Machinery & Energetics. Journal of Production Research. Kyiv. Ukraine. 2020, Vol. 11, No. 3, 41-48
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

http://dx.doi.org/10.31548/machenergy2020.03.041

УДК 514.18

РУХОМИЙ І НЕРУХОМИЙ АКСОЇДИ ТРИГРАННИКА ФРЕНЕ НАПРЯМНОЇ КРИВОЇ НА ПРИКЛАДІ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ЛІНІЇ

Т. А. Кресан, С. Ф. Пилипака, В. М. Бабка, Я. С. Кремець

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Стаття з спеціальності: 131 – прикладна механіка.

Кореспонденція авторів: tanyakresan@i.ua.

Історія статті: отримано – квітень 2020, акцептовано – серпень 2020.
Бібл. 9, рис. 10, табл. 0.

Анотація. Якщо тверде тіло здійснює просторовий рух, то в кожен момент часу цей рух можна розкласти на обертальний з кутовою швидкістю і поступальний із лінійною швидкістю. Напрям осі обертання і величина кутової швидкості, тобто вектор обертального руху в даний момент часу не змінюється незалежно від точки твердого тіла (полюса), відносно якого здійснюється розкладання швидкостей. Для лінійної швидкості поступального руху відбувається все навпаки – модуль і напрям вектора залежать від вибору полюса. В твердому тілі можна знайти точку, тобто полюс, по відношенню до якого обидва вектори обертального і поступального рухів мають однаковий напрям. Спільну пряму, яку задають ці два вектори, називають миттєвою віссю обертання і ковзання, або кінематичним гвинтом. Він характеризується напрямом і параметром – співвідношенням лінійної і кутової швидкості. Якщо лінійна швидкість дорівнює нулю, а кутова ні, то в даний момент часу тіло здійснює тільки обертальний рух. Якщо ж відбувається навпаки, то тіло рухається поступально без обертального руху.

При русі супровідного тригранника по напрямній кривій він здійснює просторовий рух, тобто в кожен момент часу можна знайти положення осі кінематичного гвинта. Його розташування у триграннику, як у твердому тілі, цілком визначене і повністю залежить від диференціальних характеристик кривої у точці розташування тригранника – її кривини і скруту. Оскільки в загальному випадку кривина і скрут змінюються по мірі руху тригранника по кривій, то і положення осі кінематичного гвинта теж буде змінюватися. Множина цих положень утворює лінійчату поверхню – аксоїд. При цьому розрізняють аксоїд нерухомий по відношенню до нерухомої системи координат, і рухомий – який утворюється в системі тригранника і рухається разом із ним.

Форма рухомого і нерухомого аксоїдів залежить від виду кривої. Саму криву можна відтворити обкочуванням рухомого аксоїда по нерухомому з одночасним ковзанням вздовж спільної лінії дотику із лінійною швидкістю, яка теж визначається через кривину і скрут кривої в конкретній точці. Для плоских кривих ковзання відсутнє, тобто рухомий аксоїд перекочується по нерухомому без ковзання. Є клас кривих, для яких кутова швидкість обертання тригранника є сталою. До них відноситься і гвинтова лінія. В статті розглянуто аксоїди циліндричних ліній та побудовано деякі із них.

Ключові слова: рухомий і нерухомий аксоїди, кінематичний гвинт, тригранник Френе, циліндрична лінія, кривина, скрут.

Постановка проблеми

Аксоїди відіграють важливу роль у вивченні руху твердого тіла. Зазвичай аналітичний опис руху тіла здійснюється залежностями часу. В нашому випадку рух твердого тіла, за яке прийнято супровідний тригранник кривої, повністю залежить від самої кривої.

Аксоїди є основою для проектування зубчатих передач. Для передачі обертального руху між осями, що перетинаються, аксоїдами служать конуси, а між мимобіжними осями – однопорожнинні гіперболоїди обертання. Дослідження аксоїдів супровідного тригранника напрямної кривої дає можливість вивчати їх форму в залежності від класу кривих, зокрема, циліндричних.

Аналіз останніх досліджень

В прикладній геометрії кочення рухомого аксоїда по нерухомому використовується для конструювання кінематичних поверхонь, зокрема, ротативних і спіроїдальних. При утворенні першого класу поверхонь обкочування відбувається без ковзання [1], а в другому випадку ковзання присутнє [2].

Дослідження стосовно кінематики тригранника Френе наведено в працях [3–9]. В праці [3] наведено елементи кінематики через кривину і скрут кривої, в праці [4] досліджено рухомий і нерухомий аксоїди плоскої кривої, в праці [5] – просторової кривої укосу.

Праця [6] присвячена особливим випадкам напрямних кривих, для яких рухомий аксоїд тригранника перетворюється у плоский пучок.

Мета досліджень

Розробити аналітичний опис і побудувати рухомий і нерухомий аксоїди деяких циліндричних ліній із забезпеченням спільної лінії контакту вздовж відповідних прямолінійних твірних в кожен момент часу руху тригранника.

Результати досліджень

Параметричні рівняння циліндричної лінії мають наступний вигляд:

$$x = r\cos\alpha;\quad y = r\sin\alpha;\quad z = z(\alpha), \tag{1}$$

де r – радіус циліндра, на якому розташована гвинтова лінія;

α – незалежна змінна – кут повороту точки кривої навколо осі циліндра, на якому розташована лінія;

$z=z(\alpha)$ – закономірність переміщення точки циліндричної лінії вздовж осі циліндра.

В поточній точці A лінії розташований супровідний тригранник Френе (рис. 1). Оскільки тригранник рухається по кривій в напрямі орта дотичної $\bar{\tau}$, то і лінійна швидкість V поступального руху спрямована в напрямі цього орта. Для спрощення приймемо *V=1 м/с,* що не веде до спрощення загальних висновків. Миттєвий вектор обертання $\bar{\omega}$ розташований у спрямній площині, утвореній ортами $\bar{\tau}$ і $\bar{b}$. Його напрямні косинуси визначаються через кривину k і скрут σ кривої в поточній точці:

$$\omega_\tau = \frac{\tau}{\sqrt{k^2+\sigma^2}};\qquad \omega_n = 0;\qquad \omega_b = \frac{k}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}. \tag{2}$$

Знаменником проекцій (1) є модуль вектора, тобто величина кутової швидкості обертання тригранника в поточній точці.

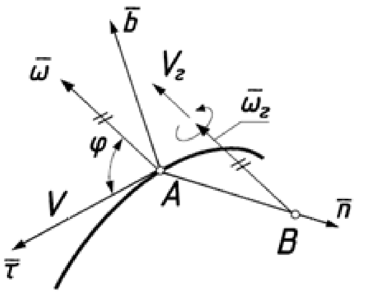

Рис. 1. Тригранник Френе кривої із векторами обертального і поступального рухів.

Fig. 1. Frenet trihedral of the curve with vectors of rotational and translational motions.

Вісь кінематичного гвинта $\bar{\omega}_г$ паралельна до миттєвої осі обертання $\bar{\omega}$ і проходить через точку B на головній нормалі (рис. 1). Відстань AB теж визначається через кривину k і скрут σ кривої [5]:

$$AB = \frac{k}{k^2+\sigma^2}. \tag{3}$$

Таким чином, щоб визначити положення і напрям осі кінематичного гвинта в триграннику Френе, потрібно знати вирази кривини k і скруту σ. Вони визначаються через перші, другі і треті похідні рівнянь напрямної кривої. Знаходимо похідні рівнянь (1).

Перші:

$$x' = -r\sin\alpha;\quad y' = r\cos\alpha,\quad z' = z'(\alpha). \tag{4}$$

Другі:

$$x'' = -r\cos\alpha;\quad y'' = -r\sin\alpha,\quad z'' = z''(\alpha). \tag{5}$$

Треті:

$$x''' = -r\cos\alpha;\quad y''' = -r\sin\alpha,\quad z''' = z'''(\alpha). \tag{6}$$

Кривину k і скрут σ знаходимо за відомими формулами [7]:

$$k = \frac{r\sqrt{r^2+z'^2+z''^2}}{\left(r^2+z'^2\right)^{3/2}}. \tag{7}$$

$$\sigma = \frac{z'+z'''}{r^2+z'^2+z''^2}. \tag{8}$$

Для знаходження нерухомого аксоїда, який є множиною осей кінематичного гвинта, потрібно перейти від координат окремої осі в системі тригранника до координат цієї осі в нерухомій системі. Для цього потрібно знати дев'ять кутів, які утворює кожен орт тригранника із осями нерухомої системи координат. Якщо позначити через α_τ, β_τ, γ_τ кути, що утворює орт дотичної $\bar{\tau}$ з осями Ox, Oy, і Oz нерухомої системи координат і аналогічно для головної нормалі $\bar{n}$ і бінормалі $\bar{b}$ - через α_n, β_n, γ_n і α_b, β_b, γ_b, то напрямні косинуси цих кутів через похідні запишуться [7]:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha_\tau &= -\frac{r\sin\alpha}{\sqrt{r^2+z'^2}};\\
\cos\beta_\tau &= \frac{r\cos\alpha}{\sqrt{r^2+z'^2}};\\
\cos\gamma_\tau &= \frac{z'}{\sqrt{r^2+z'^2}};\\
\cos\alpha_n &= \frac{z'z''\sin\alpha-\left(r^2+z'^2\right)\cos\alpha}{\sqrt{\left(r^2+z'^2\right)\left(r^2+z'^2+z''\right)}};\\
\cos\beta_n &= -\frac{z'z''\cos\alpha+\left(r^2+z'^2\right)\sin\alpha}{\sqrt{\left(r^2+z'^2\right)\left(r^2+z'^2+z''\right)}};\\
\cos\gamma_n &= \frac{rz'z''}{\sqrt{\left(r^2+z'^2\right)\left(r^2+z'^2+z''\right)}};\\
\cos\alpha_b &= \frac{z''\cos\alpha+z'\sin\alpha}{\sqrt{r^2+z'^2+z''}};\\
\cos\beta_b &= \frac{z''\sin\alpha-z'\cos\alpha}{\sqrt{r^2+z'^2+z''}};\\
\cos\gamma_b &= \frac{r}{\sqrt{r^2+z'^2+z''}}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Якщо точка в системі тригранника (наприклад, кінець вектора (2)) задана координатами $\{\omega_\tau, \omega_n, \omega_b\}$, то її координати в нерухомій системі знайдемо за формулами переходу [7]:

$$\omega_x = \omega_\tau \cos\alpha_\tau + \omega_n \cos\alpha_n + \omega_b \cos\alpha_b;$$
$$\omega_y = \omega_\tau \cos\beta_\tau + \omega_n \cos\beta_n + \omega_b \cos\beta_b; \quad (10)$$
$$\omega_z = \omega_\tau \cos\gamma_\tau + \omega_n \cos\gamma_n + \omega_b \cos\gamma_b,$$

Після підстановки (2) в (10) отримаємо:

$$\omega_x = \frac{1}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}\left(\tau\cos\alpha_\tau + k\cos\alpha_b\right);$$
$$\omega_y = \frac{1}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}\left(\tau\cos\beta_\tau + k\cos\beta_b\right); \quad (11)$$
$$\omega_z = \frac{1}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}\left(\tau\cos\gamma_\tau + k\cos\gamma_b\right).$$

Вирази (11) є проекціями одиничного вектора, який задає напрям осі кінематичного гвинта в нерухомій системі координат. Сама вісь проходить через точку *B* на головній нормалі (рис. 1). Отже в системі тригранника вона має тільки одну (середню) координату, а дві інші дорівнюють нулю. Підставимо вираз (3) цієї координати до формул переходу (10) і отримаємо:

$$x_B = \frac{k\cos\alpha_n}{k^2+\sigma^2};$$
$$y_B = \frac{k\cos\beta_n}{k^2+\sigma^2}; \quad (12)$$
$$z_B = \frac{k\cos\gamma_n}{k^2+\sigma^2}.$$

Вирази (12) задають координати точки *B* в нерухомій системі за умови, що початок координат обох систем збігається. Однак початок координат тригранника знаходиться в поточній точці кривої (1), тому до виразів (12) потрібно додати координати поточної точки (1). Через одержану точку в нерухомій системі потрібно провести пряму паралельно напрямному вектору (11). Із врахуванням цього параметричні рівняння нерухомого аксоїда запишуться:

$$X_н = r\cos\alpha + \frac{k\cos\alpha_n}{k^2+\sigma^2} + \frac{u}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}\left(\tau\cos\alpha_\tau + k\cos\alpha_b\right);$$
$$Y_н = r\sin\alpha + \frac{k\cos\beta_n}{k^2+\sigma^2} + \frac{u}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}\left(\tau\cos\beta_\tau + k\cos\beta_b\right); \quad (13)$$
$$Z_н = z(\alpha) + \frac{k\cos\gamma_n}{k^2+\sigma^2} + \frac{u}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}\left(\tau\cos\gamma_\tau + k\cos\gamma_b\right),$$

де *u* – друга незалежна змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної.

Кривина *k* і скрут *σ* напрямної кривої визначаються через перші, другі і треті похідні її параметричних рівнянь за відомими формулами.

Рухомим аксоїдом є множина осей кінематичного гвинта в рухомій системі координат. Рух осі кінематичного гвинта в системі тригранника цілком визначений: він повертається на кут *φ* навколо головної нормалі $\bar{n}$ (рис. 1) і ковзає вздовж неї на відстань *AB* згідно із залежністю (3). При такому русі лінійчата поверхня (рухомий аксоїд, який рухається разом із тригранником, але в його системі є нерухомим) утворюється відомим способом, характерним для побудови коноїда: пряма лінія (вісь кінематичного гвинта) перетинає напрямну пряму (головну нормаль тригранника) під прямим кутом, ковзає вздовж неї і одночасно обертається навколо неї. В системі тригранника утворюється лінійчата поверхня (рухомий аксоїд), всі прямолінійні твірні якої перетинають головну нормаль. Побудову рухомого аксоїда будемо здійснювати в нерухомій системі координат, у якої орт $\bar{\tau}$ збігається із віссю *Ox*, орт $\bar{n}$ – із віссю *Oy*, орт $\bar{b}$ – з віссю *Oz*. В такому випадку параметричні рівняння поверхні запишуться:

$$X_p = \frac{u\tau}{\sqrt{k^2+\sigma^2}};$$
$$Y_p = \frac{k}{k^2+\sigma^2}; \quad (14)$$
$$Z_p = \frac{uk}{\sqrt{k^2+\sigma^2}},$$

де *u* – друга незалежна змінна поверхні – довжина прямолінійної твірної.

Розглянемо приклади. Нехай $z=a-b\cdot\alpha^2$. Тоді $z'=a-2b\cdot\alpha$, $z''=a-2b$. Підставляємо ці залежності у вищенаведені формули, а потім за рівняннями (13) і (14) будуємо нерухомий і рухомий аксоїди (рис. 2).

На рис. 2 сама крива не показана. Потовщеною лінією зображена траєкторія руху точки *B*. На нерухомому аксоїді вона є просторовою, а на рухомому – прямою, оскільки рухається по прямій лінії – головній нормалі тригранника. Аксоїди побудовані для фрагмента кривої при зміні параметра *α* в межах $\alpha=-\pi/2 \ldots \pi/2$. Сталі величини мають наступні значення: $r=5$, $a=2$, $b=1{,}5$.

Для того, щоб відтворити рух твердого тіла в просторі (в нашому випадку – тригранника Френе), необхідно обкочувати рухомий аксоїд по нерухомому з одночасним ковзанням останнього вздовж спільної прямолінійної прямої дотику (миттєвої осі кінематичного гвинта). Лінійна швидкість ковзання $V_к$ теж визначається через кривину *k* і скрут *σ* напрямної кривої [5]:

$$V_к = \frac{\sigma}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}. \quad (15)$$

Щоб побудувати два аксоїди із спільною прямолінійною твірною дотику, потрібно певним чином перемістити рухомий аксоїд. Це переміщення складається із двох рухів. Перший рух – повернути рухомий аксоїд так, щоб відповідні прямі дотику обох аксоїдів були паралельними. Наступний рух – здійснити поступальне переміщення рухомого аксоїда таким чином, щоб відповідні прямі дотику збігалися.

Рухомий аксоїд описаний параметричними рівняннями (14). Вони описують однопараметричну множину положень осі кінематичного гвинта в системі тригранника, яка в даному випадку збігається із нерухомою системою координат. Щоб виділити окрему вісь, яка буде спільною прямою дотику, необхідно задати конкретне значення кута α, наприклад, $\alpha=\alpha_0$. При заданому значенні α_0 за формулами (9) потрібно знайти де'вять напрямних косинусів для цієї конкретної осі. Щоб відрізнити ці конкретні значення напрямних косинусів від загального запису у формулах (9), добавимо у їх позначення нижній індекс «*0*». Після цього повернемо рухому систему разом із аксоїдом (14) за формулами (10) в потрібне положення:

$$
\begin{aligned}
X_{p0} &= \frac{u\tau\cos\alpha_{\tau 0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}} + \frac{k\cos\alpha_{n0}}{k^2+\sigma^2} + \frac{uk\cos\alpha_{b0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}};\\
Y_{p0} &= \frac{u\tau\cos\beta_{\tau 0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}} + \frac{k\cos\beta_{n0}}{k^2+\sigma^2} + \frac{uk\cos\beta_{b0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}};\\
Z_{p0} &= \frac{u\tau\cos\gamma_{\tau 0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}} + \frac{k\cos\gamma_{n0}}{k^2+\sigma^2} + \frac{uk\cos\gamma_{b0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}}.
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

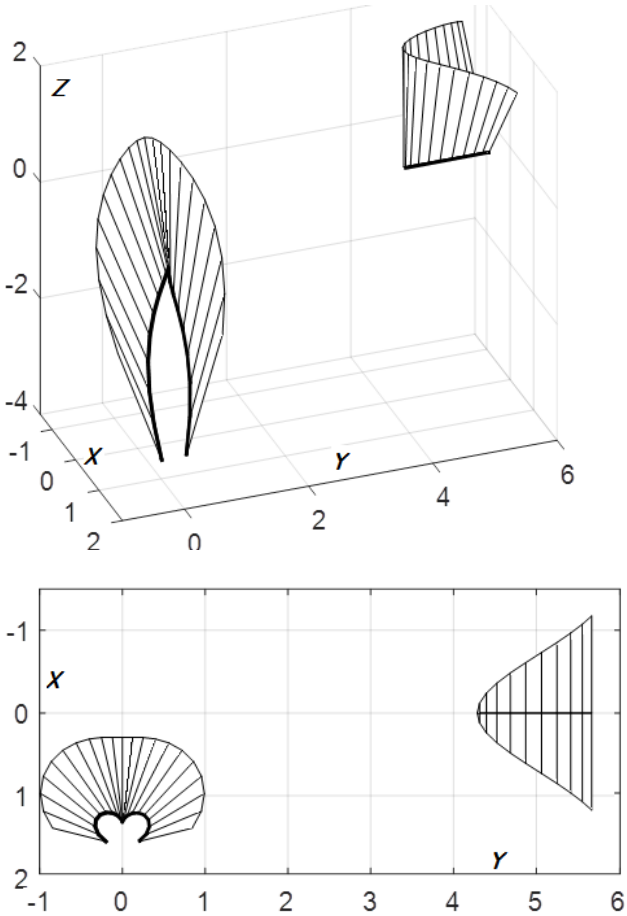

Рис. 2. Аксонометричне зображення (вгорі) та горизонтальна проекція (внизу) нерухомого (ліворуч) і рухомого (праворуч) аксоїдів циліндричної лінії, заданої залежністю $z=a\text{-}b\cdot\alpha^2$.

Fig. 2. Axonometric image (top) and horizontal projection (bottom) of fixed (left) and moving (right) axoids of a cylindrical line given by the dependence $z=a\text{-}b\cdot\alpha^2$.

Рухомий аксоїд (16) орієнтований так, що виділена пряма (вісь кінематичного гвинта) паралельна відповідній прямій нерухомого аксоїда, яку можна знайти із параметричних рівнянь (13) теж при $\alpha=\alpha_0$.

Наступний етап – перенести початок координат системи, в якій описано рухомий аксоїд (16) так, щоб початок вектора виділеної осі (точка *B*) збігнувся. Це станеться, якщо початок координат системи разом із рухомим аксоїдом (16) перенесемо в поточну точку кривої, яку знаходимо із рівнянь (1) при $\alpha=\alpha_0$. Для цього потрібно знати різницю координат між цими точками в нерухомій системі координат (13) і повернутій (16). Координати точки *B* в обох системах знайдемо при $u=0$ і $\alpha=\alpha_0$. Їх різницею є координати точки на кривій (1) при $\alpha=\alpha_0$. Таким чином, щоб отримати параметричні рівняння рухомого аксоїда, який дотикається до нерухомого вздовж виділеної осі, необхідно до рівнянь (16) добавити знайдену різницю. Після цього отримаємо:

$$
\begin{aligned}
X_p &= \frac{u\tau\cos\alpha_{\tau 0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}} + \frac{k\cos\alpha_{n0}}{k^2+\sigma^2} + \frac{uk\cos\alpha_{b0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}} + r\cos\alpha_0;\\
Y_p &= \frac{u\tau\cos\beta_{\tau 0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}} + \frac{k\cos\beta_{n0}}{k^2+\sigma^2} + \frac{uk\cos\beta_{b0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}} + r\sin\alpha_0;\\
Z_p &= \frac{u\tau\cos\gamma_{\tau 0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}} + \frac{k\cos\gamma_{n0}}{k^2+\sigma^2} + \frac{uk\cos\gamma_{b0}}{\sqrt{k^2+\sigma^2}} + z(\alpha_0).
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

На рис. 3 за рівняннями (13) і (17) побудовані аксоїди, які зображені на рис. 2 окремо. Спільна пряма дотику, зображена потовщеною лінією, відповідає $\alpha_0=0°$.

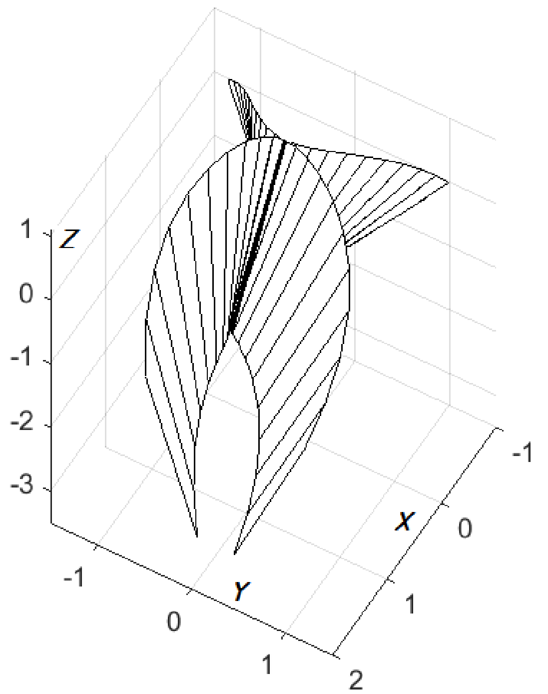

Рис. 3. Аксоїди із спільною лінією дотику при $\alpha_0=0°$, які зображені на рис. 2 окремо.

Fig. 3. Axoids with a common contact line at $\alpha_0=0°$, which are shown in Fig. 2 separately.

Аксоїди, зображені на рис. 2,3, побудовані при зміні параметра *u* в межах $u=0...2$. Проте можна добитися кращої наочності, побудувавши відсіки цих аксоїдів при інших межах зміни цього параметра, наприклад, $u=2...4$, або $u=-4...-2$. Такі відсіки будуть знаходитися на певній відстані від траєкторії точки *B* по різні сторони від неї. Наприклад, на рис. 4 побудовані аксоїди і циліндрична напрямна крива, задана залежністю $z=a\text{-}b\cdot\alpha^2$. Незалежна змінна α в змінюється в межах $\alpha=-4\pi/5...\ 4\pi/5$. Сталі величини мають наступні значення: $r=5$, $a=2$, $b=1$. Довжина прямолінійних твірних змінюється в межах $u=2...4$. В одному випадку (рис. 4, вгорі) дотик аксоїдів відбувається вздовж осей при α_0=0°, в іншому (рис. 4, внизу) – при $\alpha_0= -\pi/2$. Цифрами позначено: 1 – напрямна крива, 2– нерухомий аксоїд, 3 – рухомий аксоїд, 4 – спільна пряма лінія дотику і ковзання (вісь кінематичного гвинта).

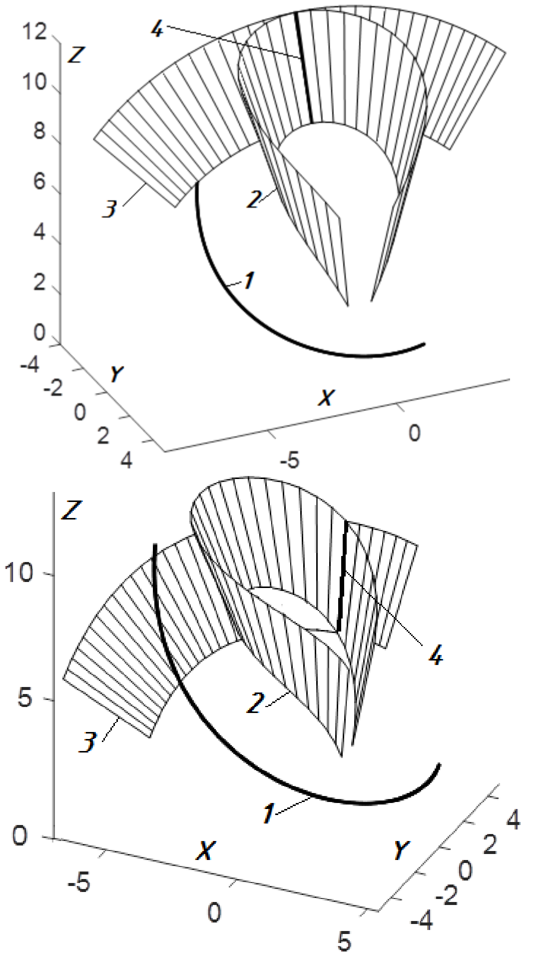

Рис. 4. Аксоїди із спільними лініями дотику вздовж осі кінематичного гвинта

Fig. 4. Axoids with common contact lines along the axis of the kinematic screw

Для побудови аксоїдів тригранника Френе циліндричної лінії за розробленою програмою достатньо задати залежність $z=z(\alpha)$ її похідні. Побудуємо аксоїди тригранника для циліндричної лінії, отриманої при залежності $z=a\sin b\alpha$. При $a=1$ такою кривою буде еліпс – плоский переріз циліндра. Від значення сталої b залежить співвідношення його осей. На рис. 5 побудовано сам еліпс і аксоїди при $a=1$, $b=4$.

Із рисунка 5 видно, що всі осі кінематичного гвинта паралельні між собою. Це означає, що вони є циліндричними поверхнями, причому рухомим аксоїдом є площина. Рухомий аксоїд побудовано в двох положеннях: в одному він дотикається до нерухомого при $\alpha_0= \pi/4$ (позначення 3а), в другому – при $\alpha_0= 6\pi/5$ (позначення 3б). Решта позначень аналогічна позначенням на рис. 4.

В праці [4] доведено твердження, що для плоскої кривої нерухомим аксоїдом є полярний торс напрямної кривої, а рухомим – його розгортка. Згідно формули (15) для плоскої кривої, у якої скрут σ дорівнює нулю, ковзання відсутнє. Це очевидно, оскільки торс по своїй розгортці котиться без ковзання.

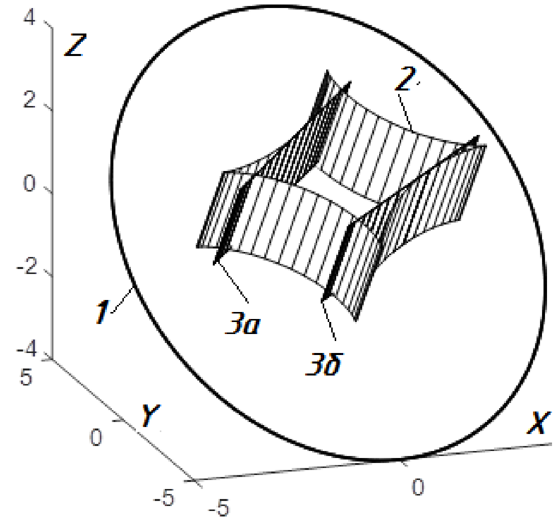

Рис. 5. Аксоїди супровідного тригранника еліпса.

Fig. 5. Axoids of the accompanying trihedral of ellipse.

Полярним торсом плоскої кривої є еволютний циліндр, прямолінійні твірні якого перпендикулярні площині, в якій розташована крива. В такому випадку просторову задачу кочення поверхонь аксоїдів можна звести до плоскої задач кочення їх перерізів, тобто до взаємного кочення плоских ліній. Кочення рухомого аксоїда по нерухомому (тобто розгортки по еволютному циліндру) можна замінити коченням прямої по кривій – еволюті перерізу нерухомого аксоїда. Підтвердження цього можна продемонструвати на прикладі рис. 5, якщо його повернути так, щоб аксоїди стали проекціювальними, тобто спроекціювалися у лінії. В такому випадку кочення аксоїдів, які є циліндричними поверхнями, зводиться до кочення ортогональних перерізів цих циліндрів, тобто центроїд. Такий поворот здійснено на рис. 6.

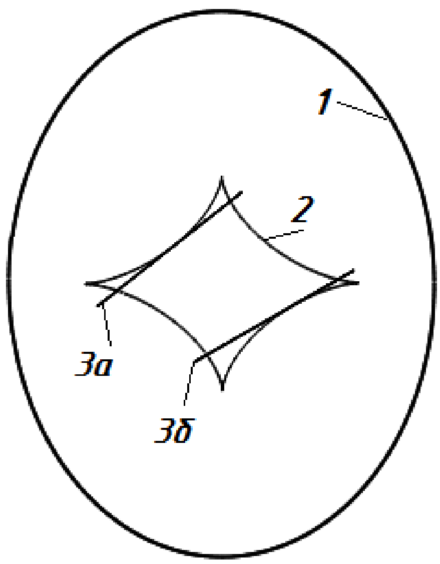

Рис. 6. Центроїди супровідного тригранника еліпса.

Fig. 6. Centroids of the accompanying trihedral of ellipse.

Нерухомою центроїдою є еволюта еліпса, а рухомою – пряма лінія. Якщо її продовжити до еліпса і точку зустрічі з ним прив'язати до прямої, то при перекочуванні прямої (тобто рухомої центроїди) по криволінійній нерухомій центроїді ця точка відтворить еліпс.

Якщо у залежності $z=a\sin b\alpha$ для b надати іншого значення, то ми отримаємо просторову криву, причому для цілого значення сталої b крива буде замкнена. На рис. 7 побудовано криву і нерухомий аксоїд при $r=5$, $a=0{,}75$, $b=2$. Як видно із рис. 7, поверхня аксоїда має лінії самоперетину.

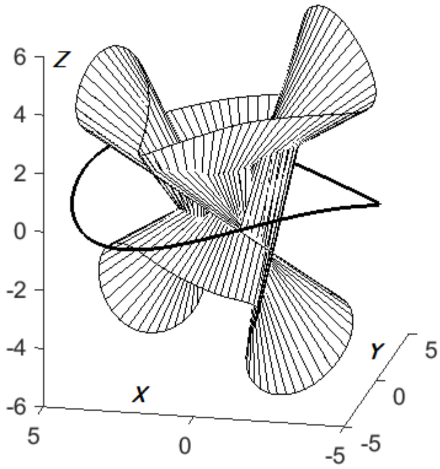

Рис. 7. Нерухомий аксоїд тригранника замкненої циліндричної лінії, заданої залежністю $z=0{,}75\sin 2\alpha$.

Fig. 7. The fixed axoid of a trihedral of the closed cylindrical line given by the dependence $z=0{,}75\sin 2\alpha$.

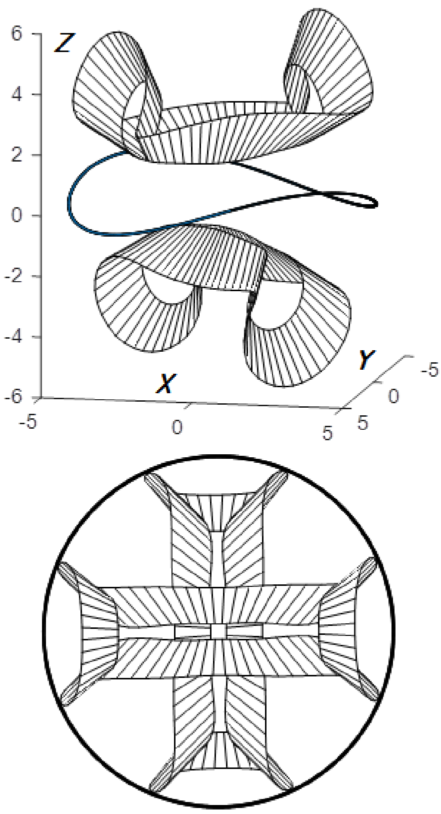

Рис. 8. Відсіки нерухомого аксоїда, зображеного на рис. 7, і їх горизонтальна проекція.

Fig. 8. Compartments of the fixed axoid shown in Fig. 7 and their horizontal projection.

На рис. 8 для наочності середня частина поверхні із лініями самоперетину не показана. Один відсік поверхні побудовано при зміні параметра u в межах $u=3...5$, інший – при $u=-5...-3$.

Нерухомого аксоїда, якого зображено на рис. 7, 8, побудовано при зміні параметра α в межах $\alpha=0...2\pi$. Його поверхня теж замкнена. На рис. 9 побудовано рухомий аксоїд (ліворуч) та фрагменти нерухомого і рухомого аксоїдів із спільною лінією дотику при $\alpha_0=3\pi/4$.

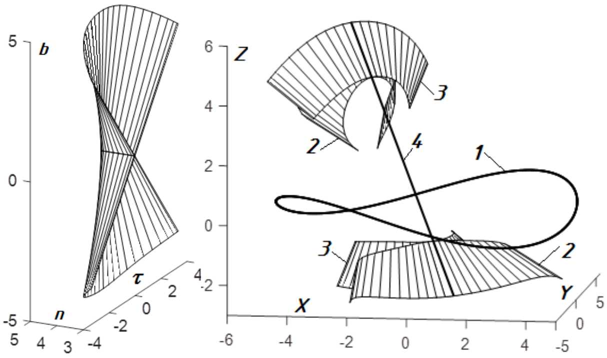

Рис. 9. Рухомий (ліворуч) та фрагменти нерухомого і рухомого аксоїдів із спільною лінією дотику (праворуч).

Fig. 9. Moving (left) and fragments of fixed and moving axoids with a common touch line (right).

На рис. 10 рухомий і нерухомий аксоїди, що зображені на рис. 9 праворуч, показані в проекціях.

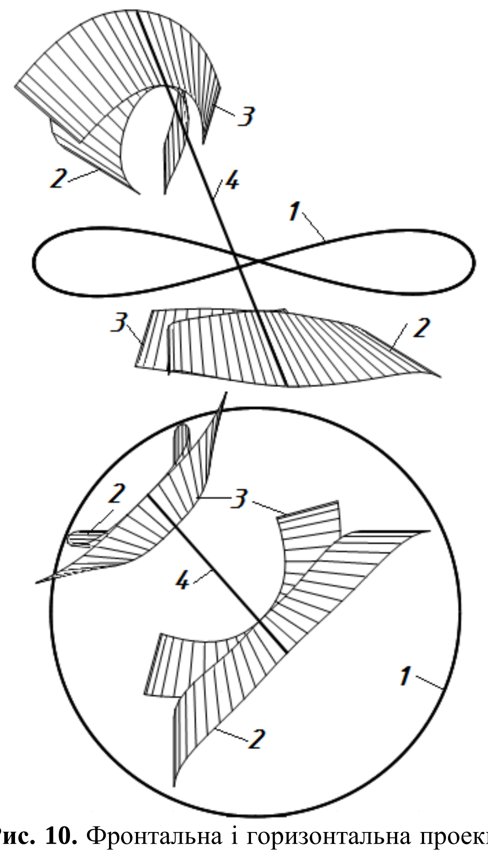

Рис. 10. Фронтальна і горизонтальна проекції аксоїдів із спільною прямою дотику.

Fig. 10. Frontal and horizontal projections of axoids with common touch line.

Цифрові позначення на рис. 9, рис. 10 такі ж, як і на рис. 4.

Висновки

1. Рух супровідного тригранника по напрямній кривій можна розглядати, як просторовий рух твердого тіла. Такий рух характеризується наявністю двох лінійчатих поверхонь – рухомого і нерухомого аксоїдів. Форма цих аксоїдів повністю залежить від диференціальних характеристик напрямної кривої. Щоб їх побудувати за розробленим алгоритмом і створеною програмою, потрібно ввести параметричні рівняння напрямної кривої, їх перші, другі і треті похідні.

2. Для циліндричної кривої потрібно ввести тільки одну залежність і її похідні, оскільки дві інші вже враховані разом із радіусом циліндра. У випадку плоскої циліндричної кривої – рух тригранника можна вивчати за допомогою рухомої і нерухомої центроїд, які є результатом поперечного перерізу відповідних аксоїдів.

Список літератури

1. *Ядгаров Д. Я., Шоломов И. Х.* Применение дифференциальных уравнений к конструированию ротативных поверхностей с аксоидами торс-торс. Исслед. в области теории дифференциальных уравнений и теории приближений. 1982. С. 96-100.

2. *Кирилов С. В.* Параметрические уравнения некоторых спироидальных поверхностей. Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей: Труды МАИ. 1972. Вып. 296. С. 81-85.

3. *Панчук К. Л.* Элементы кинематической геометрии кривой линии. Омский научный вестник. 2005. № 2 (31). С. 68-69.

4. *Кресан Т. А., Пилипака С. Ф., Кремець Я. С.* Нерухомий і рухомий аксоїди супровідного тригранника Френе плоскої напрямної кривої. Сучасні проблеми моделювання. 2018. № 13. С. 83-91.

5. *Кресан Т. А., Пилипака С. Ф., Грищенко І. Ю., Федорина Т. П.* Нерухомий і рухомий аксоїди супровідного тригранника Френе просторової кривої укосу. Вісник Херсонського національного технічного університету. 2019. № 2 (69). Ч. 3. С. 265-273.

6. *Кресан Т. А., Пилипака С. Ф., Несвідомін В. М., Бабка В. М., Федорина Т. П.* Просторові криві, у яких рухомим аксоїдом супровідного тригранника є плоский пучок. Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. 2019. № 15. С. 110-117.

7. *Милинский В. И.* Дифференциальная геометрия. Ленинград. 1934. 332 с.

8. *Kresan T., Pylypaka S., Ruzhylo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O.* External rolling of a polygon on a closed curvilinear profile. Acta Polytechnica. 2020. Vol. 60, no 4, P. 313-317. https://doi.org/10.14311/AP.2020.60. 0313.

9. *Pylypaka S. F., Nesvidomin V. M., Klendii M. B., Rogovskii I. L., Kresan T. A., Trokhaniak V. I.* Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. 2019. Vol. 95. Issue 3. P. 108-118. DOI 10.31489/2019M2/108-119.

References

1. *Yadgarov D. Ya., Sholomov I. Kh.*(1982). Application of differential equations to the construction of rotational surfaces with torso-torso axoids. Issled. in the theory of differential equations and approximation theory. 96-100.

2. *Kirilov S. V.* (1972). Parametric equations of some spiroid surfaces. Cybernetics graphics and applied surface geometry: Proceedings of the Moscow Aviation Institute. 296. 81-85.

3. *Panchuk K. L.* (2005). Elements of kinematic geometry of a curve line. Omsk Scientific Herald. 2(31). 68-69.

4. *Kresan T. A., Pylypaka S. F., Kremets Ya. S.* (2018). Fixed and moving axoids of the accompanying Frenet trihedral of the plane directing curve. Modern Modeling Problems: Coll. of sciences. to the MSPU them. B. Khmelnitsky. 13. 83-91.

5. *Kresan T. A., Pylypaka S. F., Grischenko I. Yu., Fedoryna T. P.* (2019). Fixed and moving axoids of the accompanying Frenet trihedral of the spatial slope curve. Bulletin of the Kherson National Technical University. 2(69-3). 265-273.

6. *Kresan T. A., Pylypaka S. F., Nesvidomin V. M., Babka V. M., Fedoryna T. P.* (2019). Spatial curves in which the moving axoid of the accompanying trihedral is a flat sheaf. Modern modeling problems: coll. of sciences. to the MSPU them. B. Khmelnitsky. 15. 110-117.

7. *Milinsky V. I.* (1934). Differential geometry. Leningrad. 332.

8. *Kresan T., Pylypaka S., Ruzhylo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O.* (2020). External rolling of a polygon on a closed curvilinear profile. Acta Polytechnica. 60(4). 313-317. https://doi.org/10.14311/AP.2020.60. 0313.

9. *Pylypaka S. F., Nesvidomin V. M., Klendii M. B., Rogovskii I. L., Kresan T. A., Trokhaniak V. I.* (2019). Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. 95(3). 108-118. doi 10.31489/2019M2/108-119.

ПОДВИЖНЫЙ И НЕПОДВИЖНЫЙ АКСОИДЫ ТРЕХГРАННИКА ФРЕНЕ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ КРИВОЙ НА ПРИМЕРЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛИНИИ

Т. А. Кресан, С. Ф. Пилипака, В. Н. Бабка, Я. С. Кремец

Аннотация. Если твердое тело совершает пространственное движение, то в каждый момент времени это движение можно разложить на вращательное с угловой скоростью и поступательное с линейной скоростью. Направление оси вращения и величина угловой скорости, то есть вектор вращательного движения в данный момент времени не меняется независимо от точки твердого тела (полюса), в отношении которого осуществляется разложения скоростей. Для линейной

скорости поступательного движения происходит все наоборот – модуль и направление вектора зависят от выбора полюса. В твердом теле можно найти точку, то есть полюс, по отношению к которому оба вектора вращательного и поступательного движений имеют одинаковое направление. Общую прямую, которую задают эти два вектора, называют мгновенной осью вращения и скольжения, или кинематическим винтом. Он характеризуется направлением и параметром – соотношением линейной и угловой скорости. Если линейная скорость равна нулю, а угловая нет, то в данный момент времени тело совершает только вращательное движение. Если же происходит наоборот, то тело движется поступательно без вращательного движения.

При движении сопровождающего трехгранника по направляющей кривой он осуществляет пространственное движение, то есть в каждый момент времени можно найти положение оси кинематического винта. Его расположение в трехграннике, как в твердом теле, вполне определенное и полностью зависит от дифференциальных характеристик кривой в точке расположения трехгранника – ее кривизны и кручения. Поскольку в общем случае кривизна и кручение изменяются по мере движения трехгранника по кривой, то и положение оси кинематического винта тоже будет изменяться. Множество этих положений образует линейчатую поверхность – аксоид. При этом различают аксоид неподвижный по отношению к неподвижной системе координат, и подвижный – который образуется в системе трехгранника и движется вместе с ним.

Форма подвижного и неподвижного аксоидов зависит от вида кривой. Саму кривую можно воспроизвести качением подвижного аксоида по неподвижному с одновременным скольжением вдоль общей линии соприкосновения с линейной скоростью, которая тоже определяется через кривизну и кручение кривой в конкретной точке. Для плоских кривых скольжение отсутствует, то есть подвижный аксоид катится по неподвижному без скольжения. Есть класс кривых, для которых угловая скорость вращения трехгранника является постоянной. К ним относится и винтовая линия. В статье рассмотрены аксоиды цилиндрических линий и построены некоторые из них.

Ключевые слова: подвижный и неподвижный аксоиды, кинематический винт, трехгранник Френе, цилиндрическая линия, кривизна, кручение.

MOVING AND FIXED AXOIDS OF FRENET THRIHEDRAL OF DIRECTING CURVE ON EXAMPLE OF CYLINDRICAL LINE

T. A. Kresan, S. F. Pylypaka, V. M. Babka, Ya. S. Kremets

Abstract. If the solid body makes a spatial motion, then at any point in time this motion can be decomposed into rotational at angular velocity and translational at linear velocity. The direction of the axis of rotation and the magnitude of the angular velocity, that is the vector of rotational motion at a given time does not change regardless of the point of the solid body (pole), relative to which the decomposition of velocities. For linear velocity translational motion is the opposite: the magnitude and direction of the vector depend on the choice of the pole. In a solid body, you can find a point, that is, a pole with respect to which both vectors of rotational and translational motions have the same direction. The common line given by these two vectors is called the instantaneous axis of rotation and sliding, or the kinematic screw. It is characterized by the direction and parameter - the ratio of linear and angular velocity. If the linear velocity is zero and the angular velocity is not, then at this point in time the body performs only rotational motion. If it is the other way around, then the body moves in translational manner without rotating motion.

The accompanying trihedral moves along the directing curve, it makes a spatial motion, that is, at any given time it is possible to find the position of the axis of the kinematic screw. Its location in the trihedral, as in a solid body, is well defined and depends entirely on the differential characteristics of the curve at the point of location of the trihedral – its curvature and torsion. Since, in the general case, the curvature and torsion change as the trihedral moves along the curve, then the position of the axis of the kinematic screw will also change. Multitude of these positions form a linear surface - an axoid. At the same time distinguish the fixed axoid relative to the fixed coordinate system, and the moving - which is formed in the system of the trihedral and moves with it.

The shape of the moving and fixed axoids depends on the curve. The curve itself can be reproduced by rolling a moving axoid over a fixed one, while sliding along a common touch line at a linear velocity, which is also determined by the curvature and torsion of the curve at a particular point. For flat curves, there is no sliding, that is, the movable axoid is rolling over a stationary one without sliding. There is a set of curves for which the angular velocity of the rotation of the trihedral is constant. These include the helical line too. The article deals with axoids of cylindrical lines and some of them are constructed.

Key words: moving and fixed axoids, kinematic screw, Frenet trihedral, cylindrical line, curvature, torsion.

Т. А. Кресан ORCID 0000-0002-8280-9502.
С. Ф. Пилипака ORCID 0000-0002-1496-4615.
В. М. Бабка ORCID 0000-0003-4971-4285.
Я. С. Кремець ORCID 0000-0003-0675-5757.