починає свій рух по лінії найбільшого нахилу (рис. 1,б), якою є гвинтова лінія, але під дією відцентрової сили починає віддалятися від осі. Тому гвинтова поверхня була нами обмежена бічною стінкою (рис. 2).

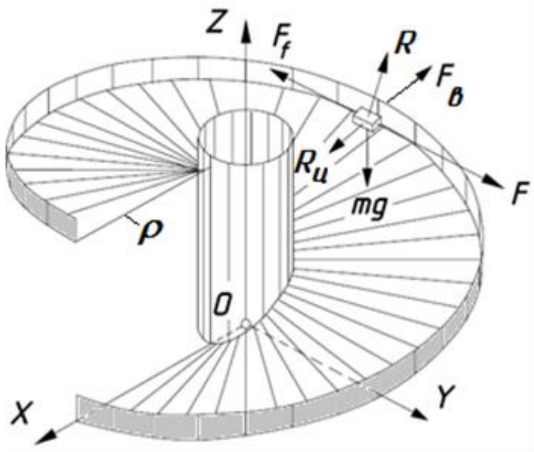
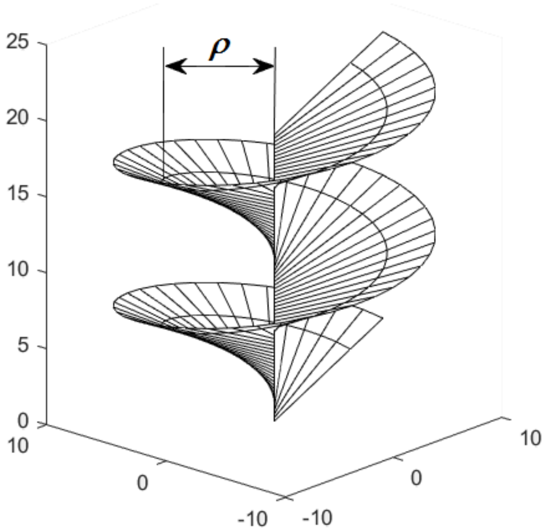


Рис. 2. Схема прикладених до частинки сил: F – рушійна сила (складова сили ваги); R – реакція поверхні коноїда; $R_ц$ – реакція поверхні циліндра; F_f – сила тертя; $F_в$ – відцентрова сила; mg – вага частинки.

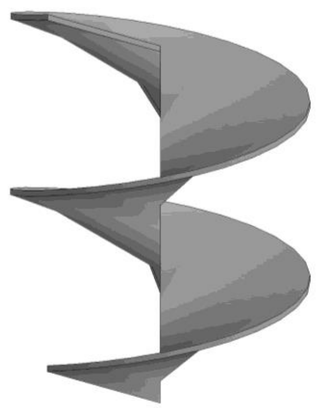
Fig. 2. Scheme of applied force to the particle: F – driving force (component of the force of gravity); R is the reaction surface of the conoid; $R_ц$ is the reaction of the cylinder surface; F_f – friction force; $F_в$ – centrifugal force; mg is the weight of the particle.

По такій складеній поверхні частинка рухається по гвинтовій лінії і одночасно ковзає по двох поверхнях. В цьому випадку відстань ρ від осі коноїда до гвинтової лінії – траєкторії руху частинки – є наперед заданою. Після розгону швидкість руху частинки стабілізується і стає сталою. Після стабілізації рух частинки по гвинтовій поверхні стає подібним до руху по похилій площині, встановленій під кутом тертя до горизонтальної площини: в обох випадках швидкість V стала і кут β нахилу траєкторії руху теж сталий. Відмінність полягає в тому, що в другому випадку траєкторією руху частинки є гвинтова лінія із сталою кривиною. В цьому випадку виникає відцентрова сила $F_в=mV^2k$, де m – маса частинки, V – її швидкість, k – кривина траєкторії. Отже, виникає додаткова сила сталої величини $F_в$, напрям дії якої визначений – паралельно до горизонтальної площини від осі гвинтової лінії (рис. 2). Для складеної поверхні (4) у праці [1] було знайдено аналітичні залежності для знаходження швидкості руху частинки в залежності від конструктивних параметрів гвинтового спуску і коефіцієнтів тертя частинки по складових поверхнях.

Наше дослідження присвячено гвинтовому спуску, який утворений нерозгортним закритим або косим гелікоїдом. Поверхня утворена гвинтовим рухом прямолінійної твірної, яка нахилена під сталим кутом β до горизонтальної площини і перетинає вертикальну вісь (рис. 3,а). Швидкість підйому прямолінійної твірної вздовж вертикальної осі *OZ* залежить від значення гвинтового параметра *b*, який визначає крок *H* будь-якої гвинтової лінії поверхні за формулою $H=2\pi b$.



а



б

Рис. 3. Гелікоїдальні лінійчаті поверхні: а) аксонометрія косого гелікоїда; б) твердотільна модель.

Fig. 3. Helix ruled surfaces: a) axonometry of skew helicoid; b) solid model.

На аксонометрії поверхні (рис. 3,а) гвинтовою лінією на відстані ρ від осі позначена ймовірна траєкторія руху частинки при стаціонарному режимі. На відміну від конструкції спуску, зображеного на рис. 2, ця відстань не є заданою, тобто її потрібно знайти. В цьому полягає складність і принципова відмінність між знаходженням закону руху частинки по складеній поверхні (рис. 2) і по поверхні косого гелікоїда (рис. 3).

Для аналітичного опису руху частинки по поверхні складаються диференціальні рівняння. Вони ґрунтуються на другому законі Ньютона, який у векторному вигляді записується наступним чином:

$$m\bar{a} = \bar{F}\,, \tag{1}$$

де m – маса частинки, $\bar{a}$ – вектор прискорення, $\bar{F}$ – результуючий вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є сила ваги mg (g=9,81 м/с^2), реакція R поверхні, спрямована вздовж нормалі до поверхні (рис. 2) та сила тертя F_f, спрямована в протилежну сторону від напрямку руху. Під час перехідного процесу, тобто на етапі розгону частинки, швидкість V зростає, тобто виникає прискорення. Оскільки прискорення визначається подвійним диференціюванням шляху по часу t, то в загальному випадку рівняння (1) є диференціальним рівнянням другого порядку.

Після стабілізації руху швидкість V стає постійною, тобто прискорення дорівнює нулю і рівняння (1) перетворюється у рівняння рівноваги прикладених сил. До перерахованих сил додається ще відцентрова сила інерції $F_в$, яка при перехідному процесі була врахована у виразах прискорення:

$$F_в = mV^2 k\,, \tag{2}$$

де k – кривина траєкторії.

Оскільки траєкторією руху частинки в нашому випадку буде гвинтова лінія, то її кривина буде сталою, отже, і відцентрова сила теж буде сталою. Напрям її дії теж відомий – вздовж головної нормалі гвинтової лінії від осі обертання, тобто по перпендикуляру від осі обертання. Всі сили потрібно спроекціювати на осі просторової системи координат. В результаті ми отримаємо три рівняння рівноваги сил, тобто сума прикладених до частинки сил на кожну із осей буде рівною нулю. Таким чином, для знаходження траєкторії і швидкості руху частинки при стаціонарному процесі можна обійтися без розв'язування диференціальних рівнянь, що значно спрощує задачу.

Просторова система координат, на осі якої будемо проекціювати прикладені до частинки сили, може бути як нерухомою, так і рухомою. При розв'язуванні задач здебільшого користуються нерухомою системою *OXYZ*. В ній потрібно знайти напрям кожної із прикладених сил. Напрям окремої сили може змінюватися в кожен момент руху по відношенню до нерухомої системи координат. Рухому систему вибирають так, щоб напрям окремої сили під час руху частинки не змінювався в ній. Щоправда, для всіх сил цього зробити не вдасться.

Рухому систему прямокутних координат розташовують так, щоб один орт завжди був дотичний до траєкторії руху частинки. Тоді сила тертя F_f, яка завжди спрямована в протилежну сторону від напряму руху, матиме сталий напрям в рухомій системі. Позначимо орт дотичної літерою τ. Другий орт рухомої системи спрямований по нормалі до поверхні. Позначимо його літерою N. Тоді реакція R поверхні збігатиметься під час руху частинки із напрямом нормалі N, тобто теж матиме сталий напрям в системі рухомої системи. На рис. 4 така рухома система побудована в точці A розміщення частинки на циліндричній поверхні. Третій орт P є перпендикулярним до ортів τ і N, тобто його можна знайти, як результат векторного добутку векторів τ і N. Два орти τ і P розташовані в дотичній до поверхні площині μ (рис. 4). Якщо матеріальній частинці надати початкової швидкості V_o, то вона буде рухатися по поверхні по певній криволінійній траєкторії. Разом із нею буде рухатися рухома система координат τNP, яка називається тригранником Дарбу, причому його вершина буде збігатися з точкою A розташування частинки на поверхні. Дві сили – сила тертя F_f і сила реакції R поверхні матимуть сталий напрям дії в триграннику Дарбу, а сила ваги mg – змінний, тоді як в нерухомій системі координат – сталий. Ще одна сила – відцентрова сила інерції $F_в$ – теж матиме сталий напрям, але уже у другій рухомій системі – супровідному триграннику Френе траєкторії.

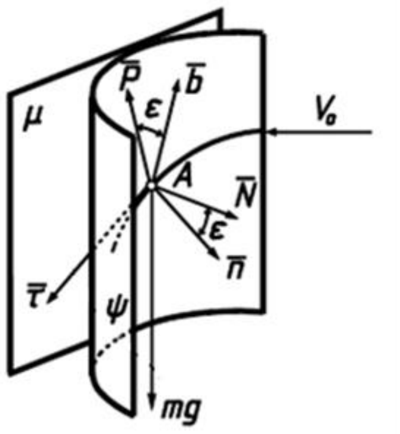


Рис. 4. Взаємне розташування рухомих тригранників Дарбу і Френе в точці A траєкторії руху частинки по поверхні.

Fig. 4. The relative position of the Darboux triad and Frenet trihedral at point A of the trajectory of motion of the particle on the surface.

Положення тригранника Френе зумовлене не формою поверхні, а формою кривої, в тому числі на поверхні. Якщо тригранник Дарбу може бути побудований тільки за наявності поверхні і кривій на ній, то тригранник Френе – тільки за наявності кривої. Його орт дотичної до кривої τ збігається із однойменним ортом тригранника Дарбу, орт головної нормалі n завжди спрямований до центра кола кривини кривої, а орт бінормалі b перпендикулярний до них обох, тобто може бути отриманий, як результат векторного множення ортів τ і n. Між ортами N і n та P і b (рис. 4) попарно існує кут ε, якого можна знайти, якщо відомі рівняння поверхні і лінії на ній. Для геодезичної лінії на поверхні кут ε у всіх точках кривої дорівнює нулю. Для гвинтової лінії на поверхні гелікоїда він є сталим. Таким чином, для складання рівноваги діючих на частинку сил беремо до уваги наступне.

Якщо сили проекціюємо на нерухому систему координат, то в загальному випадку отримаємо три проекції окрім сили ваги, яка діє вздовж осі OZ, тобто має одну проекцію.

Якщо сили проекціюємо на рухому систему координат тригранника Дарбу, то тільки сила ваги mg має три проекції, сила тертя F_f і сила реакції R – одну проекцію, відцентрова сила інерції $F_в$ – дві проекції (на орти N і P). Складемо рівняння рівноваги прикладених до частинки сил на нерухому систему координат, в якій описана поверхня нерозгортного гелікоїда.

Параметричні рівняння нерозгортного гелікоїда мають наступний вигляд:

$$X = \rho\cos\alpha; \quad Y = \rho\sin\alpha; \quad Z = b\alpha + \rho\,\mathrm{tg}\beta, \tag{3}$$

де b, β – гвинтовий параметр і кут нахилу твірних гелікоїда до горизонтальної площини – сталі величини; ρ – відстань від осі поверхні до точки на ній і α – кут повороту точки навколо осі – незалежні змінні поверхні.

При $\rho=const$ на поверхні косого гелікоїда буде задана гвинтова лінія. Нам потрібно знайти таке значення відстані ρ, при якому гвинтова лінія буде траєкторією ковзання частинки.

Знайдемо проекції прикладених до частинки сил на осі нерухомої системи координат. Почнемо із сили ваги mg, яка має сталий напрям в нерухомій системі координат (вона спрямована паралельно осі OZ в протилежну сторону її напряму). Її одиничний напрямний вектор має наступні проекції на осі OX, OY і OZ (або напрямні косинуси): $\{0,\ 0,\ -1\}$. Проекція сили на вісь визначається множенням її величини на відповідний напрямний косинус. Отже проекції сили ваги запишуться:

– на вісь OX: $$0; \tag{4}$$
– на вісь OY: $$0; \tag{5}$$
– на вісь OZ: $$-mg. \tag{6}$$

Для знаходження відцентрової сили інерції за формулою (2) потрібно мати вираз кривини гвинтової лінії – траєкторії руху частинки. Для цього потрібно мати перші і другі похідні рівнянь (3) при $\rho=const$, тобто частинні похідні по змінній α:

$$x' = -\rho\sin\alpha; \quad x'' = -\rho\cos\alpha; \quad y' = \rho\cos\alpha; \quad y'' = -\rho\sin\alpha; \quad z' = b, \quad z'' = 0. \tag{7}$$

Оскільки при $\rho=const$ рівняння (3) описують уже не поверхню, а лінію, то у виразах похідні позначено через строчні літери, як зазвичай це прийнято для ліній. За відомою формулою [6] знаходимо кривину k гвинтової лінії:

$$k = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}} = \frac{\rho}{b^2 + \rho^2}. \tag{8}$$

Підстановкою (8) у вираз (2) знаходимо:

$$F_в = mV^2 k = \frac{mV^2\rho}{b^2 + \rho^2}, \tag{9}$$

Напрям дії сили (9) задається двома першими рівняннями (3), тобто напрямні косинуси будуть: $\{\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0\}$. Відповідно проекції сили (9) на осі запишуться:

– на вісь OX: $$\frac{mV^2\rho}{b^2 + \rho^2}\cos\alpha; \tag{10}$$
– на вісь OY: $$\frac{mV^2\rho}{b^2 + \rho^2}\sin\alpha; \tag{11}$$
– на вісь OZ: $$0. \tag{12}$$

Реакція поверхні R є невідомою силою, яку потрібно знайти. Вона спрямована вздовж нормалі N до поверхні. Нормаль до поверхні знаходять як векторний добуток двох векторів, що розташовані в дотичній до поверхні площині і проходять через задану точку – в нашому випадку через точку розташування частинки. За такі вектори приймають частинні похідні рівнянь поверхні, які є дотичними до координатних ліній. Вектор дотичної до гвинтової лінії у нас уже є – це перші похідні по параметру α у виразах (7). Запишемо частинні похідні рівнянь (3) по змінній ρ, при цьому похідні позначимо із індексом, щоб можна їх було відрізнити між собою:

$$x'_\rho = \cos\alpha; \quad y'_\rho = \sin\alpha; \quad z'_\rho = \operatorname{tg}\beta. \tag{13}$$

Знаходимо векторний добуток векторів дотичних (7) і (13):

$$\overline{N} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x'_\rho & y'_\rho & z'_\rho \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} b\sin\alpha - \rho\cos\alpha\ \operatorname{tg}\beta; \\ -b\cos\alpha - \rho\sin\alpha\operatorname{tg}\beta; \\ \rho \end{Bmatrix}. \tag{14}$$

Вектор (14) не є одиничним. Приведемо його до одиничного і проекції помножимо на R. Після цього проекції сили реакції на осі запишуться:

– на вісь OX: $$R\frac{b\sin\alpha - \rho\cos\alpha\ \operatorname{tg}\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + \rho^2}}\cos\beta; \tag{15}$$

– на вісь OY: $$-R\frac{b\cos\alpha + \rho\sin\alpha\ \operatorname{tg}\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + \rho^2}}\cos\beta; \tag{16}$$

– на вісь OZ: $$R\frac{\rho\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + \rho^2}}. \tag{17}$$

Остання прикладена сила – сила тертя F_f. Вона визначається добутком реакції R на коефіцієнт тертя f: $F_f=fR$. Спрямована вона в протилежну сторону вектора швидкості V, напрям якого задає дотична до траєкторії. Дотична задана першими похідними (7), причому її напрям є протилежним до вектора швидкості, отже збігається із напрямом дії сили тертя. Приводимо цей вектор до одиничного і після цього записуємо проекції сили тертя на осі:

– на вісь OX: $$-fR\frac{\rho\sin\alpha}{\sqrt{b^2 + \rho^2}}; \tag{18}$$

– на вісь OY: $$fR\frac{\rho\cos\alpha}{\sqrt{b^2 + \rho^2}}; \tag{19}$$

– на вісь OZ: $$fR\frac{b}{\sqrt{b^2 + \rho^2}}. \tag{20}$$

Сумуємо вирази проекцій по відповідних осях і прирівнюємо до нуля. Наприклад, для осі OX потрібно додати вирази (4), (10), (15) і (18). Після цього отримуємо систему із трьох рівнянь, до якої входять три невідомих величини: швидкість V, відстань ρ і реакція R:

$$\begin{aligned}
&\frac{mV^2\rho}{b^2+\rho^2}\cos\alpha + R\frac{b\sin\alpha - \rho\cos\alpha\ \operatorname{tg}\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + \rho^2}}\cos\beta - \\
&- fR\frac{\rho\sin\alpha}{\sqrt{b^2+\rho^2}} = 0; \\
&\frac{mV^2\rho}{b^2+\rho^2}\sin\alpha - R\frac{b\cos\alpha + \rho\sin\alpha\ \operatorname{tg}\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + \rho^2}}\cos\beta + \\
&+ fR\frac{\rho\cos\alpha}{\sqrt{b^2+\rho^2}} = 0; \\
&- mg + R\frac{\rho\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + \rho^2}} + fR\frac{b}{\sqrt{b^2+\rho^2}} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Систему (21) можна спростити зважаючи на те, що в кожній точці траєкторії прикладені сили є сталими незалежно від її повороту, тобто від значення кута α. Приймемо його рівним нулю: $\alpha=0$. Після цього система (21) значно спрощується:

$$\begin{aligned}
&\frac{mV^2\rho}{b^2+\rho^2} - R\frac{\rho\ \sin\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + \rho^2}} = 0; \\
&- R\frac{b\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + \rho^2}} + fR\frac{\rho}{\sqrt{b^2+\rho^2}} = 0; \\
&- mg + R\frac{\rho\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta + \rho^2}} + fR\frac{b}{\sqrt{b^2+\rho^2}} = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Після цього «Mathematica» дає наступні розв'язки:

$$\rho = \frac{b\cos\beta}{\sqrt{2}f}\sqrt{1 - f^2 + \sqrt{\frac{4f^2}{\cos^2\beta} + \left(1 - f^2\right)^2}}. \tag{23}$$

$$V = \sqrt{\frac{bg\sin\beta}{\sqrt{2}f}\sqrt{1 - f^2 + \sqrt{\frac{4f^2}{\cos^2\beta} + \left(1 - f^2\right)^2}}}. \tag{24}$$

$$R = \frac{mg}{\sqrt{f^2 + \frac{\cos^2\beta}{2}\left(1 - f^2 + \sqrt{\frac{4f^2}{\cos^2\beta} + \left(1 - f^2\right)^2}\right)}}. \tag{25}$$

Отримані результати дають можливість розрахувати кінематичні параметри руху частинки по косому гелікоїду: відстань ρ, швидкість частинки V, реакцію поверхні R.

Знайдемо вектори одиничних ортів тригранника Дарбу. Напрямні косинуси двох ортів ми вже маємо. Перший – орт дотичної τ, заданий першими похідними (7). Після приведення його до одиничного і зміни напряму вниз отримаємо:

– орт дотичної τ:

$$\left\{\frac{\rho\sin\alpha}{\sqrt{b^2+\rho^2}}; -\frac{\rho\cos\alpha}{\sqrt{b^2+\rho^2}}; -\frac{b}{\sqrt{b^2+\rho^2}}\right\} \tag{26}$$

Другий орт – нормалі N до поверхні. Він визначається векторним добутком (14) і після приведення до одиничного має вигляд:

– орт N нормалі до поверхні:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{b\sin\alpha-\rho\cos\alpha\ \mathrm{tg}\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}\cos\beta;\\ -\dfrac{b\cos\alpha+\rho\sin\alpha\ \mathrm{tg}\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}\cos\beta;\\ \dfrac{\rho\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}\end{array}\right\} \quad (27)$$

Третій орт P визначається векторним добутком векторів (26) і (27) за правилом векторного множення (14), де у другій рядку визначника є проекції (26), а у третьому рядку – проекції (27). Після виконання операції множення отримаємо напрямні косинуси орта P тригранника Дарбу:

– орт P тригранника Дарбу:

$$\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\rho b\sin\alpha\sin\beta+\left(b^2+\rho^2\right)\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{\left(b^2\cos^2\beta+\rho^2\right)\left(b^2+\rho^2\right)}};\\ \dfrac{\rho b\cos\alpha\sin\beta-\left(b^2+\rho^2\right)\sin\alpha\cos\beta}{\sqrt{\left(b^2\cos^2\beta+\rho^2\right)\left(b^2+\rho^2\right)}};\\ -\dfrac{\rho^2\sin\beta}{\sqrt{\left(b^2\cos^2\beta+\rho^2\right)\left(b^2+\rho^2\right)}}\end{array}\right\}' \quad (28)$$

Знайдемо проекції прикладених до частинки сил на орти рухомої системи тригранника Дарбу які задані одиничними векторами (26), (27), (28). Як і у попередньому випадку, почнемо із сили ваги mg. На відміну від нерухомої системи координат, в якій сила ваги проекціюється тільки на одну вісь, в рухомій вона буде проекціюватися на всі три орти тригранника. За правилом знаходження кутів між векторами знаходимо напрямні косинуси між вектором ваги і кожним ортом тригранника Дарбу:

– з ортом τ (26): $$\frac{b}{\sqrt{b^2+\rho^2}}; \quad (29)$$

– з ортом N (27): $$-\frac{\rho\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}; \quad (30)$$

– з ортом P (28): $$\frac{\rho^2\sin\beta}{\sqrt{\left(b^2\cos^2\beta+\rho^2\right)\left(b^2+\rho^2\right)}}. \quad (31)$$

Відповідно сила ваги mg в проекціях на орти тригранника запишеться:

– на орт τ: $$\frac{mgb}{\sqrt{b^2+\rho^2}}; \quad (32)$$

– на орт N: $$-\frac{mg\rho\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}; \quad (33)$$

– на орт P: $$\frac{mg\rho^2\sin\beta}{\sqrt{\left(b^2\cos^2\beta+\rho^2\right)\left(b^2+\rho^2\right)}}. \quad (34)$$

Наступна сила – відцентрова сила інерції спрямована вздовж вектора $\{\cos\alpha,\quad \sin\alpha,\quad 0\}$. Вона проекціюється на орти P і N. Напрямні косинуси між вектором відцентрової сили $F_в$ і вказаними векторами тригранника Дарбу наступні:

– з ортом N (27): $$-\frac{\rho\sin\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}; \quad (35)$$

– з ортом P (28): $$-\frac{\sqrt{b^2+\rho^2}\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}. \quad (36)$$

Відповідно відцентрова сила інерції $F_в$ (9) в проекціях на орти тригранника запишеться:

– на орт τ: $$0; \quad (37)$$

– на орт N: $$-\frac{mV^2\rho}{b^2+\rho^2}\cdot\frac{\rho\sin\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}; \quad (38)$$

– на орт P: $$-\frac{mV^2\rho}{b^2+\rho^2}\cdot\frac{\sqrt{b^2+\rho^2}\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}. \quad (39)$$

Сила реакції R спрямована вздовж орта N, отже її проекції на орти тригранника Дарбу запишуться:

– на орт τ: 0; (40)

– на орт N: R; (41)

– на орт P: 0. (42)

Сила тертя fR спрямована в протилежну сторону орта τ, отже її проекції на орти тригранника Дарбу запишуться:

– на орт τ: $-fR$; (43)

– на орт N: 0; (44)

– на орт P: 0. (45)

Сумуємо прикладені сили вздовж ортів тригранника і отримуємо рівновагу сил в проекції на кожен орт.

Рівновага сил в проекції на орт τ запишеться:

$$\frac{mgb}{\sqrt{b^2+\rho^2}}-fR=0. \quad (46)$$

Рівновага сил в проекції на орт N запишеться:

$$\begin{array}{l}-\dfrac{mg\rho\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}-\\ -\dfrac{mV^2\rho}{b^2+\rho^2}\cdot\dfrac{\rho\sin\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}+\\ +R=0\end{array} \quad (47)$$

Рівновага сил в проекції на орт P запишеться:

$$\begin{array}{l}\dfrac{mg\rho^2\sin\beta}{\sqrt{\left(b^2\cos^2\beta+\rho^2\right)\left(b^2+\rho\right)}}-\\ -\dfrac{mV^2\rho}{b^2+\rho^2}\cdot\dfrac{\sqrt{b^2+\rho^2}\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}=0\end{array}. \quad (48)$$

Із рівняння (46) відразу знаходимо вираз для реакції R поверхні:

$$R=\frac{mgb}{f\sqrt{b^2+\rho^2}}. \quad (49)$$

Із рівняння (48) знаходимо вираз для швидкості V руху частинки:

$$V=\sqrt{g\rho\,\mathrm{tg}\beta}. \quad (50)$$

Підставимо вираз реакції R із (49) і швидкість руху V із (50) у рівняння (47) і отримаємо рівняння, в яке входить одна невідома величина – відстань ρ:

$$-\frac{mg\rho\cos\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}-$$
$$-\frac{mg\rho^2\operatorname{tg}\beta}{b^2+\rho^2}\cdot\frac{\rho\sin\beta}{\sqrt{b^2\cos^2\beta+\rho^2}}+ \quad (51)$$
$$+\frac{mgb}{f\sqrt{b^2+\rho^2}}=0$$

Рівняння (51) можна спростити. Зокрема, його можна скоротити на масу частинки m.

В результаті розв'язання рівняння (51) після його спрощення відносно відстані ρ отримаємо результат, який точно збігається із виразом (23).

Швидкість руху частинки, яку умовно приймемо за деякий вантаж, змінюватиметься по мірі її опускання по поверхні косого гелікоїда: вона зростатиме від нуля до сталого значення. В кінці спуску вона має бути обмеженою з міркувань нормальної роботи спуску, при якій не пошкоджується вантаж. Зазвичай таким обмеженням є величина швидкості до *2,5 м/с* [7]. Згідно формули (50) задану швидкість можна досягнути варіацією двох параметрів: відстані ρ і кута β. Якщо кут β задаватимемо, то відстань ρ визначимо за формулою згідно (50):

$$\rho=\frac{V^2}{g\operatorname{tg}\beta}. \quad (52)$$

Далі із формули (23) знаходимо гвинтовий параметр b:

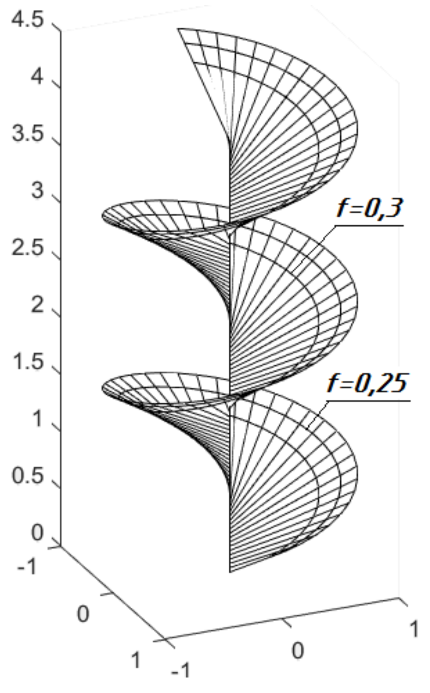
$$b=\frac{\sqrt{2}f\rho}{\cos\beta\sqrt{1-f^2+\sqrt{\frac{4f^2}{\cos^2\beta}+\left(1-f^2\right)^2}}}. \quad (53)$$

Наприклад, при заданій швидкості $V=2$ *м/с*, куті $\beta=30°$ і коефіцієнті тертя $f=0{,}3$ отримаємо: $\rho=0{,}7$ *м*, $b=0{,}24$. Поверхня косого гелікоїда за заданими конструктивними параметрами $b=0{,}24$ і $\beta=30°$ побудована згідно рівнянь (3) на рис. 5,а.

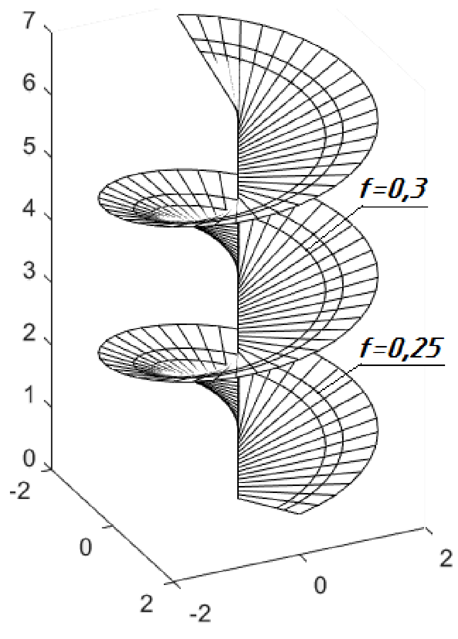
Таку ж саму швидкість руху вантажу $V=2$ *м/с* після стабілізації можна забезпечити іншою поверхнею при $b=0{,}394$ і $\beta=18°$ (рис. 5,б). Відстань ρ при цьому зросте і становитиме $\rho=1{,}25$ *м*. Якщо ж по побудованих поверхнях спускати вантаж із меншим коефіцієнтом тертя $f=0{,}25$, то зросте як відстань ρ, так і швидкість опускання V ($\rho=0{,}87$ *м* і $V=2{,}18$ *м/с* в першому випадку і $\rho=1{,}5$ *м* і $V=2{,}18$ *м/с* – в другому випадку).

Формула (50) вказує на те, що на поверхні косого гелікоїда завжди можна знайти гвинтову лінію, яка забезпечить задану швидкість руху частинки при $\beta>0$. Наприклад, при $\beta=1°$, $V=1$ *м/с* і $f=0{,}3$ отримаємо: $b=1{,}75$ і $\rho=5{,}84$ *м*. Знайдемо кут γ підйому гвинтової лінії: $\gamma=\mathrm{Arctg}(b/\rho)=\mathrm{Arctg}(7/23{,}36)=16{,}7°$. Кут тертя для $f=0{,}3$ теж становить 16,7°. Кут γ підйому гвинтової лінії при $\beta=30°$ (рис. 5,а) становить $\gamma=\mathrm{Arctg}(0{,}24/0{,}7)=18{,}9°$.

Таким чином, по мірі зменшення кута β при заданій швидкості V руху частинки кут підйому гвинтової лінії – траєкторії руху частинки – наближається до граничного значення – кута тертя. При $\beta<0$ сталу швидкість частинки забезпечити неможливо. В цьому випадку твірні поверхні спрямовані не вгору, а вниз, отже частинка може тільки розганятися.



а



б

Рис. 5. Косі гелікоїди з нанесеними траєкторіями руху частинки, які забезпечують задану швидкість руху $V=2$ *м/с* при коефіцієнті тертя $f=0{,}3$:
а) $\beta=30°$ і $b=0{,}24$; б) $\beta=18°$ і $b=0{,}394$

Fig. 5. Skew helicoids with particle trajectories plotted that provide a given velocity $V=2$ *m/s* at a friction coefficient $f=0{,}3$:
а) $\beta=30°$ і $b=0{,}24$; б) $\beta=18°$ і $b=0{,}394$

Висновки

1. Для транспортування вантажів або матеріалу зверху вниз застосовується гравітаційний транспорт, тобто спуски різної конструкції. Для них характерна простота виготовлення, відсутність механізмів для

приводу під час роботи. Для правильного транспортування матеріалу необхідно зробити розрахунки конструктивних параметрів спуску для того, щоб не було заторів або ж надмірної швидкості транспортування.

2. В роботі виконано розрахунки для конструкції гравітаційних спусків, в яких робочою поверхнею є косий гелікоїд. Аналітичні залежності для розрахунку конструктивних параметрів гвинтового спуску за заданою швидкістю руху вантажу отримані при складанні рівнянь рівноваги прикладених сил як на осі нерухомої системи координат, так і на орти тригранника Дарбу. В обох випадках отримано однакові результати.

Список літератури

1. *Пилипака С.Ф., Кресан Т.А., Бриндак Є.В., Костюченко А.А.* Рух частинки по гвинтовому спуску, утвореному гвинтовим коноїдом і обмежуючим вертикальним співвісним циліндром. *Збірник тез доповідей VI міжнародної науково-технічної конференції «Крамаровські читання».* 2019. С. 66–67. https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u132/zbirnik_tez2019v2.pdf

2. *Біліченко М.Я.* Основи теорії та розрахунку транспортних засобів механізації переміщення вантажів шахт. Навчальний посібник. Дніпропетровськ. НГУ, 2002. 102 с.

3. *Кузнецов Б.Л.*Транспорт на горных предприятиях. Москва. Недра, 1976. 552 с.

4. Основные положения по проектированию подземного транспорта для новых и действующих угольных шахт. Москва. ИГД имени А.А. Скочинского, 1986. 355 с.

5. *Пейсахович Г.Я., Ремизов И.Л.* Шахтный транспорт шахт и рудников. Справочник. Москва. Недра, 1985. 565 с.

6. *Милинский В.И.* Дифференциальная геометрия Ленинград., 1934. 332 с.

7. *Галкин В.И., Шешко Е.Е.* Транспортные машины Москва. Горная книга МГГУ, 2010. 588 с.

8. *Pylypaka, S.F., Nesvidomin, V.M., Klendii, M.B., Rogovskii, I.L., Kresan, T.A., Trokhaniak, V.I.* Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. 2019. Vol. 95. Issue 3. P. 108–118. WoS. DOI 10.31489/2019M2/108-119.

9. *Rogovskii, I.L., Titova, L.L., Davydenko, O.O., Trokhaniak, V.I., Trokhaniak, O.M.* Technology of producing reinforced concrete columns of circular cross-sectional and investigation of their strain-stress state at transverse-longitudinal bending. Acta Polytechnica. 2019. Vol. 59, no 5. P. 510–517. DOI:10.14311/AP.2019.59.0510. Scopus. WoS.

References

1. *Pylypaka S.F., Kresan T.A., Bryndak E.V., Kostyuchenko A.A.* (2019). The movement of the particle on the screw descent formed by the screw conoid and restricting the vertically coaxial cylinder. Collection of abstracts of the presentations of the VI International Scientific and Technical Conference "Kramar Readings", 66-67, https://nubip.edu.ua/sites/default/files/u132/zbirnik_tez2019v2.pdf

2. *Bilichenko M.Ya.* (2002). Fundamentals of theory and calculation of transport vehicles for mechanization of mine cargo movement. Tutorial. Dnipropetrovsk: NSU, 102.

3. *Kuznetsov B.L.* (1976). Transport in mining enterprises. Moscow: Nedra, 552.

4. Basic provisions for the design of underground transport for new and existing coal mines. (1986). Moscow: IGD them. them.. A.A. Skochinsky, 355.

5. *Peysakhovich G.Ya., Remizov I.L.* (1985). Mine transport of mines and mines. Directory. Moscow: Nedra, 565.

6. *Milinsky V.I.* (1934). Differential geometry. Leningrad, 332s.

7. *Galkin V.I., Sheshko E.E.* (2010). Transport cars. Moscow: Mining book of Moscow State University for the Humanities, 588.

8. *Pylypaka, S.F., Nesvidomin, V.M., Klendii, M.B., Rogovskii, I.L., Kresan, T.A., Trokhaniak, V.I.* (2019). Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. Vol. 95. Issue 3. 108–118. WoS. DOI 10.31489/2019M2/108-119. WoS.

9. *Rogovskii, I.L., Titova, L.L., Davydenko, O.O., Trokhaniak, V.I., Trokhaniak, O.M.* (2019). Technology of producing reinforced concrete columns of circular cross-sectional and investigation of their strain-stress state at transverse-longitudinal bending. Acta Polytechnica. Vol. 59, no 5. 510–517. DOI:10.14311/AP.2019.59.0510. Scopus. WoS.

РАСЧЕТ ГРАВИТАЦИОННОГО СПУСКА, ОБРАЗОВАННОГО ПОВЕРХНОСТЬЮ КОСОГО ЗАКРЫТОГО ГЕЛИКОИДА

Т. А. Кресан

Аннотация. В статье рассмотрены теоретические вопросы проектирования гравитационных спусков. Перемещение грузов или материала по ним осуществляется под действием силы собственного веса. Такой транспорт широко используется на угольных шахтах, рудниках, обогатительных фабриках. Транспортировка материала может осуществляться по специальным поверхностям: настилам, каскадным и винтовым спускам, трубам, желобам и др. Характер движения частицы зависит от особенностей конструкции таких спусков.

Проще рассчитать спуск в виде наклонной плоскости. Частица движется по нему по прямолинейной траектории, которая является линией наибольшего наклона. Если рабочей поверхностью спуска является криволинейная поверхность, то траекторией движения будет кривая линия. В этом случае возникает дополнительная сила инерции - центробежная, величина которой зависит от кривизны траектории. Эта сила может отклонять траекторию движения от линии наибольшего наклона, а также увеличивать давление частицы на поверхность, что приводит к увеличению силы трения. При составлении дифференциальных уравнений движения нужно учитывать все приложенные силы.

В работе рассмотрено конструирование винтового спуска, у которого рабочей поверхностью является неразвертывающийся (косой) геликоид. Чтобы не составлять дифференциальных уравнений движения частицы, в статье предложено описать ее движение после стабилизации, то есть после того, как она начинает двигаться по винтовой линии с постоянной скоростью. Дифференциальное уравнение движения частицы в этом случае заменяется уравнениями равновесия приложенных к ней сил в проекциях на оси координат. Уравнения равновесия сил составлены в проекциях, как на оси неподвижной системы координат, так и на орты подвижного трехгранника Дарбу. В обоих случаях получены одинаковые аналитические зависимости. Они позволяют конструировать спуск по заданной расчетной скорости движения частицы при известном коэффициенте трения. Одну и ту же расчетную скорость движения частицы при заданном коэффициенте трения можно обеспечить поверхностью косого геликоида с разными конструктивными параметрами.

Ключевые слова: гравитационный спуск, сила тяжести, уравнения равновесия сил, косой геликоид, стационарный режим.

CALCULATION OF GRAVITATION DESCENT
FORMED BY SURFACE
OF SKEW CLOSED HELICOID

T. A. Kresan

Abstract. The article deals with theoretical issues of designing gravitational descents. Movement of goods or material on them is carried out under the influence of self-weight. Such transport is widely used in coal mines, mines, concentrating factories. Transport of the material can be carried out on special surfaces: decks, cascade and screw descents, pipes, gutters, etc. The nature of the particle motion depends on the design features of such descents.

It is easier to calculate the descent in the form of an inclined plane. The particle moves along it in a straight line, which is the line of greatest slope. If the working surface of the descent is a curvilinear surface, then the trajectory will be a curve. In this case, there is an additional force of inertia - centrifugal, the value of which depends on the curvature of the trajectory. This force can divert the trajectory of the line of greatest inclination and also increase the particle pressure on the surface, which leads to an increase in the friction force. When drawing up the differential equations of motion, all the forces applied must be taken into account

The design of a screw descent in which the working surface is a nondevelopable (skew) helicoid is considered in the work. In order not to set up differential equations of motion of a particle, we propose to describe its motion after stabilization, that is, after it begins to move along a screw line with a constant speed. In this case, the differential equation of motion of a particle is replaced by the equations of equilibrium of the forces applied to it in the projections on the coordinate axis. The equations of equilibrium of forces is set up in the projections of both the fixed coordinate system and unitary vectors of the moving Darboux triad. In both cases, the same analytical dependencies were obtained. They allow you to design the descent at a predetermined calculated velocity of motion of the particle with a known coefficient of friction. The same calculated velocity of motion of a particle at a given coefficient of friction can be provided by a surface of the skew helicoid with different structural parameters.

Key words: gravity descent, force of gravity, equilibrium of forces, skew helicoid, steady-state regime.

Т. А. Кресан ORCID 0000-0002-8280-9502.