Machinery & Energetics. Journal of Production Research. Kyiv. Ukraine. 2020, Vol. 11, No. 4, 23-32
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

http://dx.doi.org/10.31548/machenergy2020.04.023

УДК 514.18

МОДЕЛЮВАННЯ ЦЕНТРОЇД НЕКРУГЛИХ КОЛІС ІЗ ВНУТРІШНІМ І ЗОВНІШНІМ КОЧЕННЯМ ІЗ ДУГ СИМЕТРИЧНИХ КРИВИХ

Т. А. Кресан, С. Ф. Пилипака, І. Ю. Грищенко, Я. С. Кремець

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Стаття з спеціальності: 131 – прикладна механіка.

Кореспонденція авторів: tanyakresan@i.ua.

Історія статті: отримано – липень 2020, акцептовано – жовтень 2020.
Бібл. 10, рис. 21, табл. 0.

Анотація. В статті розглянуто конструювання некруглих коліс, які служать центроїдами при проектуванні зубчатих зачеплень. Центроїди складаються із конгруентних дуг заданої симетричної кривої. Число цих дуг, тобто елементів центроїди, визначається видом зачеплення (внутрішнє або зовнішнє). При зовнішньому зачепленні кількість елементів обох центроїд може бути довільною, починаючи з одного елемента. При внутрішньому зачепленні кількість елементів внутрішньої центроїди повинна бути на одиницю меншою від кількості елементів зовнішньої центроїди. Якщо кількість елементів однакова, то центроїди збігаються.

Кочення центроїд одна по одній відбувається при відсутності ковзання. Це можливо за умови, що довжини дуг окремих елементів обох центроїд рівні між собою. Конструювання центроїд здійснюється у полярній системі координат. Обидві центроїди утворюються поворотом її елемента, тобто дуги кривої, на заданий кут навколо полюса. Величина кута залежить від кількості елементів центроїди. При коченні однієї центроїди по іншій полюс рухомої центроїди повинен описувати коло. В такому випадку кочення рухомої центроїди по нерухомій можна замінити обертальним рухом обох центроїд навколо нерухомих центрів (полюсів). Точка контакту центроїд під час їх обертання знаходиться на відрізку, що сполучає центри обертання і який називається міжцентровою відстанню. Ця точка для некруглих коліс при їх обертанні здійснює певне переміщення по вказаному відрізку, а для круглих залишається нерухомою.

Довжина дуги елемента однієї центроїди визначається величиною центрального кута, на який вона спирається. Це ж стосується і елемента другої центроїди. Якщо довжини дуг елементів центроїд рівні,то величини відповідних кутів не є рівними і перебувають у певній функціональній залежності. Знаходження цієї залежності зводиться до інтегрування виразу, отриманого на основі рівності диференціалів дуг відповідних елементів центроїд. Цей вираз може бути проінтегрований не для всіх кривих, з дуг яких формується вихідна або ведуча центроїда. Якщо вираз проінтегрувати не вдається, то побудову веденої центроїди потрібно здійснювати чисельними методами. В статті розглянуто криву на основі гіперболічного косинуса, для якої отриманий вираз інтегрується. Наведено параметричні рівняння кривих, із дуг яких складається як ведуча, так і ведена центроїди. Показано, що для центроїд із заданим співвідношенням елементів міжцентрова відстань визначається однозначно. Побудовано рисунки центроїд із різним числом елементів для внутрішнього і зовнішнього зачеплення.

Ключові слова: центроїди, некруглі колеса, внутрішнє і зовнішнє кочення, міжцентрова відстань, параметричні рівняння кривих.

Постановка проблеми

Кочення без ковзання циліндричних поверхонь одна по одній можна замінити коченням центроїд – кривих поперечного перерізу цих циліндрів. Просторова задача кочення лінійчатих нерозгортних поверхонь одна по одній в даному випадку може бути замінена плоскою. Передачі, які передають обертальний рух за рахунок тертя між поверхнями, називаються фрикційними. Для них характерний суттєвий недолік: вони не можуть передавати крутний момент великої потужності, але є базовими для проектування потужних зубчастих зачеплень.

Центроїди деяких некруглих коліс досить добре вивчені. Як правило, вони конструюються не з окремих конгруентних дуг, а з неперервної замкненої кривої. Характерною їх особливістю є неперервність передавальної функції, тоді як для складених центроїд передавальна функція не є неперервною. Однак для механізмів потрібні центроїди із різними передавальними функціями.

Аналіз останніх досліджень

Теоретичні питання аналітичного опису центроїд некруглих коліс та проектування на їх основі зубчатих зачеплень детально висвітлено в працях [1, 2]. Загальновідомими є приклади кочення криволінійного профілю по прямій і навпаки – кочення прямолінійного відрізка по кривій. Класичним для першого випадку є кочення кола по прямій, в результаті якого точка кола описує циклоїду і кочення прямої по колу, в результаті якого точка прямої описує евольвенту кола [3].

Геометричне моделювання центроїд некруглих коліс розглянуто в працях [4-6]. Некруглі колеса в зубчатих передачах розглянуто в працях [7, 8], в ланцюгових приводах – в монографії [9]. Деякі пари конгруентних центроїд некруглих коліс отримано в праці [10].

Мета досліджень

Розробити аналітичний опис і побудувати центроїди некруглих коліс із внутрішнім і зовнішнім коченням, утворених із конгруентних дуг симетричних кривих.

Результати досліджень

Моделювання дуг кривих будемо здійснювати в полярній системі координат. Початком координат (полюсом) однієї кривої, заданої радіус-вектором $\rho=\rho(\alpha)$ є точка O, і другої, заданої радіус-вектором $\rho_1=\rho_1(\varphi)$ є точка O_1. Міжцентрова відстань OO_1 вибрана таким чином, що при нульовому значенні полярних кутів α і φ криві дотикалися одна до одної в точці T (рис. 1). Якщо функції ρ і ρ_1 будуть парними, то при від'ємних значеннях полярних кутів полярні радіуси матимуть ті ж самі значення, що і при додатних кутах і крива буде симетричною (на рис. 1 симетрична вітка зображена штриховою лінією).

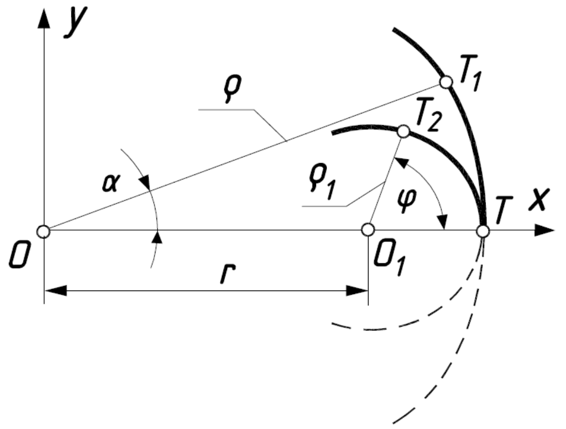


Рис. 1. Графічна ілюстрація до моделювання кривих із спільною точкою дотику при нульових значеннях полярних кутів.

Fig. 1. Graphic illustration for modeling curves with a common point of contact at zero values of polar angles.

При умові внутрішнього кочення без ковзання кривої ρ_1 по кривій ρ довжини дуг TT_1 і TT_2 повинні бути рівними. При $\alpha=\varphi=0$ можна записати: $\rho-\rho_1=r$, де через r позначена міжцентрова відстань OO_1. Поставимо умову, щоб ця рівність виконувалася для всіх відповідних точок обох кривих. Тоді можна записати: $\rho_1=\rho-r$. Запишемо параметричні рівняння кривих:

$$x=\rho\cos\alpha; \quad y=\rho\sin\alpha. \tag{1}$$

$$x_1=(\rho-r)\cos\varphi+r; \quad y_1=(\rho-r)\sin\varphi. \tag{2}$$

При конкретному значенні кута α згідно рівнянь (1) отримаємо точку на кривій, наприклад, точку T_1 (рис. 1). Для того, щоб отримати точку T_2 на другій кривій згідно рівнянь (2), потрібно підставити певне значення кута φ. Будемо вважати, що кут φ залежний від кута α, тобто $\varphi=\varphi(\alpha)$. Залежність $\varphi=\varphi(\alpha)$ знайдемо на основі рівності дуг TT_1 і TT_2 для поточного значення кута α. Похідну довжини дуги для обох кривих знаходимо за відомою формулою:

$$\frac{ds}{d\alpha}=\sqrt{x'^2+y'^2}. \tag{3}$$

Для визначення похідних дуг за формулою (3) знайдемо похідні кривих (1) і (2):

$$x'=\rho'\cos\alpha-\rho\sin\alpha; \quad y'=\rho'\sin\alpha+\rho\cos\alpha. \tag{4}$$

$$x_1'=\rho'\cos\varphi-\varphi'(\rho-r)\sin\varphi; \quad y_1'=\rho'\sin\varphi+\varphi'(\rho-r)\cos\varphi. \tag{5}$$

Після підстановки похідних (4) і (5) у формулу (3) одержимо вирази похідних дуг кривих:

$$\frac{ds}{d\alpha}=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}. \tag{6}$$

$$\frac{ds_1}{d\alpha}=\sqrt{\rho'^2+\varphi'^2(\rho-r)^2}. \tag{7}$$

Прирівняємо вирази (6) і (7) між собою і розв'яжемо відносно залежності $\varphi=\varphi(\alpha)$:

$$\varphi=\pm\int\frac{\rho}{\rho-r}d\alpha. \tag{8}$$

Розглянемо приклад. Візьмемо парну функцію:

$$\rho=\rho_0+a\cosh b\alpha, \tag{9}$$

де ρ_o, a, b – сталі величини. За формулою (8) знаходимо:

$$\varphi=\int\frac{\rho_0+a\cosh b\alpha}{\rho_0+a\cosh b\alpha-r}d\alpha= =\frac{2r}{b\sqrt{a^2-(\rho_0-r)^2}}\times \times\mathrm{Arctg}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{a+r-}\rho_0}{\mathrm{a-r+}\rho_0}}\mathrm{Tanh}\,\frac{b\alpha}{2}\right)+\alpha+c. \tag{10}$$

Виходячи з умови, що при $a=0$ кут $\varphi=0$, знаходимо значення сталої інтегрування: $c=0$. Після підстановки виразу (9) у (1) отримаємо параметричні рівняння вихідної кривої, яку умовно назвемо ведучою. Підстановка виразів (9) і (10) при $c=0$ дасть параметричні рівняння розшукуваної кривої, яку назвемо веденою.

На рис. 2 побудовано ведучу (позначено цифрою 1) і ведену (позначено цифрою 2) криві. Вони побудовані при наступних значеннях сталих: $a=1$, $b=0{,}5$, $\rho_o=0{,}2$, $r=0{,}5$. Незалежна змінна (кут α) змінювалася в межах $\alpha=-\pi/2 \ldots \pi/2$. Довжини дуг обох кривих рівні між собою. Здійснимо перекочування кривої 2 по кривій 1. Для цього потрібно, щоб при певному значенні параметра α відповідні точки кривих (наприклад, точки T_1 і T_2, рис. 1) збіглися, причому криву 2 потрібно повернути так, щоб у цих точках була спільна дотична до обох кривих. Це зводиться до повороту кривої 2 на певний кут і її паралельного перенесення. Кут повороту визначається різницею кутів α і φ. При перекочуванні кривої 2 по кривій 1 точка O_1 рухатиметься по колі радіуса r, яким є задана міжцентрова відстань. Її нове положення визначиться із рівнянь 1 при підстановці в них замість ρ величини радіуса r. Знайдені координати і будуть тими відрізками, на які потрібно змістити криву 2.

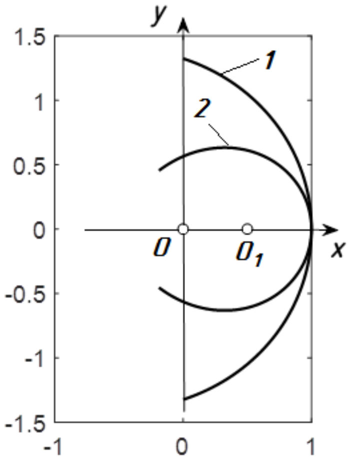


Рис. 2. Симетричні криві рівної довжини.
Fig. 2. Symmetrical curves of equal length.

На рис. 3 побудовано криву 1 і три проміжних положення кривої 2 при її перекочуванні: при $\alpha=0$, $\alpha=\pi/4$ і $\alpha=\pi/2$.

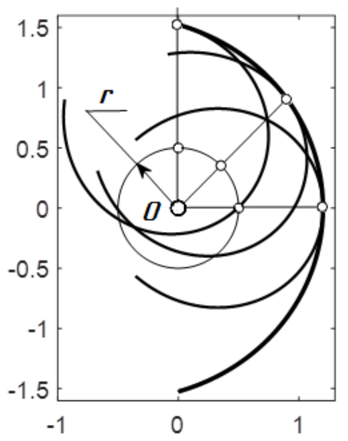


Рис. 3. Проміжні положення кривої 2 при її внутрішньому обкочуванні по кривій 1.
Fig. 3. Intermediate positions of curve 2 during its internal rolling along curve 1.

Якщо центри O і O_1 зробити нерухомими, то криві будуть обкочуватися одна по одній, одночасно обертаючись навколо цих точок (рис. 4).

Суцільними лініями показані криві у вихідному положенні, а штриховими – після повороту кривих: крива 1 повернулася навколо точки O на кут $\alpha=\pi/2$, а крива 2 – навколо O_1 на кут φ, який визначається за формулою (10) при $\alpha=\pi/2$. Якби крива 2 (рис. 2) була замкнена, то її обкочування можна було б продовжити по іншій кривій, симетричній до кривої 1 відносно осі Oy. Для цього потрібно, щоб при зміні кута α в рівняннях вихідної кривої (1) від нуля до 90° кут φ змінювався від нуля до 180°. Це означає, що при підстановці в формулу (10) значення $\alpha=\pi/2$ ми повинні отримати $\varphi=\pi$.

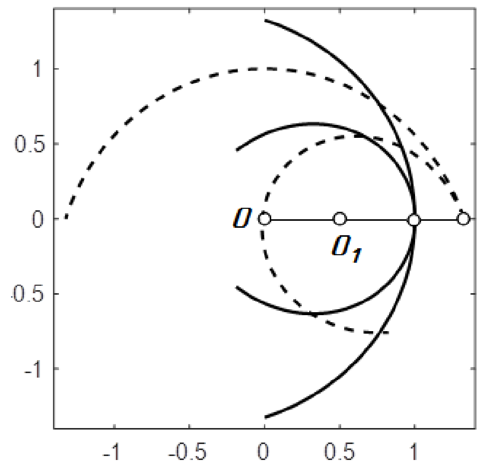


Рис. 4. Два положення кривих при їх обертанні навколо нерухомих точок O і O_1.
Fig. 4. Two positions of the curves as they rotate around the fixed points O and O_1.

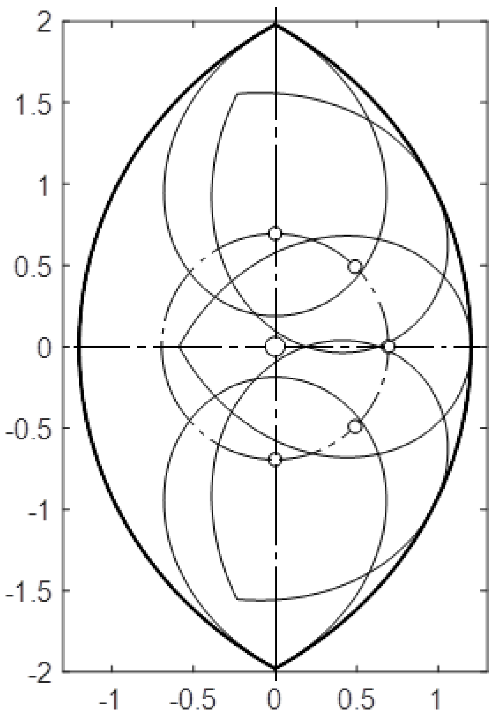


Рис. 5. Проміжні положення замкненої кривої при її обкочуванні фігури, що складається із двох симетричних дуг вихідної кривої.
Fig. 5. Intermediate positions of a closed curve when rolling a figure consisting of two symmetrical arcs of the original curve.

Такого результату можна добитися комбінацією певних значень сталих, що входять до формули (10). Якщо вихідна крива задана, тобто сталі a, b, ρ_o вже визначені, то залишається знайти потрібне значення сталої r, тобто знайти міжцентрову відстань. Розв'язати рівність (10) відносно сталої r не вдається, тому її значення потрібно знаходити чисельними методами. Наприклад, при $a=1$, $b=0{,}75$, $\rho_o=0{,}2$ знаходимо: $r=0{,}694$. За цими даними на рис. 5 побудовано замкнену фігуру із двох симетричних дуг вихідної кривої і неперервну замкнену криву з різними точками дотику.

При внутрішньому обкочуванні замкненої кривої по симетричному контуру її центр обертання описує коло радіуса r. Таким чином, за заданим контуром форма внутрішньої кривої і міжцентрова відстань визначаються однозначно. Можна змінювати параметри вихідної кривої, наприклад, кут між симетричними дугами в точці їх перетину.

На рис. 6 зображені послідовні положення кривих, коли вони обертаються навколо нерухомих центрів O і O_1. На кожному наступному зображенні поворот складеного контуру збільшується на 30°. При його загальному повороті на 90° внутрішня крива повернулася на 180°.

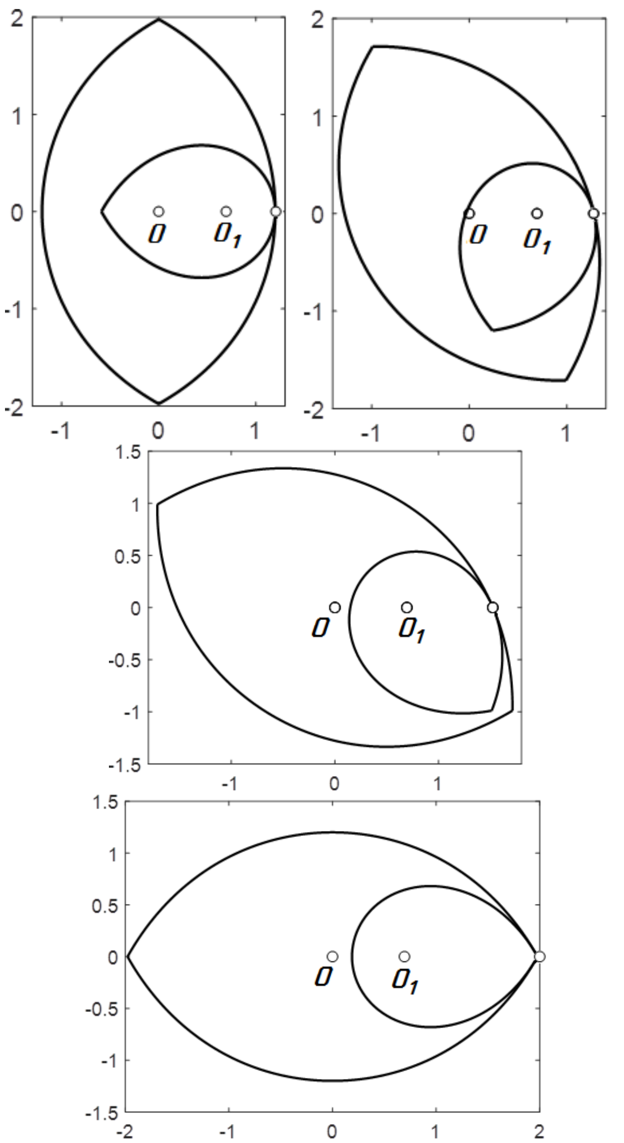


Рис. 6. Проміжні положення замкнених кривих при їх обертанні навколо нерухомих точок O і O_1.

Fig. 6. Intermediate positions of closed curves when they rotate around fixed points O and O_1.

На рис. 5, 6 дуги симетричних кривих, що утворюють зовнішній замкнений контур, перетинаються під тупим кутом. Величину цього кута можна задавати. В розглянутих випадках контур утворений двома конгруентними дугами. Однак його можна утворити довільним числом дуг, які будуть перетинатися під заданим кутом. Розглянемо узагальнений випадок, коли число конгруентних дуг дорівнює n, а кут перетину між ними рівний ψ.

На рис. 7 дуга (елемент контуру) спирається на центральний кут величиною $2\pi/n$. Кут ψ між дотичними до дуг в точці їх перетину будемо задавати. Одна із сторін, що утворює кут ψ, складає з віссю Oy кут ε. Відомо, що tg $\varepsilon=y'/x'$. Запишемо значення кута ε через заданий кут ψ і відоме значення кута α. Як видно із рис. 7, в крайній точці дуги $\alpha=\pi/n$. Також можна записати: $\varepsilon=\psi/2-\alpha=\psi/2-\pi/n$. Запишемо вираз тангенса кута ε через співвідношення перших похідних (4):

$$\frac{\rho'\sin\alpha+\rho\cos\alpha}{\rho'\cos\alpha-\rho\sin\alpha}=\mathrm{tg}\varepsilon\,. \qquad (11)$$

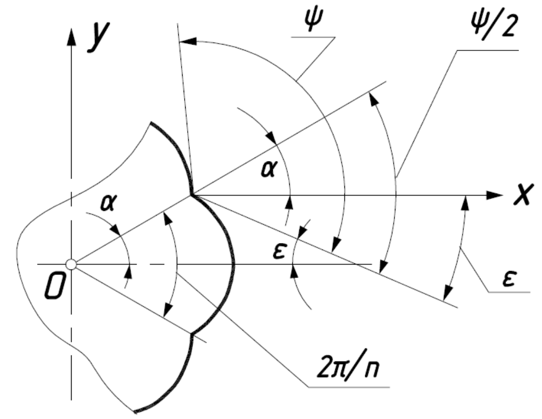


Рис. 7. До визначення кута ε через кількість n заданих елементів контуру і заданого кута ψ.

Fig. 7. To determine the angle ε through the number n of given elements of the contour and a given angle ψ.

Далі підставимо у (11) залежність $\rho=\rho(\alpha)$ (9) і похідну цієї залежності $\rho'=ab\sinh b\alpha$ при $\alpha=\pi/n$, а також вираз кута ε: $\varepsilon=\psi/2-\pi/n$. Після цього отримаємо рівняння, до якого входить заданий кут ψ і три сталі величини: ρ_o, a, b. Підбором цих сталих можна забезпечити задане значення кута ψ. Можна розв'язати отримане рівняння відносно однієї із вказаних сталих і отримати потрібне її значення. Це вдається зробити для сталої ρ_o або a. Проте тут є особливість. Справа в тому, що кут ε може приймати як додатні, так і від'ємні значення. Наприклад, якщо у вираз $\varepsilon=\psi/2-\pi/n$ підставити кут $\psi=\pi/2$ і кількість елементів $n=4$, то ми отримаємо $\varepsilon=0$. При $n<4$ значення кута ε буде від'ємним, при $n>4$ – додатним. Це означає, що рівняння (11) потрібно розв'язувати при $\pm\mathrm{tg}\varepsilon$. В результаті ми отримаємо два розв'язки. Для сталої ρ_o:

– при додатному значенні ε:

$$\rho_0=-a\left(\cosh\frac{b\pi}{n}+b\sinh\frac{b\pi}{n}\,\mathrm{tg}\,\frac{4\pi-n\psi}{2n}\right); \qquad (12)$$

– при від'ємному значенні ε:

$$\rho_0=-a\left(\cosh\frac{b\pi}{n}+b\sinh\frac{b\pi}{n}\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}\right). \qquad (13)$$

Для сталої a:

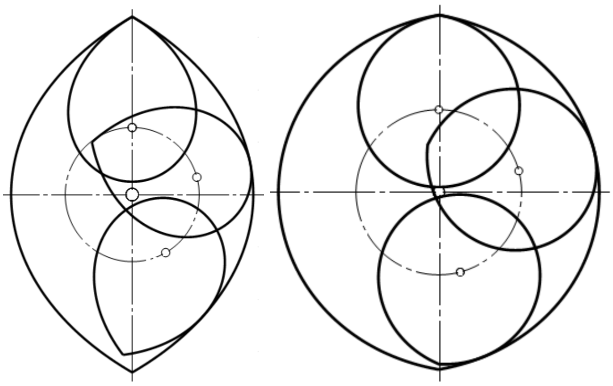
– при додатному значенні ε:

$$a = \frac{-\rho_0}{\cosh\frac{b\pi}{n} + b\sinh\frac{b\pi}{n}\,\mathrm{tg}\,\frac{4\pi - n\psi}{2n}}; \quad (14)$$

– при від'ємному значенні ε:

$$a = \frac{-\rho_0}{\cosh\frac{b\pi}{n} + b\sinh\frac{b\pi}{n}\,\mathrm{tg}\,\frac{\psi}{2}}. \quad (15)$$

На рис. 8 побудовано центроїди із внутрішнім зачепленням, у яких вихідна складається із двох елементів ($n=2$), що перетинаються під заданими кутами $\psi=120°$ і $\psi=160°$. Для обох випадків сталі a і b рівні: $a=0,5$, $b=1,5$. Сталу ρ_o знаходимо із формули (12). Для першого випадку $\rho_o=4,13$, для другого – $\rho_o=19,576$. Міжцентрова відстань r і внутрішня крива знайдені, як у попередньому випадку. Порівнюючи рис. 8,а і 8,б бачимо, що по мірі збільшення кута ψ як зовнішній контур, так і внутрішня крива все більше за формою наближаються до кіл.



а б

Рис. 8. Центроїди із внутрішнім зачепленням, у яких зовнішній контур складається із двох елементів, що перетинаються під різними кутами:

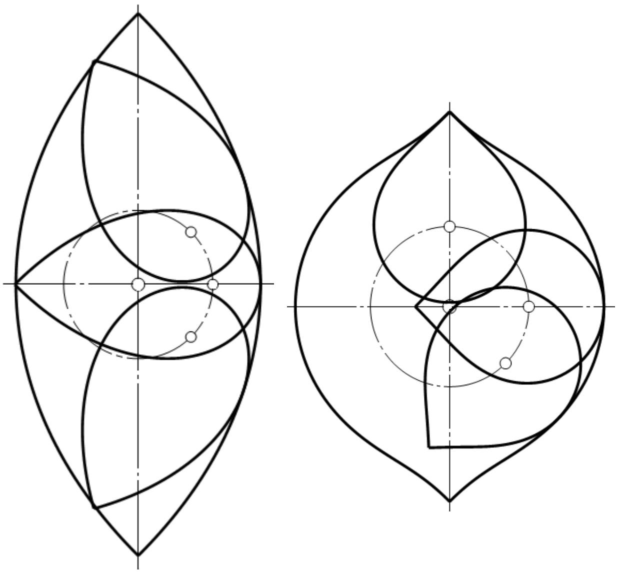
Fig. 8. Centroids with internal gearing, in which the outer circuit consists of two elements that intersect at different angles:

а) $\psi=120°$, $\rho_o=4,13$, $r=2,561$;
б) $\psi=160°$, $\rho_o=19,576$, $r=10,358$

Побудуємо центроїди, у яких дуги вихідної кривої перетинаються під прямим кутом. Скористаємося формулою (14). При $\rho_o=3$, $b=1,5$, $n=2$, $\psi=90°$ отримаємо: $a=1.1909$. На рис. 9,а при цих сталих побудовано контур вихідної центроїди та окремі положення внутрішньої при її обкочуванні всередині вихідної. Характерною ознакою є те, що вершина прямого кута внутрішньої центроїди при її коченні з певною точністю окреслює контур зовнішньої.

При інших значеннях сталих b і $\rho_o=3$ за формулою (14) отримуємо інше значення сталої a. На рис. 9,б побудовано ще одну пару центроїд. Форма вихідних кривих відрізняється між собою, але в обох випадках складові дуги перетинаються під прямим кутом.

Вихідний контур із двох дуг можна задати для від'ємного значення кута ε. При цьому ми отримаємо іншу форму зовнішньої центроїди. На рис. 10 побудовані центроїди із різним кутом перетину складових дуг. Для обох контурів сталі a і b є однаковими, а стала ρ_o визначалася за формулою (13).

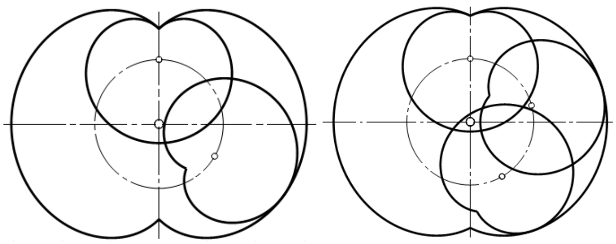


а б

Рис. 9. Центроїди із внутрішнім зачепленням, у яких зовнішній контур складається із двох елементів, які перетинаються під прямим кутом:

Fig. 9. Centroids with internal gearing, in which the outer circuit consists of two elements that intersect at right angles:

а) $a=1,19085$, $b=1,5$, $\psi=90°$, $\rho_o=3$, $r=2,555$;
б) $a=0,00097$, $b=5$, $\psi=90°$, $\rho_o=5$, $r=2,5678$



а б

Рис. 10. Центроїди із внутрішнім зачепленням, у яких зовнішній контур складається із двох елементів, що перетинаються під різними кутами:

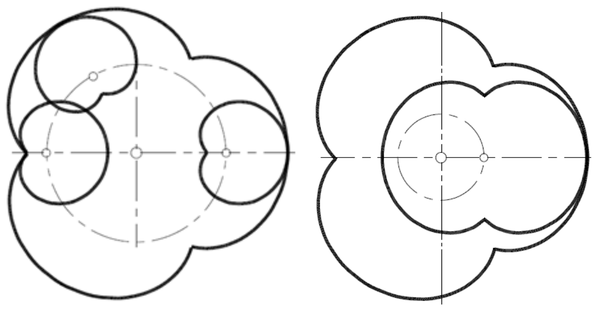
Fig. 10. Centroids with internal gearing, in which the outer circuit consists of two elements that intersect at different angles:

а) $\psi=90°$, $a=-0,5$, $b=1,5$, $\rho_o=6,582$, $r=2,65$;
б) $\psi=120°$, $a=-0,5$, $b=1,5$, $\rho_o=9,453$, $r=4,12$

Нами розглянуто центроїди із внутрішнім зачепленням, у яких зовнішня центроїда складається із двох дуг, а внутрішня – із однієї. Вони мають різну форму в залежності від знака кута ε, утвореного дотичною до дуги в крайньому положенні із віссю Ox. Для додатного значення характерна форма, представлена на рис. 8, а для від'ємного – на рис. 10.

Можливі і інші поєднання дуг як зовнішньої, так і внутрішньої центроїд. На рис. 11 зовнішня центроїда складається із трьох симетричних дуг. При прийнятих значеннях $\psi=90°$, $a=-0,2$, $b=2$, $n=3$ за формулою (13) знаходимо: $\rho_o=2,4238$. Дугу кривої будуємо за рівняннями (1), (9) при зміні кута α в межах $\alpha=-\pi/3$...

$\pi/3$. Щоб контур був замкненим, отриману дугу потрібно повернути на ±120°.



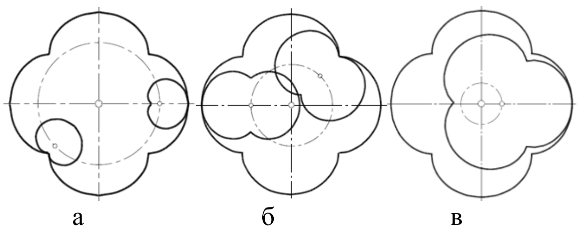
а б

Рис. 11. Центроїди із внутрішнім зачепленням, у яких зовнішній контур складається із трьох елементів, що перетинаються під прямим кутом:

Fig. 11. Centroids with internal gearing, in which the outer contour consists of three elements intersecting at right angles:

а) $a= -0{,}2,\ b=2,\ \rho_o=2{,}4238,\ r=1{,}3209;$
б) $a= -0{,}2,\ b=2,\ \rho_o=2{,}4238,\ r=0{,}6719$

Довжина дуги елемента зовнішньої центроїди дорівнює довжині дуги елемента внутрішньої центроїди. Внутрішня центроїда складається із одного елемента (рис. 11,а) і двох елементів (рис. 11,б). Відповідно потрібно це враховувати при розв'язуванні рівняння (10). Міжцентрову відстань r знаходимо чисельними методами при підстановці в нього значення $\alpha=\pi/3$ (це відповідає дузі елемента зовнішньої центроїди) і $\varphi=\pi$ (рис. 11,а) та $\varphi=\pi/2$ (рис. 11,б), що відповідає довжинам дуг елементів внутрішніх центроїд). Якщо число елементів внутрішньої центроїди задати рівне трьом, то внутрішня і зовнішня центроїди збіжаться і розв'язок рівняння (10) дасть результат $r=0$. Це стосується всіх центроїд внутрішнього зачеплення із рівним числом елементів зовнішньої і внутрішньої центроїд.



а б в

Рис. 12. Центроїди із внутрішнім зачепленням, у яких зовнішній контур складається із чотирьох елементів, що перетинаються під прямим кутом:

Fig. 12. Centroids with internal gearing, in which the outer contour consists of four elements intersecting at right angles:

а) $a= -0{,}2,\ b=2,\ \rho_o=1{,}4224,\ r=0{,}8203;$
б) $a= -0{,}2,\ b=2,\ \rho_o=1{,}4224,\ r=0{,}5569;$
в) $a= -0{,}2,\ b=2,\ \rho_o=1{,}4224,\ r=0{,}2801$

Подібним чином можна будувати центроїди внутрішнього зачеплення із різними комбінаціями числа їх елементів. При цьому в рівнянні (10) потрібно задавати $\alpha=\pi/n$ і $\varphi=\pi/m$, де n – число елементів зовнішньої центроїди і m – число елементів внутрішньої центроїди. На рис. 12 побудовані можливі комбінації внутрішнього зачеплення центроїд, у яких зовнішня центроїда складається із чотирьох елементів, що перетинаються під прямим кутом. Прямий кут є мінімальним значенням кута перетину дуг елементів, при якому можливе кочення центроїд без заклинювання.

Якщо кутові ψ надати від'ємного значення, то можна побудувати центроїду іншої форми. Наприклад, при підстановці у формулу (15) значень $b=3{,}5$, $\rho_o=2$, $\psi= -\pi/2$, $n=6$ отримаємо: $a=0{,}2684$. Зовнішня центроїда, побудована за наведеними даними, має форму, зображену на рис. 13.

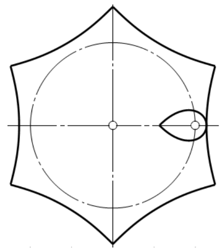
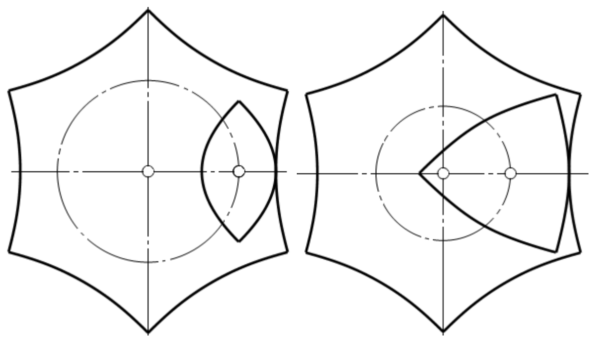


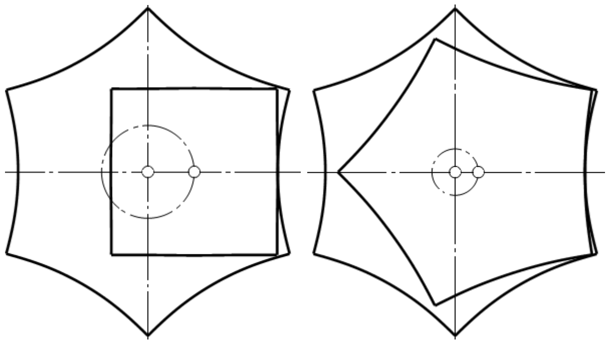
Рис. 13. Центроїди для $a=0{,}2684,\ b=3{,}5,\ \rho_o=2,\ \psi= -\pi/2,\ r=1{,}9942,\ n=6,\ m=1$.

Fig. 13. Centroids for $a=0{,}2684,\ b=3{,}5,\ \rho_o=2,\ \psi= -\pi/2,\ r=1{,}9942,\ n=6,\ m=1$.

Збільшуючи число m елементів внутрішньої центроїди, одержимо пари центроїд із внутрішнім зачепленням, зображених на рис. 14.



а б



в г

Рис. 14. Пари центроїд внутрішнього кочення із однаковим зовнішнім контуром, побудованим при $a=0{,}2684,\ b=3{,}5,\ \rho_o=2$:

Fig. 14. Pairs of centroids of internal rolling with the same external contour constructed at $a=0{,}2684,\ b=3{,}5,\ \rho_o=2$:

а) $r=1{,}6103;$ б) $r=1{,}2123;$
в) $r=0{,}8098;$ г) $r=0{,}4054$

Знаходження міжцентрової відстані r здійснювалося так як і для інших випадків – підстановкою у рівняння (10) сталих ρ_o, a, b вихідної кривої та значень кутів $\alpha=\pi/n$ і $\varphi=\pi/m$.

Розглянемо центроїди із зовнішнім зачепленням (або із зовнішнім контактом). При цьому виникають деякі зміни в аналітичному описі розшукуваної центроїди і виразу кута φ. Це випливає із змін геометричних параметрів рис. 1. Для зовнішнього контакту рис. 1 має вигляд, наведений на рис. 15.

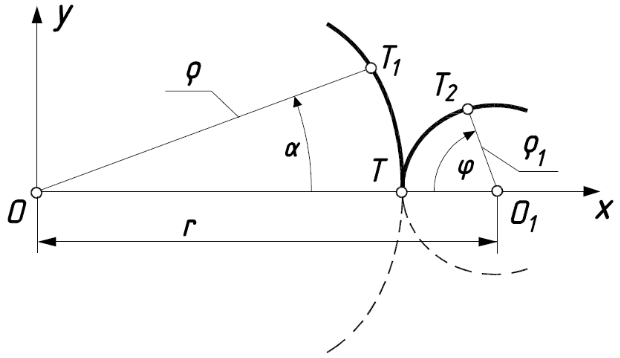


Рис. 15. Графічна ілюстрація до моделювання кривих із спільною точкою дотику при їх зовнішньому контакті

Fig. 15. Graphic illustration for modeling curves with a common point of contact at their external contact

Відмінності полягають в наступному: 1) міжцентрова відстань r є сумою вектор-радіусів ρ і ρ_1; 2) при додатному зростанні кута α кут φ зменшується, тобто має протилежний знак. Із врахуванням цього вираз для визначення кута φ (рис. 15) приймає наступний вигляд:

$$\varphi = \alpha + \pi - \frac{2r}{b\sqrt{a^2 - (\rho_0 - r)^2}} \times \operatorname{Arctg}\left(\sqrt{\frac{\mathrm{a} + \mathrm{r} - \rho_0}{\mathrm{a} - \mathrm{r} + \rho_0}} \operatorname{Tanh} \frac{b\alpha}{2} \right). \quad (16)$$

Параметричні рівняння веденої центроїди мають вигляд:

$$x_2 = (r - \rho)\cos\varphi + r; \quad y_2 = -(r - \rho)\sin\varphi, \quad (17)$$

де залежності $\rho=\rho(\alpha)$ і $\varphi=\varphi(\alpha)$ наведені у (9) і (16) відповідно.

Побудова ведучої і веденої центроїд для їх зовнішнього контакту відбувається за тим же алгоритмом, що і для внутрішнього контакту. На певні відмінності ми звернемо увагу у потрібних випадках. Почнемо із ведучої центроїди, яка може складатися із одного елемента на відміну від внутрішнього контакту центроїд, де мінімальне число елементів вихідної центроїди становило два.

За умови перетину кривої під прямим кутом при $a=-1{,}5$, $b=0{,}5$ за формулою (13) знаходимо: $\rho_o=5{,}4897$. Вихідну криву будуємо за рівняннями (1) і (9) при зміні кута $\alpha=-\pi...\pi$, тобто за правилом $\alpha=\pi/n$. Для побудови веденої центроїди потрібно спочатку знайти міжцентрову відстань r. Її знаходимо чисельним розв'язанням рівняння (16) при $\alpha=\pi$ і $\varphi=0$. Пояснюється це тим, що при повороті радіус-вектора ρ (рис. 15) на кут $\alpha=\pi$ радіус-вектор ρ_1 для одного елемента веденої центроїди теж повинен повернутися на такий же кут в протилежну сторону, тобто від початкового положення $\varphi=\pi$ до кінцевого $\varphi=0$. В результаті розв'язання отримуємо: $r=6{,}804$. Вихідна центроїда та окремі положення веденої центроїди за отриманими даними побудовано на рис. 16.

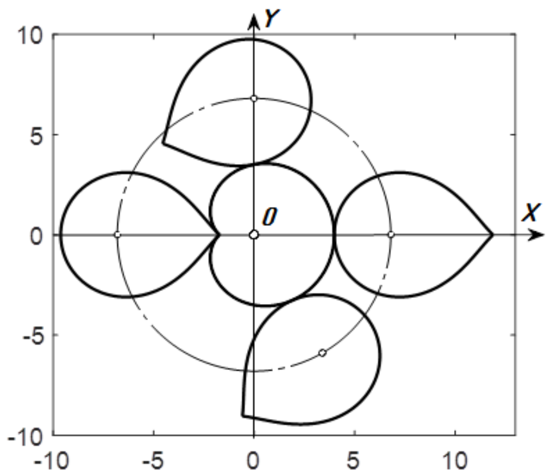


Рис. 16. Зовнішнє кочення центроїд, отриманих при $a=-1{,}5$, $b=0{,}5$, $\rho_o=5{,}4897$, $r=6{,}804$.

Fig. 16. External rolling centroid obtained at $a=-1{,}5$, $b=0{,}5$, $\rho_o=5{,}4897$, $r=6{,}804$.

При розв'язуванні рівняння (16) величину кута φ в залежності від числа елементів m веденої центроїди знаходимо не так, як для центроїд із внутрішнім контактом. Зважаючи на зворотний відлік кута φ, його величина визначається за формулою: $\varphi=\pi(m-1)/m$. Для одного елемента $\varphi=0$, для двох – $\varphi=\pi/2$ і т.д.

Побудуємо центроїди при сталому значенні сталої a. Нехай $a=0{,}1$, $b=2$. За формулою (12) для $\psi=90°$ знаходимо: $\rho_o=26{,}774$. Центроїди за наведеними даними побудовано на рис. 17.

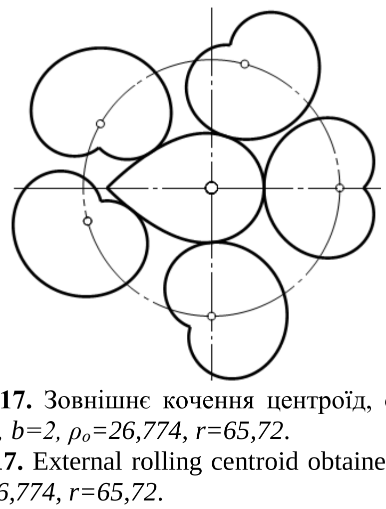
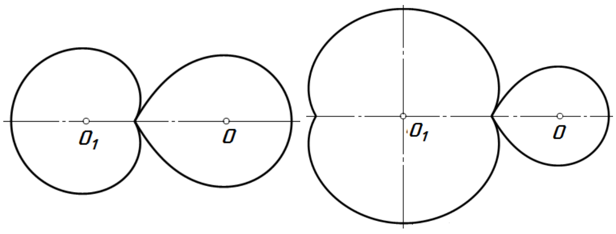


Рис. 17. Зовнішнє кочення центроїд, отриманих при $a=0{,}1$, $b=2$, $\rho_o=26{,}774$, $r=65{,}72$.

Fig. 17. External rolling centroid obtained at $a=0{,}1$, $b=2$, $\rho_o=26{,}774$, $r=65{,}72$.

На рис. 18 зображено пари центроїд, у яких криві перетинаються під кутом $\psi=120°$ вихідні центроїди конгруентні і ведені мають різне число елементів.



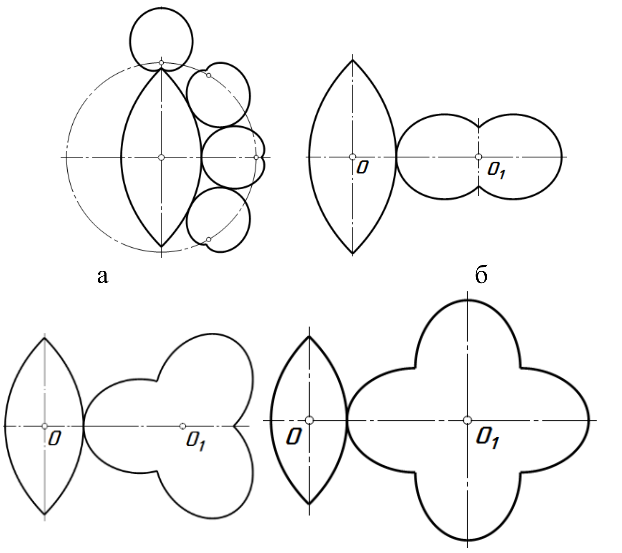
а б

Рис. 18. Пари центроїд, у яких вихідна крива складається із одного елемента, отриманого при *a=0,1, b=2,* ρ_o*=65,975*:

Fig. 18. Pairs of centroids in which the original curve consists of one element obtained at *a=0,1, b=2,* ρ_o*=65,975*:

а) *m=1, r=141,9;*
б) *m=2, r=211,61;*

На рис. 19 зображено центроїди, у яких криві перетинаються під кутом *ψ=90°*. Вихідні центроїди конгруентні і складаються із двох елементів, а ведені мають різне число елементів.



а б

в г

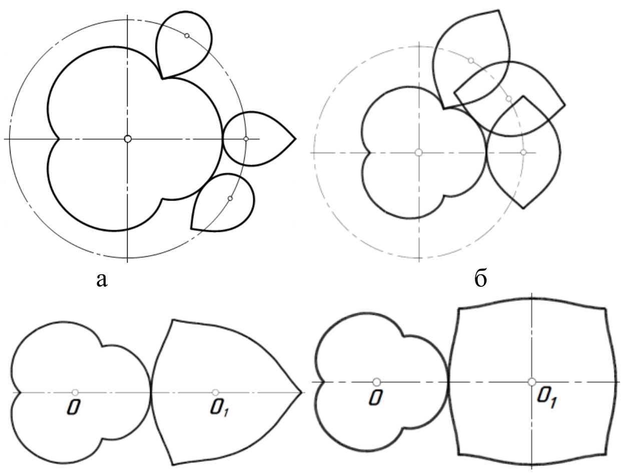
Рис. 19. Зовнішнє зачеплення центроїд, у яких вихідна крива складається із двох елементів, отриманих при *a=0,7939, b=1,5,* ρ_o*=2*:

Fig. 19. External gearing of centroids, in which the original curve consists of two elements obtained at *a=0,7939, b=1,5,* ρ_o*=2*:

а) *m=1, r=6,5958;* б) *m=2, r=8,102;*
в) *m=3, r=9,864;* г) *m=4, r=11,689*

Аналогічні зображення для *n=3*, тобто зовнішнє зачеплення для вихідної центроїди із трьох елементів наведено на рис. 20.

Зображення зовнішнього зачеплення для *n=12* і від'ємного кута *ψ= –90°* наведено на рис. 21.



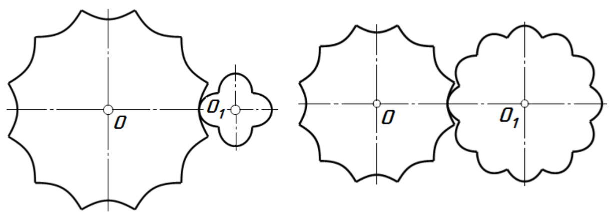
а б

в г

Рис. 20. Зовнішнє зачеплення центроїд, у яких вихідна крива складається із трьох елементів, отриманих при *a= –0,2, b=2,* ρ_o*=2,4238*:

Fig. 20. External gearing of centroids, in which the original curve consists of three elements obtained at *a= –0,2, b=2,* ρ_o*=2,4238*:

а) *m=1, r=2,772;* б) *m=2, r=3,4377;*
в) *m=3, r=4,1126;* г) *m=4, r=4,7901*



а б

Рис. 21. Зовнішнє зачеплення центроїд, у яких вихідна крива складається із 12 елементів, отриманих при *a=0,8988, b=3,5,* ρ_o*=2*:

Fig. 21. External gearing of centroids, in which the original curve consists of 12 elements obtained at *a=0,8988, b=3,5,* ρ_o*=2*:

а) *m=4, r=4,061;* б) *m=12, r=6,07*

Висновки

1. В статті розроблено алгоритм побудови центроїд некруглих коліс, які складаються із дуг симетричних кривих. Величину кута в точці їх з'єднання можна задавати. Центроїди можна конструювати як із внутрішнім, так і зовнішнім зачепленням. Для внутрішнього зачеплення кількість дуг (елементів) внутрішньої центроїди повинна бути на одиницю менша від кількості елементів зовнішньої центроїди.

2. Для зовнішнього зачеплення співвідношення елементів для обох центроїд може бути задане без обмежень. Зміною форми кривої можна отримувати різні поєднання пар центроїд. На криву накладаються певні обмеження: 1) вона повинна бути симетричною; 2) її аналітичний опис повинен допускати інтегрування отриманого в статті виразу.

Список літератури

1. *Литвин Ф. Л.* Некруглые зубчатые колеса. Москва. Машгиз, 1956. 312 с.
2. *Литвин Ф. Л.* Теория зубчатых зацеплений. Москва. Наука, 1968. 584 с.
3. *Савелов А. А.* Плоские кривые. Систематика, свойства, применения. Москва. Физматгиз, 1960. 294 с.
4. *Коврегін В. В., Маловик І. В.* Аналітичний опис центроїд некруглих зубчатих Праці ТДАТУ. Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2011. Т. 49. С. 125-129.
5. *Легета Я. П.* Опис та побудова спряжених центроїд некруглих зубчастих коліс. Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. праць МДПУ ім. Богдана Хмельницького, 2014. Вип. 3. С. 87-92.
6. *Легета Я. П., Шоман О. В.* Геометричне моделювання центроїд некруглих зубчастих коліс за передавальною функцією. Геометричне моделювання та інформаційні технології. Науковий журнал: МНУ імені О. Сухомлинського. 2016. № 2. С. 59-63.
7. *Падалко А. П., Падалко Н. А.* Зубчатая передача с некруглым колесом. Теория механизмов и машин. 2013. № 2. Том 11. С. 89-96. Режим доступу: http://tmm.spbstu.ru/22/padalko.pdf
8. *Соболев А. Н., Некрасов А. Я., Арбузов М. О.* Моделирование механических передач с некруглыми зубчатыми колесами. Вестник МГУ «Станкин». 2017. № 1(40). С. 48-51. Режим доступу: https://elibrary.ru/ item. asp? id= 28904475.
9. *Утутов Н. П.* Цепные приводы с некруглыми зубчатыми колёсами: монография. Луганск. Ноулидж, 2011. 198 с.
10. *T. Hasse*. Über die vielfältigen Möglichkeiten, unrunde Zahnräder für typische Getriebeaufgaben der Technik optimal auszulegen. [Електронний ресурс] / T. Hasse. Режим доступу: http://www.optimasimula.de/downloads/moeglichkeiten_unrundraeder.pdf.

References

1. *Litvin F. L.* (1956). Non-circular gears. Moscow: Mashgiz, 312.
2. *Litvin F. L.* (1968). Theory of gears. Moscow: Science, 584.
3. *Savelov A. A.* (1960). Flat curves. Systematics, properties, applications. Moscow: Fizmatgiz, 294.
4. *Kovregin V. V., Malovik I. V.* (2011). Analytical description of the centroid of non-circular gears. Works of TSATU. Vol. 4. Applied geometry and engineering graphics. T. 49, 125-129.
5. *Legeta Ya. P.* (2014). Description and construction of conjugate centroids of non-circular gears. Modern modeling problems: coll. of sciences. to the MSPU them. B. Khmelnitsky. № 3, 87-92.
6. *Legeta Ya. P., Shoman O. V.* (2016). Geometric modeling of the centroid of non-circular gears by transfer function. Geometric modeling and information technology. Scientific journal: MNU named after O. Sukhomlinsky. № 2, 59-63.
7. *Padalko A. P., Padalko N. A.* (2013). Gear with non-circular wheel. Theory of mechanisms and machines. 2 № 2, Vol. 11, 89-96. Access mode: http://tmm.spbstu.ru /22/padalko.pdf.
8. *Sobolev A. N., Nekrasov A. Ya., Arbuzov M. O.* (2017). Modeling of mechanical gears with non-circular wheels. Bulletin of Moscow State University "Stankin." No. 1 (40), 48-51. Access mode: https://elibrary.ru/ item. asp?id=28904475
9. *Ututov N. P.* (2011). Chain drives with non-circular gears: monograph. Lugansk: Knowledge, 198.
10. *T. Hasse.* On the various options for optimally designing non-circular gears for typical technical transmission tasks. [Electronic resource]. Access mode: http://www.optimasimula.de/downloads/moeglichkeiten_ unrundraeder.pdf.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦЕНТРОИД НЕКРУГЛЫХ КОЛЕС С ВНУТРЕННИМ И ВНЕШНИМ КАЧЕНИЕМ ИЗ ДУГ СИММЕТРИЧНЫХ КРИВЫХ

Т. А. Кресан, С. Ф. Пилипака, И. Ю. Грищенко, Я. С. Кремец

Аннотация. В статье рассмотрено конструирование некруглых колес, которые служат центроидами при проектировании зубчатых зацеплений. Центроиды состоят из конгруэнтных дуг заданной симметричной кривой. Число этих дуг, то есть элементов центроиды, определяется видом зацепления (внутреннее или внешнее). При наружном зацеплении количество элементов обоих центроид может быть произвольным, начиная с одного элемента. При внутреннем зацеплении количество элементов внутренней центроиды должно быть на единицу меньше количества элементов внешней центроиды. Если количество элементов одинаково, то центроиды совпадают.

Качения центроид одна по другой происходит при отсутствии скольжения. Это возможно при условии, что длины дуг отдельных элементов обоих центроид равны между собой. Конструирование центроид осуществляется в полярной системе координат. Обе центроиды получаются поворотом ее элемента, то есть дуги кривой, на заданный угол вокруг полюса. Величина угла зависит от количества элементов центроиды. При качении одной центроиды по другой полюс подвижной центроиды должен описывать окружность. В таком случае качение подвижной центроиды по неподвижной можно заменить вращательным движением обеих центроид вокруг неподвижных центров (полюсов). Точка контакта центроид во время их вращения находится на отрезке, соединяющем центры вращения и который называется межцентровым расстоянием. Эта точка для некруглых колес при их вращении осуществляет определенное перемещение по указанному отрезку, а для круглых остается неподвижной.

Длина дуги элемента одной центроиды определяется величиной центрального угла, на который она опирается. Это же касается и элемента второй центроиды. Если длины дуг элементов центроид равны, то величины соответствующих углов не равны и находятся в определенной функциональной зависимости. Нахождение этой зависимости сводится к интегрированию выражения, полученного на основе равенства дифференциалов дуг соответсвующих элементов центроид. Это выражение может быть проинтегрировано не для всех кривых, из дуг которых формируется исходная или ведущая центроида. Если выражение проинтегрировать не удается, то построение ведомой центроиды нужно осуществлять численными методами. В статье рассмотрено кривую на основе гиперболического косинуса, для которой полученное выражение интегрируется. Приведены параметрические уравнения кривых, с дуг которых состоит как ведущая, так и ведома центроиды. Показано, что для центроид с заданным соотношением элементов межцентровое расстояние определяется однозначно. Построено рисунки центроид с различным числом элементов для внутреннего и внешнего зацепления.

Ключевые слова: центроиды, некруглые колеса, внутреннее и внешнее качение, межцентровое расстояние, параметрические уравнения кривых.

SIMULATION OF CENTROIDS OF NON-CIRCULAR WHEELS WITH INTERNAL AND EXTERNAL ROLLING FROM ARCS OF SYMMETRICAL CURVES

T. A. Kresan, S. F. Pylypaka, I. Yu. Grischenko, Ya. S. Kremets

Abstract. The article considers the design of non-circular wheels, which serve as centroids in the design of gears. Centroids consist of congruent arcs of a given symmetric curve. The number of these arcs, that is the elements of the centroid, is determined by the type of gearing (internal or external). In external gearing, the number of elements of both centroids can be arbitrary, starting with one element. In the case of internal gearing, the number of elements of the internal centroid must be one less than the number of elements of the external centroid. If the number of elements is the same, then the centroids coincide.

Rolling centroids one by one occurs in the absence of sliding. This is possible provided that the lengths of the arcs of the individual elements of both centroids are equal to each other. The construction of a centroid is carried out in a polar coordinate system. Both centroids are formed by rotating its element, that is the arc of the curve, at a given angle around the pole. The magnitude of the angle depends on the number of elements of the centroid. When rolling one centroid on the other, the pole of the moving centroid must describe the circle. In this case, the rolling of a moving centroid on a stationary one can be replaced by the rotational motion of both centroids around the fixed centers (poles). The point of contact of the centroids during their rotation is on the segment connecting the centers of rotation and which is called the center-to-center distance. This point for non-circular wheels when they rotate makes a certain movement along the specified segment, and for round wheels remains stationary.

The length of the arc of an element of one centroid is determined by the magnitude of the central angle on which it rests. The same applies to the element of the second centroid. If the lengths of the arcs of the elements of the centroid are equal, then the values of the corresponding angles are not equal and are in a certain functional dependence. Finding this dependence is reduced to the integration of the expression obtained on the basis of the equality of the differentials of the arcs of the corresponding centroid elements. This expression may not be integrated for all curves from which the arcs of the original or leading centroid are formed. If the expression cannot be integrated, then the construction of the driven centroid must be carried out by numerical methods. The article considers a curve based on the hyperbolic cosine, for which the obtained expression is integrated. The parametric equations of the curves of which the arcs of both the leading and the driven centroids consist are given. It is shown that for a centroid with a given ratio of elements the intercenter distance is determined unambiguously. Centroid drawings with different number of elements for internal and external gearing are constructed.

Key words: centroids, non-circular wheels, internal and external rolling, center-to-center distance, parametric equations of curves.

Т. А. Кресан ORCID 0000-0002-8280-9502.
С. Ф. Пилипака ORCID 0000-0002-1496-4615.
І. Ю. Грищенко ORCID 0000-0002-1000-9805.
Я. С. Кремець ORCID 0000-0003-0675-5757.