Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2021, Vol. 12, No 1, 109-119
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

http://dx.doi.org/10.31548/machenergy2021.01.109

УДК 514.18

ВНУТРІШНЄ КОЧЕННЯ НЕКРУГЛИХ ЦЕНТРОЇД, УТВОРЕНИХ ІЗ ДУГ ЛОГАРИФМІЧНОЇ СПІРАЛІ

Т. А. Кресан, С. Ф. Пилипака

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Стаття з спеціальності: 131 – прикладна механіка.

Кореспонденція авторів: tanyakresan@i.ua

Історія статті: отримано – листопад 2020, акцептовано – грудень 2020.
Бібл. 13, рис. 18, табл. 0.

Анотація. В статті розглянуто внутрішнє кочення плоских центроїд одна по одній з одночасним обертанням навколо нерухомих центрів. Характерною особливістю розглянутих центроїд є те, що профіль кожної із них утворений послідовним з'єднанням однакових дуг однієї ж і тієї логарифмічної спіралі. Він подібний до профілю зубчатого колеса. Так як і в зубчатих зачепленнях такі центроїди можуть передавати обертальний рух. На відміну від зубчатих коліс передача обертального руху відбувається без ковзання дуг в зоні контакту. Це відбувається завдяки тому, що довжини дуг профілів зубів рівні.

В класичних зубчатих зачепленнях застосовується евольвентний профіль, який свого часу запропонував Л. Ейлер [1]. Зубчаті передачі із таким профілем є найбільш поширеними. Відомі і інші профілі, наприклад, у передачі Новікова, у яких профілем зуба є коло або крива, близька до кола. При роботі вказаних зачеплень виникає ковзання в точці контакту зубів, причому в зачепленні Новікова воно менше, ніж у зачеплень із евольвентним профілем. В цих і інших зубчатих передачах на обох колесах існують кола, які перекочуються одне по одному без ковзання. Вони називаються центроїдами або ділильними колами, діаметри яких є основою для розрахунку всіх геометричних елементів зубчатого зачеплення. Відповідно і в нашому випадку центроїди можуть служити основою для проектування зубчатого зачеплення з евольвентним або іншим профілем зуба. В статті показано, що такі центроїди можуть бути утворені із заданим числом зубів у вигляді зубчатого колеса, отже вони також можуть виконувати роль зубчатої передачі. Головна перевага такої передачі – повна відсутність ковзання, що не призводить до тертя поверхонь в зоні контакту і їх зносу. Недоліком є те, що передаточне відношення при цьому не є сталим, воно періодично змінюється. Проте для деяких випадків це не впливає суттєво на роботу механізмів (наприклад, годинникових [2] або лічильних пристроїв).

Здійснено математичний опис профілів центроїд. Показана можливість побудови центроїд із довільною допустимою кількістю зубів на кожній із них. Міжосьова відстань залежить від кількості зубів на кожній центроїді і кута при вершині зуба. При однаковій кількості зубів на обох центроїдах вони збігаються. Побудовано пари центроїд, а також показано їх проміжні положення при повороті однієї із них на заданий кут. Кут повороту другої центроїди визначається аналітично і є функцією кута повороту першої центроїди.

Ключові слова: логарифмічна спіраль, центроїди, внутрішнє кочення, довжина дуги, міжцентрова відстань.

Постановка проблеми

При роботі зубчатих зачеплень відбувається ковзання робочих поверхонь, внаслідок чого виникає сила тертя, яка призводить до їх зношування. Сила тертя залежить від сили тиску поверхонь одна на одну під час їх взаємодії. Таким чином, чим більший крутний момент передається зубчатим зачепленням, тим більше воно піддається зносу. Для запобігання цьому пари коліс повинні постійно змащуватися. Якщо ж ковзання відсутнє, то і зношування поверхонь теж немає. Саме така передача із внутрішнім зачепленням розглядається у статті. Щоправда, при цьому наявні і недоліки, а саме при передачі сталого крутного моменту навантаження на зубчату пару носить періодичний змінний характер, що не є добре при роботі механізмів. Однак при невеликих величинах крутних моментів цей недолік не є суттєвим.

Аналіз останніх досліджень

Теоретичні питання проектування зубчатих зачеплень на основі центроїд некруглих коліс детально висвітлено в працях [3]. При проектуванні центроїд розглядається кочення двох криволінійних профілів один по одному з накладенням певних вимог до їх форми. Вони полягають у тому, щоб таке кочення відбувалося при одночасному обертанні цих профілів навколо нерухомих точок. Кочення плоского профілю по прямій відоме на прикладі кочення колеса, коли його точка описує циклоїду. В праці [4] розглянуто загальний випадок, коли плоский контур окреслено довільною кривою. Моделювання центроїд некруглих коліс розглянуто в працях [5–13].

Мета досліджень

Розробити аналітичний опис пар центроїд внутрішнього зачеплення, кожна із яких утворюється послідовним з'єднанням однакових дуг однієї ж і тієї логарифмічної спіралі із заданою їх кількістю.

Результати досліджень

Параметричні рівняння логарифмічної спіралі, яка у полярних координатах записується у вигляді $\rho=ae^{b\alpha}$, де a – стала, ρ – радіус-вектор, нахил якого до осі Ox визначається поточним значенням незалежного кута α, мають наступний вигляд:

$$x = ae^{b\alpha}\cos\alpha; \qquad y = ae^{b\alpha}\sin\alpha\,. \tag{1}$$

Початком координат (полюсом) кривої [1], заданої радіус-вектором $\rho=\rho(\alpha)$ є точка O. Побудуємо ще одну криву, задану радіус-вектором $\rho_1=\rho_1(\varphi)$ із полюсом в точці O_1 (рис. 1). При умові внутрішнього кочення без ковзання кривої ρ_1 по кривій ρ довжини дуг TT_1 і TT_2 повинні бути рівними. При $\alpha=\varphi=0$ можна записати: $\rho-\rho_1=r$, де через r позначена міжцентрова відстань OO_1.

Поставимо умову, щоб ця рівність виконувалася для всіх відповідних точок обох кривих. Тоді можна записати: $\rho_1=\rho-r$. Виходячи із цього, запишемо параметричні рівняння кривої $\rho_1=\rho_1(\varphi)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \left(ae^{b\alpha}\cos\alpha - r\right)\cos\varphi + r; \\ y_1 &= \left(ae^{b\alpha}\cos\alpha - r\right)\sin\varphi. \end{aligned} \tag{2}$$

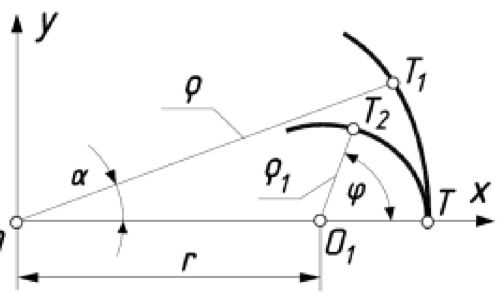

Рис. 1. Графічна ілюстрація до моделювання логарифмічної спіралі в контакті із іншою кривою за умови, що виконується рівність $\rho_1=\rho-r$ для всіх відповідних точок обох кривих.

Fig. 1. Graphic illustration for modeling a logarithmic spiral in contact with another curve, provided that the equality $\rho_1=\rho-r$ is fulfilled for all corresponding points of both curves.

Кути повороту α і φ повинні бути узгоджені між собою таким чином, щоб дуги TT_1 і TT_2 були рівні між собою. Будемо вважати, що кут φ буде залежним від кута α, тобто $\varphi=\varphi(\alpha)$.

Похідна довжини дуги логарифмічної спіралі (1) має наступний вираз:

$$\frac{ds}{d\alpha} = \sqrt{x'^2 + y'^2} = a\sqrt{1+b^2}e^{b\alpha}\,. \tag{3}$$

Похідна довжини дуги кривої (2) із врахуванням, що $\varphi=\varphi(\alpha)$, запишеться наступним чином:

$$\frac{ds_1}{d\alpha} = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2} = \sqrt{a^2b^2e^{2b\alpha} + \varphi'^2\left(r - ae^{b\alpha}\right)^2} \tag{4}$$

На основі рівності дуг кривих їх похідні (3) і (4) теж рівні між собою. Прирівняємо вирази (3) і (4) і розв'яжемо відносно $d\varphi/d\alpha$:

$$\frac{d\varphi}{d\alpha} = \frac{ae^{b\alpha}}{ae^{b\alpha} - r}\,. \tag{5}$$

Після інтегрування виразу (5) одержимо:

$$\varphi = \frac{1}{b}\ln\left(ae^{b\alpha} - r\right) + c\,, \tag{6}$$

де c – стала інтегрування.

Виходячи із умови, що при $\alpha=0$ кут $\varphi=0$, знаходимо вираз сталої c, після підстановки якої в (6) остаточно отримаємо:

$$\varphi = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{ae^{b\alpha} - r}{a - r}\right). \tag{7}$$

Міжцентрова відстань r може бути довільною, однак в такому випадку при повороті радіус-вектора ρ на заданий кут α радіус-вектор ρ_1 повернеться на непередбачуваний кут φ. Поставимо умову, щоб при повороті радіус-вектора ρ на заданий кут α радіус-вектор ρ_1 повернувся на потрібний нам кут φ. Для цього розв'яжемо рівняння (7) відносно відстані r:

$$r = a\frac{e^{b\varphi} - e^{b\alpha}}{e^{b\varphi} - 1}\,. \tag{8}$$

В праці (6) наведено аналітичний опис зовнішнього кочення конгруентних центроїд, кожна із яких утворена симетричним відображенням дуги логарифмічної спіралі відносно полярної осі. Така центроїда подібна до відомого символу серця. При зовнішньому обкочуванні рухомої центроїди по нерухомій спільний полюс двох симетричних дуг, що утворюють рухому центроїду, рухається по колу радіуса r, який представляє собою міжцентрову відстань (рис. 2). Вона визначається, як відстань між полюсами центроїд, які перебувають у контакті. Нерухома центроїда зображена потовщеною лінією. Дуга, з якої утворені центроїди, будується за рівняннями (1) при зміні кута α в межах $\alpha=0...\pi$.

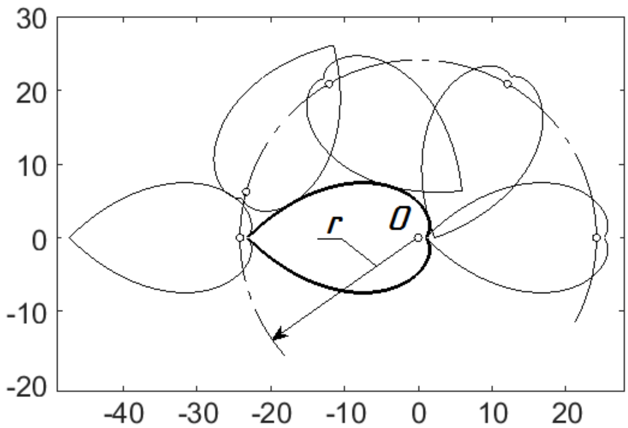

Рис. 2. Проміжні положення рухомої центроїди при її обкочуванні по конгруентній нерухомій центроїді.

Fig. 2. Intermediate positions of a moving centroid when rolling on a congruent stationary centroid.

Внутрішнє обкочування конгруентних центроїд неможливе, оскільки вони збігаються. Будемо вважати, що центроїди, зображені на рис. 2, мають один зуб, оскільки вони мають один виступ, утворений перетином симетричних дуг. В нашому випадку (при $b=1$) ці дуги перетинаються під прямим кутом. Це найменший кут, при якому можливе кочення центроїд без заклинювання в точках перетину дуг. Утворимо нерухому центроїду, яка має два зуби. Для цього для побудови дуги, яка окреслює зуб по логарифмічній спіралі, в рівняннях (1) будемо змінювати кут α в межах $\alpha=0...\pi/2$. Оскільки крива перетинає всі радіус-вектори під сталим кутом (в нашому випадку під кутом 45°, оскільки $b=1$), то і осі Ox і Oy вона теж перетне під цим кутом. Побудуємо симетричну криву відносно осі Oy і отримаємо один зуб (рис. 3,а).

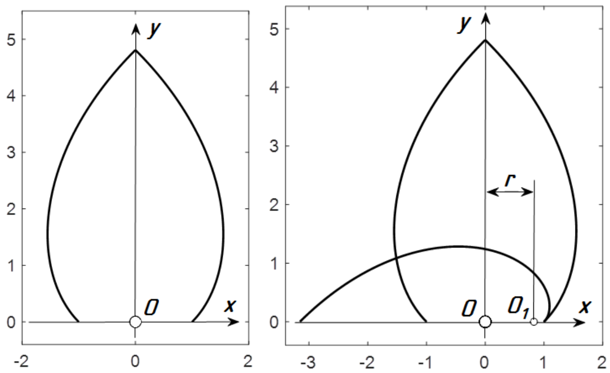

Рис. 3. Графічні ілюстрації до утворення зуба нерухомої і рухомої центроїд:

а) утворення зуба нерухомої центроїди симетричним відображенням дуги логарифмічної спіралі відносно осі *Oy*;

б) побудова профілю рухомого зуба за знайденим значенням міжцентрової відстані *r*

Fig. 3. Graphic illustrations for the formation of a fixed and movable centroid tooth:

a) the formation of a fixed centroid tooth by a symmetrical reflection of the arc of the logarithmic spiral about the axis Oy;

b) construction of the profile of the movable tooth according to the found value of the center-to-center distance *r*.

За рівняннями (2) побудуємо дугу рухомої центроїди. Для цього поставимо вимогу, щоб кут φ змінювався в межах $\varphi=0...\ \pi$. Підставимо у (8) $\alpha=\pi/2$, $\varphi=\pi$, $a=1$, $b=1$ і отримаємо: $r=0.828$. Слід зауважити, що значення $b=1$ забезпечує кут 90° у вершині зуба, а значення сталої a не впливає на форму зуба, оскільки відіграє роль масштабного коефіцієнта. На рис. 3,б побудовано половину профілю рухомої центроїди. При її обкочуванні по нерухомій полюс O_1 рухатиметься по колу радіуса r.

Якщо всі три дуги, зображені на рис. 3,б, відобразити симетрично осі Ox, то ми отримаємо нерухому центроїду із двома зубами і рухому – із одним (рис. 4,а). Якщо із цього положення обкочувати рухому центроїду по нерухомій, то для отримання вихідного положення вона має повернутися на 360°. Якщо ж центроїду із одним зубом зробити нерухомою і перекочувати по ній центроїду із двома зубами, то для досягнення попереднього розміщення центроїд потрібен поворот рухомої центроїди на кут 180°. Однак здійснити таке перекочування на фізичній моделі не вдасться, оскільки центроїда із одним зубом виходить за межі центроїди із двома зубами. Проте цього можна уникнути зміною кута при вершині зуба. Позначимо його через ψ. Виходячи із властивості логарифмічної спіралі стала b визначиться із наступного виразу:

$$b = \mathrm{ctg}\left(\psi/2\right). \qquad (9)$$

Підбором кута ψ можна знайти таку форму центроїд, коли вершина зуба однієї центроїди буде збігатися із впадиною другої. На рис. 4,б такому положенню центроїд відповідає значення $\psi=121,5°$.

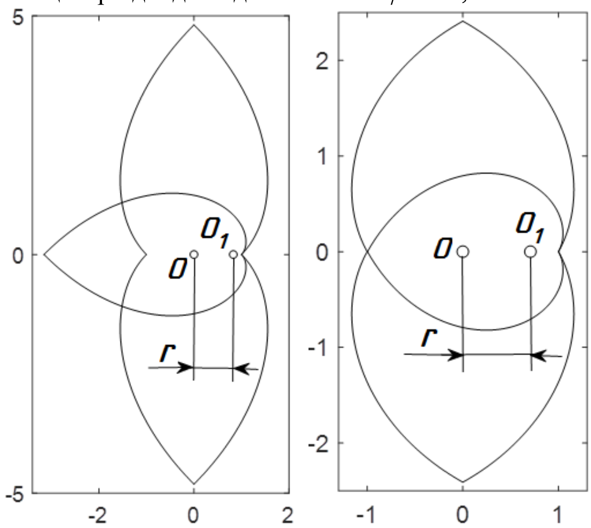

Рис. 4. Вихідне положення нерухомої центроїди із двома зубами і рухомої із одним зубом:

а) a=1; $\psi=90°$; $r=0.828$;

б) a=1; $\psi=121,5°$; $r=0.707$

Fig. 4. Starting position of a stationary centroid with two teeth and a movable one with one tooth:

a) a=1; $\psi=90°$; $r=0.828$;

b) a=1; $\psi=121,5°$; $r=0.707$

На рис. 4 вихідні положення центроїд побудовані при $\alpha=0$. Якщо надати кутові α іншого значення, то визначиться нова точка контакту на нерухомій центроїді. Рухома центроїда при коченні по нерухомій повернеться на кут φ згідно формули (7) і її центр, тобто точка O_1, переміститься по колу радіуса r на величину, що відповідає кутові повороту α. На рис. 5 побудовані проміжні положення рухомої центроїди, вихідне положення якої зображено на рис. 4,б.

Для внутрішнього зачеплення, на відміну від зовнішнього, кількість зубів центроїд не може бути рівною. Внутрішня центроїда повинна мати кількість зубів як мінімум на одиницю менше, ніж зовнішня. При цьому можна знайти залежність між кінцевими значеннями кута α і кута φ в залежності від числа зубів нерухомої і рухомої центроїд. Наприклад, на рис. 4,а побудована нерухома центроїда із двома зубами. Її профіль утворений симетричними дугами логарифмічної спіралі. Для побудови дуги цієї спіралі незалежна змінна α змінювалася в межах $\alpha=0...\pi/2$. Для побудови центроїди із трьома зубами дуга будується при зміні кута α в межах $\alpha=0...\pi/3$. Якщо позначити число зубів нерухомої центроїди через n, то відповідна дуга логарифмічної спіралі будується при зміні кута α в межах $\alpha=0...\pi/n$. При цьому довжина дуги профіля нерухомої і рухомої центроїд повинні бути рівними, а кути повороту в кінцевих точках α і φ мають бути узгодженими. Позначимо кількість зубів рухомої центроїди через n_1. На рис. 4 зображено випадок, коли n=2 і n_1=1. Кінцеве значення кута φ в цьому випадку дорівнює π, тобто $\varphi=\pi/n_1$. Збільшуючи число зубів нерухомої центроїди, можна збільшувати число зубів рухомої, при цьому повинна виконуватися умова: $n>n_1$. Якщо $n=n_1$, то центроїди будуть збігатися і кочення стає неможливим.

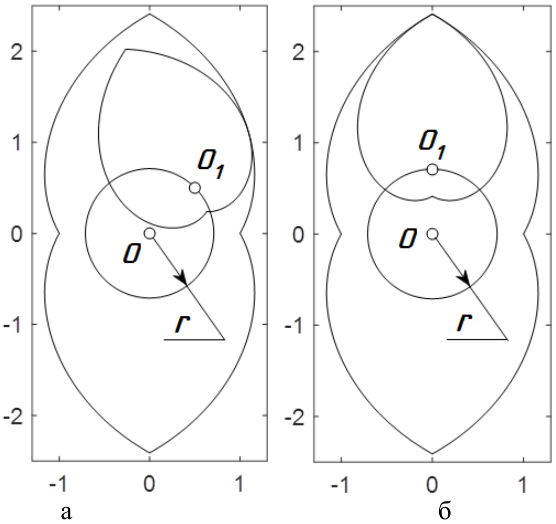

Рис. 5. Проміжні положення центроїди із одним зубом, яка обкочується по нерухомій центроїді із двома зубами:

а) положення центроїд відповідає кутові α=45°;

б) положення центроїд відповідає кутові α=90°

Fig. 5. Intermediate positions of a centroid with one tooth, which rolls over a stationary centroid with two teeth:

a) the position of the centroid corresponds to the angle $\alpha=45°$;

b) the position of the centroid corresponds to the angle $\alpha=90°$

На основі рівності дуг, що окреслюють зуби центроїд, які перебувають у контакті, кінцеві значення кутів α і φ мають бути кратними числу зубів, а саме: $\alpha=\pi/n$, $\varphi=\pi/n_1$. Підставимо ці значення кутів у вираз (8) і отримаємо:

$$r = a\frac{e^{b\pi/n_1} - e^{b\pi/n}}{e^{b\pi/n_1} - 1}. \qquad (10)$$

Якщо $n=n_1$, то згідно (10) отримуємо $r=0$, тобто центроїди будуть збігатися. Розглянемо конструювання внутрішнього зачеплення, у якого одна центроїда має 5 зубів ($n=5$), а друга – 2 ($n_1=2$). Кут ψ при вершині зуба приймемо рівним 90°, отже згідно (9) $b=1$. Сталу а теж приймемо рівною одиниці – $a=1$. Підставивши ці дані в (10), отримаємо: $r=0,7705$. За рівняннями (1) будуємо дугу, що окреслює профіль зуба, першої центроїди при зміні кута α в межах $\alpha=0... \pi/n$, тобто $\alpha=0... \pi/5$. На рис. 6 вона зображена суцільною лінією і позначена цифрою 1. Дугу другої циклоїди будуємо за рівняннями (2), попередньо підставивши туди вираз кута φ із (7). Потрібно підкреслити, що кінцеве значення кута φ відоме – воно рівне π/n_1, тобто $\varphi=90°$. Це значення ми отримаємо із виразу (7) при підстановці в нього відповідних значень сталих і $\alpha=\pi/n$. Тому в рівняннях (2) межі зміни кута α ті ж самі, що і в рівняннях (1): $\alpha=0... \pi/5$. Дуга кривої, побудованої за рівняннями (2), зображена на рис. 6 суцільною лінією і позначена цифрою 2. З рисунка видно, що кут $\varphi=90°$, оскільки радіус-вектор із початкового положення, коли він збігався із віссю Ox, повернувся навколо полюса O_1 на прямий кут і збігся із віссю Oy.

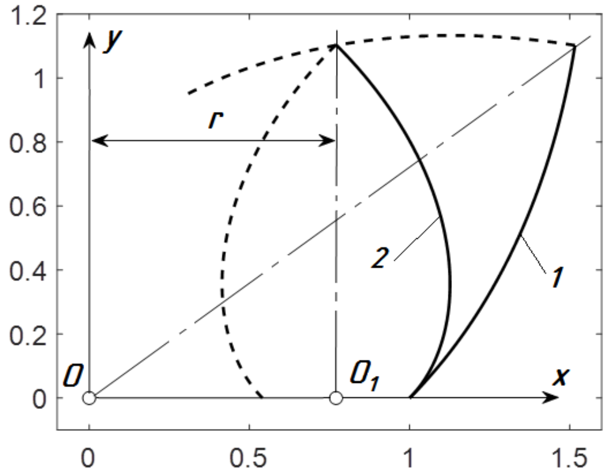

Рис. 6. Графічна ілюстрація до конструювання профіля зуба центроїд із внутрішнім зачепленням.

Fig. 6. Graphic illustration for designing a centroid tooth profile with internal gearing.

Після отриманих дуг кривих побудувати профілі зуба обох центроїд дуже просто. Для цього сполучаємо точку O з кінцем першої кривої (позначена цифрою (1)) і будуємо відносно неї симетричну криву (зображена штриховою лінією).

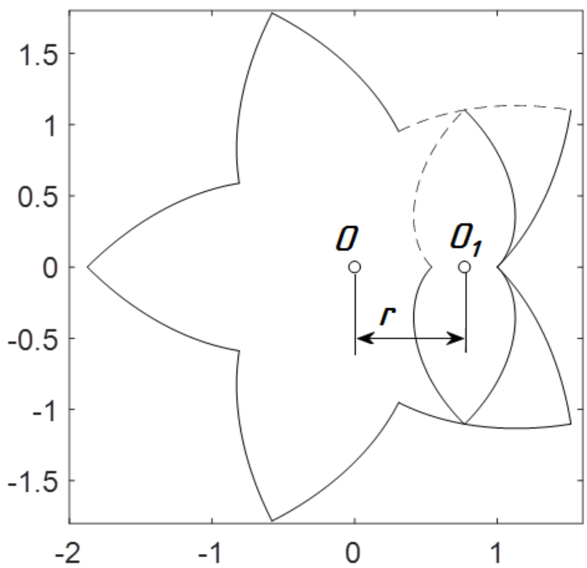

Рис. 7. Центроїди, утворені поворотом побудованого зуба на відповідний кут.

Fig. 7. Centroids formed by rotating the constructed tooth to the corresponding angle.

Аналогічно будуємо профіль зуба другої центроїди: криву 2 відображаємо симетрично відносно прямої, яка сполучає точку O_1 з кінцем кривої 2. Отриманий профіль зуба першої центроїди послідовно повертаємо на кут $2\pi/n$, тобто на 72° навколо точки O і отримуємо центроїду (рис. 7). Відповідно профіль зуба другої центроїди послідовно повертаємо на кут π/n_1, тобто на 180° навколо точки O_1.

Для наочності вихідне положення зубів на рис. 7 зображено так, як і на рис. 6 – із штриховими лініями. При обкочуванні рухомої центроїди по нерухомій полюс або центр останньої рухається по колу радіуса r (рис. 8).

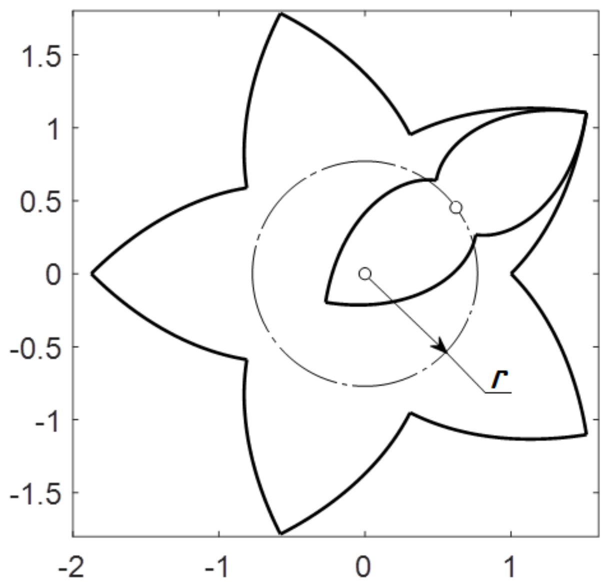

Рис. 8. Положення центроїд, коли вершини зубів збігаються.

Fig. 8. The position of the centroid, when the tops of the teeth coincide.

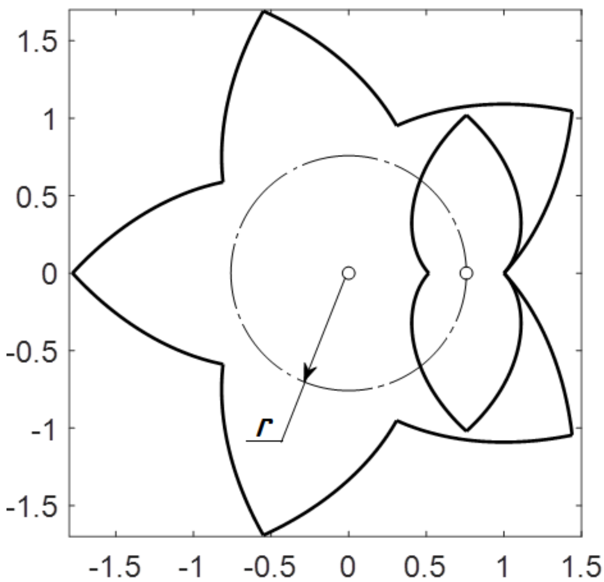

Рис. 9. Центроїди, у яких кут при вершині зуба $\psi=95°$

Fig. 9. Centroids, which have an angle at the tip of the tooth $\psi=95°$

На рис. 7 також видно, що вершини зубів рухомої центроїди торкаються профілів зубів нерухомої. Щоб цього позбутися, необхідно збільшити кут ψ при вершині зуба, або ж збільшити число зубів нерухомої центроїди. На рис. 9 побудовано центроїди, які відрізняються від центроїд, зображених на рис. 7 тим, що кут при вершині зуба становить 95°.

Можна залишити кут $\psi=90°$, але збільшити число зубів нерухомої центроїди. На рис. 10 побудовані центроїди при $\psi=90°$, $n=6$ і $n_1=2$.

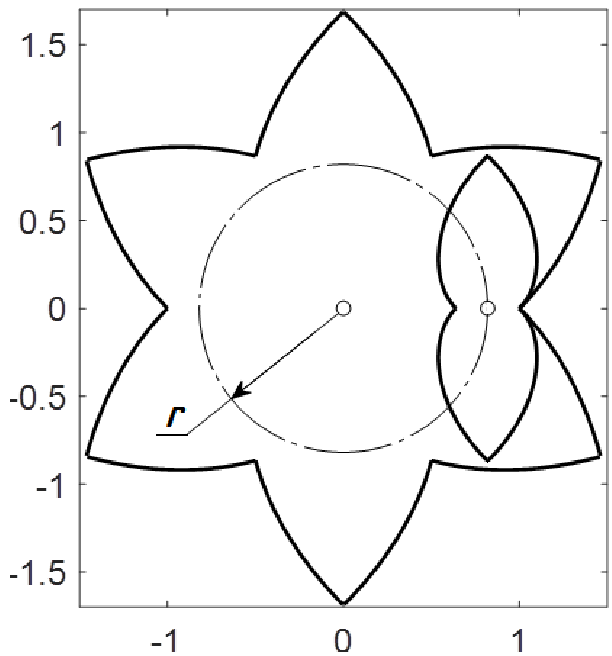

Рис. 10. Центроїди, побудовані при $\psi=90°$, $n=6$ і $n_1=2$.

Fig. 10. Centroids built at $\psi=90°$, $n=6$ і $n_1=2$.

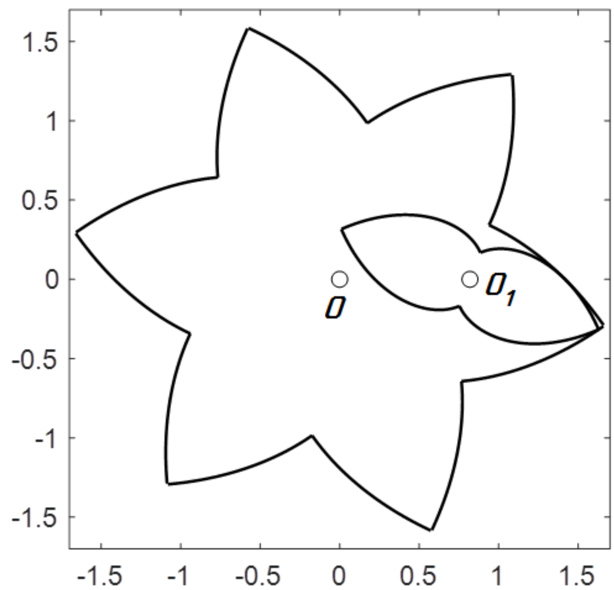

Рис. 11. Поворот центроїд навколо нерухомих центрів O на кут $\alpha=20°$ і O_1 на кут $\varphi=68,8°$.

Fig. 11. Rotation of the centroid about fixed centers O by an angle O by an angle α=20° and O_1 by an angle φ=68,8°.

Обкочування центроїд можна також здійснювати при одночасному їх обертанні навколо нерухомих центрів O і O_1. При цьому при повороті першої центроїди навколо центру O на заданий кут α, друга центроїда повернеться навколо центру O_1 на кут φ, величина якого визначається за формулою (7). На рис. 11 зображено ті ж центроїди, що і на рис. 10 після повороту першої центроїди на кут $\alpha=\pi/9$, тобто на 20°.

Щоб взнати, на який кут φ повернулася друга центроїда, знаходимо за формулою (10) міжцентрову відстань $r=0{,}8194$, і далі за формулою (7) – кут φ: $\varphi=1{,}198$ або $\varphi=68{,}8°$.

Слід зазначити, що кінцеве значення кутів α і φ, при яких вершини зубів збіжаться, становить $\alpha=30°$ і $\varphi=90°$.

За розробленим алгоритмом можна будувати внутрішнє зачеплення центроїд із заданим кутом ψ при вершинах зубів і будь-яким співвідношенням числа зубів за дотриманням умови $n>n_1$. На рис. 12 зображено зачеплення центроїд при $\psi=90°$, $n=10$ і $n_1=5$.

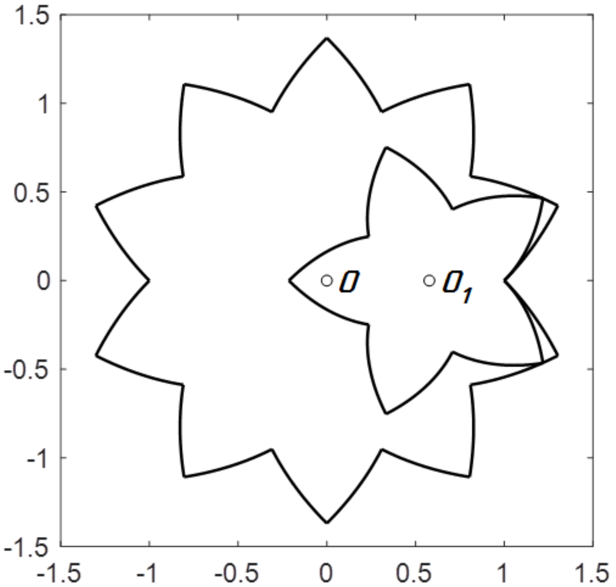

Рис. 12. Внутрішнє зачеплення центроїд при $\psi=90°$, $n=10$ і $n_1=5$.

Fig. 12. Internal engagement of the centroid at $\psi=90°$, $n=10$ and $n_1=5$.

Оскільки кількість зубів у центроїд відрізняється у два рази, то при повному оберті центроїди із більшою кількістю зубів менша центроїда здійснить два повних оберти. На рис 13 побудоване зачеплення з такою ж кількістю зубів у центроїд, що і на рис. 12, але з кутом при вершині зуба $\psi=120°$.

Дуги, які утворюють зуби першої центроїди, будуються за рівняннями (1), отже належать логарифмічній спіралі. Дуги, які утворюють зуби другої центроїди, будуються за рівняннями (2). На рис. 6 вони позначені відповідно цифрами 1 і 2. Однак крива 2 перетинає осі Ox і Oy під тим же кутом, що і крива 1. Це дає підставу припустити, що ці дуги належать одній і тій же логарифмічній спіралі, тільки розташовані на різній відстані від полюса. Щоб в цьому переконатися, перейдемо до натуральних рівнянь кривих (1) і (2), тобто до залежності кривини k від довжини дуги s: $k=k(s)$. Знайдемо довжину дуги кривої (1) за відомою формулою:

$$s = a\sqrt{1+b^2}\int e^{b\alpha}d\alpha = \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\,e^{b\alpha} + c\cdot \tag{11}$$

Сталу c знайдемо за умови, що при $\alpha=0$ довжина дуги $s=0$:

$$c = -\frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\,. \tag{12}$$

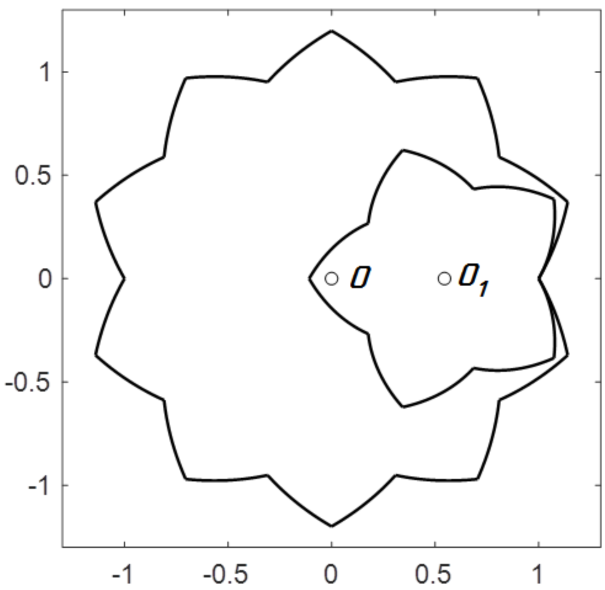

Рис. 13. Внутрішнє зачеплення центроїд при $\psi=120°$, $n=10$ і $n_1=5$.

Fig. 13. Internal engagement of the centroid at $\psi=120°$, $n=10$ and $n_1=5$.

Підставимо (12) в (11) і розв'яжемо отримане рівняння відносно α:

$$\alpha = \frac{1}{b}\ln\left(1+\frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right). \tag{13}$$

Підставимо залежність (13) у рівняння (1) і отримаємо параметричні рівняння логарифмічної спіралі у функції нової незалежної змінної – її довжини дуги s:

$$\begin{aligned} x &= a\left(1+\frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right)\cos\left[\frac{1}{b}\ln\left(1+\frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right)\right];\\ y &= a\left(1+\frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right)\sin\left[\frac{1}{b}\ln\left(1+\frac{bs}{a\sqrt{1+b^2}}\right)\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Для отримання натурального рівняння логарифмічної спіралі потрібно її параметричні рівняння (14) двічі продиференціювати по змінній s. Отримані другі похідні підставляємо у відому формулу і після спрощень знаходимо залежність $k=k(s)$:

$$k = \sqrt{x''^2 + y''^2} = \frac{1}{b\left(s+\frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\right)}\,. \tag{15}$$

Для знаходження натурального рівняння $k_1=k_1(s)$ кривої (2) поступаємо аналогічно. Вираз довжини дуги кривої (2) має вигляд (11), тобто він є таким же, як і для логарифмічної спіралі на основі рівності диференціалів їх дуг. Отже і залежність (13) є спільною для обох кривих. Підставимо вираз (13) в (7) отримаємо залежність $\varphi=\varphi(s)$:

$$\varphi = \frac{1}{b}\ln\left(1 + \frac{bs}{(a-r)\sqrt{1+b^2}}\right). \tag{16}$$

Отриману залежність (16) і вираз (13) підставляємо у (2) і отримаємо параметричні рівняння цієї кривої у функції довжини дуги *s*:

$$x_1 = \left(a - r + \frac{bs}{\sqrt{1+b^2}}\right)\cos\left[\frac{1}{b}\ln\left(1 + \frac{bs}{(a-r)\sqrt{1+b^2}}\right)\right];$$
$$y_1 = \left(a - r + \frac{bs}{\sqrt{1+b^2}}\right)\sin\left[\frac{1}{b}\ln\left(1 + \frac{bs}{(a-r)\sqrt{1+b^2}}\right)\right]. \tag{17}$$

Аналогічно попередньому випадку, знайдемо другі похідні рівнянь (17) і знайдемо натуральне рівняння $k_1=k_1(s)$ кривої (2):

$$k = \sqrt{x_1''^2 + y_1''^2} = \frac{1}{b\left(s + \frac{a-r}{b}\sqrt{1+b^2}\right)}. \tag{18}$$

Аналізуючи натуральні рівняння (15) і (18), ми бачимо, що ці залежності є аналогічними і відрізняються тільки зміщенням точки відліку дуги на сталу величину. Різниця між цими сталими величинами становить $r\sqrt{1+b^2}/b$. Отже, параметричні рівняння (1) і (2) описують одну і ту ж логарифмічну спіраль, а дуги однакової довжини для утворення зубів першої і другої центроїд беруться на різних її ділянках із зміщенням на знайдену різницю. У випадку, коли $r=0$, тобто коли центроїди збігаються, ця різниця теж дорівнює нулю, тобто зміщення відсутнє і дуги теж збігаються. Таким чином, дуги 1 і 2 (рис. 6) належать одній і тій же логарифмічній спіралі, тільки зміщені на певну відстань. Отже, дугу *2* можна будувати за формулами (1), як і дугу *1*, але при інших межах зміни кута α. Знайдемо ці межі.

Для кривої 1 (рис. 6) вони відомі: $\alpha=0 \ldots \pi/n$. Знайдемо ці межі для побудови кривої 2 за рівняннями 1. Для цього потрібно змістити точку відліку дуги по кривій 1 на величину знайденої різниці в сторону полюса, тобто взяти це значення із знаком «мінус»: $s=-r\sqrt{1+b^2}/b$. Підставляємо це значення у формулу (13) і знаходимо відповідне початкове значення кута α_o:

$$\alpha_0 = \frac{1}{b}\ln\left(1 - \frac{r}{a}\right). \tag{19}$$

Підставимо у (19) вираз *r* із (10) і отримаємо значення початкового кута α_o в залежності від сталої *b* (величини кута ψ) і числа зубів *n* і n_1:

$$\alpha_0 = \frac{1}{b}\ln\frac{e^{b\pi/n} - 1}{e^{b\pi/n_1} - 1}. \tag{20}$$

Щоб знайти кінцеве значення кута $\alpha_к$, потрібно від знайденої початкової точки на логарифмічній спіралі відкласти довжину дуги профілю зуба другої центроїди. Вона відома, оскільки дорівнює довжині профілю зуба першої центроїди. Згідно (11), (12) довжина дуги профілю зуба знаходиться за формулою:

$$s = \frac{a}{b}\sqrt{1+b^2}\left(e^{b\alpha} - 1\right), \tag{21}$$

де α дорівнює кінцевому значенню дуги профілю першої центроїди, тобто $\alpha=\pi/n$. Отримане значення (22) потрібно додати до значення дуги у початковій точці $s=-r\sqrt{1+b^2}/b$. Після додавання отримаємо:

$$s_к = \frac{a\left(e^{b\pi/n} - 1\right) - r}{b}\sqrt{1+b^2}. \tag{22}$$

Підставляємо значення дуги (22) у формулу (13) і знаходимо відповідне кінцеве значення кута $\alpha_к$:

$$\alpha_к = \frac{1}{b}\ln\left(e^{b\pi/n} - \frac{r}{a}\right). \tag{23}$$

Нарешті підставимо у (23) вираз *r* із (10) і отримаємо значення кінцевого кута $\alpha_к$ в залежності від кількості зубів центроїд:

$$\alpha_к = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{e^{b\pi/n} - 1}{e^{b\pi/n_1} - 1}e^{b\pi/n_1}\right) \tag{24}$$

Таким чином, профіль зуба другої циклоїди теж можна будувати за рівняннями (1), при цьому кут α буде змінюватися в межах $\alpha=\alpha_o \ldots \alpha_к$, які наведені у (20) і (24). Звідси випливає другий спосіб побудови центроїд.

Розглянемо приклад. Побудуємо центроїди із кутом $\psi=90°$ у вершині зуба і числом зубів $n=5$ і $n_1=2$. При $\psi=90°$ стала $b=1$, сталу *a* теж приймаємо рівною одиниці.

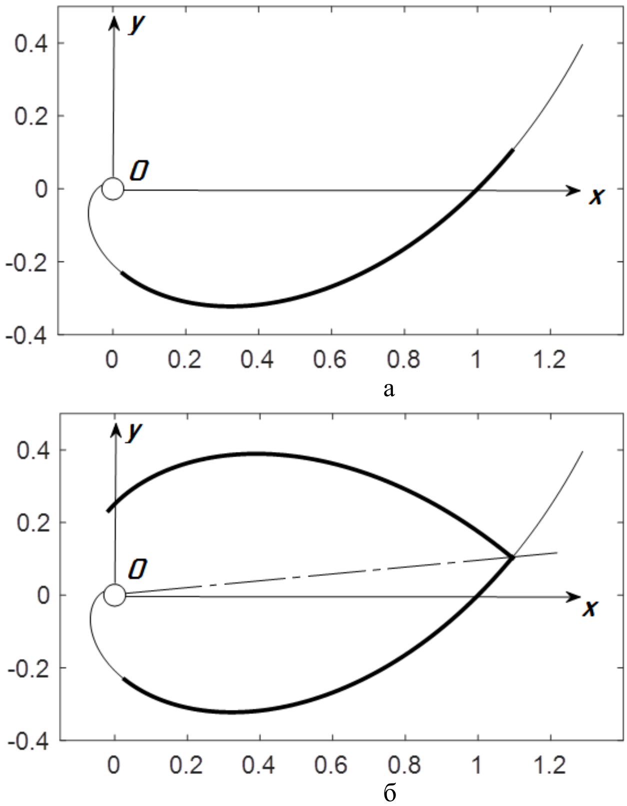

Рис. 14. Графічні ілюстрації до побудови профілю зуба другої центроїди:

а) дуга – профіль однієї сторони зуба;

б) симетричне відображення дуги

Fig. 14. Graphic illustrations for the construction of the tooth profile of the second centroid:

a) arch - the profile of one side of the tooth;

b) symmetrical reflection of the arc

Профіль зуба першої центроїди будується так, як показано на рис. 6 (крива 1). Профіль однієї сторони зуба отримано за рівняннями (1) при зміні кута α межах $\alpha=0...\pi/n$, тобто $\alpha=0...\pi/5$. Профіль другої сторони зуба отримуємо симетричним відображенням побудованої кривої відносно прямої, проведеної із початку координат O (полюса) в кінцеву точку дуги. Аналогічно будується профіль зуба другої центроїди теж за рівняннями (1). Проте в цьому випадку межі зміни кута α інші. Їх визначаємо за формулами (20), (24). Для нашого випадку ці межі становлять: $\alpha_o=-1,4719$, $\alpha_к=0,0989$. На рис 14,а для наочності дуга профілю зуба другої центроїди виділена потовщеною лінією на логарифмічній спіралі, яка починається із полюса і побудована при більш широких межах зміни кута α.

Різниця кутів $\alpha_к$ *і* α_o становить: $0,0989+1,4719=1,5708$, тобто $\pi/2$. Це відповідає кутові повороту φ при побудові цієї ж дуги за рівняннями (2), який змінюється в межах $\varphi=0...\pi/n_1$. Наступний крок – проводимо пряму лінію із полюса O до кінцевої точки дуги, яка є лінією симетрії зуба (рис. 14, б). Відображаємо дугу симетрично відносно проведеної прямої і отримуємо профіль зуба. Візуально видно, що він за формою і розмірами такий же, як і на рис. 6, де він утворений відображенням кривої 2. Оскільки n_1=2, то для побудови центроїди одержаний зуб потрібно розмножити його поворотом на кут $2\pi/n_1$, тобто на 180°. Подібним чином можна будувати центроїди із заданим допустимим співвідношенням зубів. При цьому не потрібно знати міжцентрову відстань. При введенні центроїд у контакт (наприклад, при збігові вершин зубів) міжцентрова відстань r визначиться автоматично, яку аналітично можна знайти за формулою (10).

За формулою (7) можна побудувати залежність $\varphi=\varphi(\alpha)$. На рис. 15 графік цієї залежності побудований для центроїд, зображених на рис.4. Вони залежать від кута у вершині зуба. Кутові $\psi=90°$ (рис. 4,а) відповідає крива *1*, кутові $\psi=121,5°$ (рис. 4,б) – крива *2*. При зростанні кута ψ центроїди центроїди наближаються до кіл і при $\psi=180°$ стають ними. При цьому залежність $\varphi=\varphi(\alpha)$ стає лінійною (на рис. 15 позначена цифрою *3*).

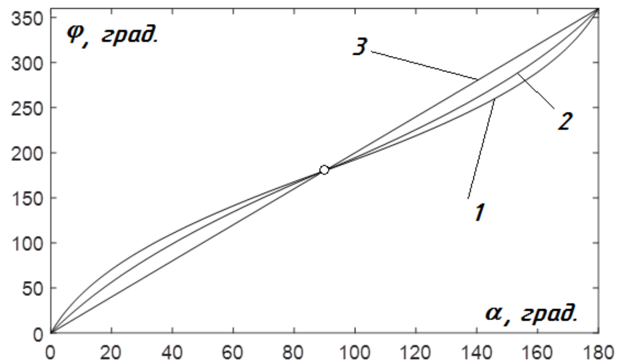

Рис. 15. Графіки залежності $\varphi=\varphi(\alpha)$, побудовані для центроїд, зображених на рис. 4.

Fig. 15. The graphs of the dependence $\varphi=\varphi(\alpha)$ constructed for the centroids shown in Fig. 4.

Точка, позначена колом в центрі графіка, відповідає положенню, коли вершини зубів центроїд збігаються. При зміні $\alpha=0...\pi/n$, тобто $\alpha=0...90°$ кут φ змінюється в межах $\varphi=0...\pi/n_1$, тобто $\varphi=0...180°$. Рухома центроїда із одним зубом, спрямованим ліворуч, при перекочуванні по нерухомій займе положення, при якому зуби збіжаться вгорі. Цьому положенню відповідають кінцеві значення кутів $\alpha=90°$ і $\varphi=180°$ і точка в центрі графіка. При подальшому зростанні кута α кут φ теж зростатиме, але в зворотному порядку. Вираз $\varphi=\varphi(\alpha)$ при цьому матиме інший вираз:

$$\varphi=-\frac{1}{b}\ln\left(\frac{ae^{b\left(\pi/n-\alpha\right)}-r}{a-r}\right). \tag{25}$$

Кут α в залежності (25) теж змінюється в межах $\alpha=0...\pi/n$, але сам графік потрібно змістити вздовж осей до його плавного з'єднання із попереднім. Кінцеві значення кутів $\alpha=180°$ і $\varphi=360°$ сумарного графіка відповідають положенню зуба рухомої центроїди, спрямованого праворуч, тобто в протилежну сторону від початкового положення (рис. 4). Отже повному обкочуванню зуба однієї центроїди по зубові другої відповідають кінцеві значення кутів $\alpha=2\pi/n$ і $\varphi=2\pi/n_1$.

На рис. 16 побудовано графік для центроїд, зображених на рис. 7, 8 при $n=5$ і $n_1=2$. Він відповідає повному обкочуванню зуба рухомої центроїди по зубові нерухомої центроїди. Кінцеві значення кутів становлять $\alpha=2\pi/n=72°$ і $\varphi=2\pi/n_1=180°$. При подальшому обкочуванні цей графік періодично повторюється.

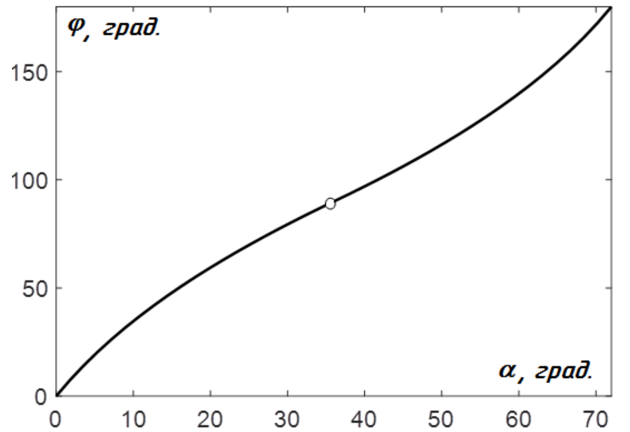

Рис. 16. Графік залежності $\varphi=\varphi(\alpha)$, побудований для центроїд, зображених на рис. 7, 8.

Fig. 16. The graph of the dependence φ=φ(α), constructed for the centroids shown in Fig. 7, 8.

В теорії зубчатих зачеплень важливим показником передачі є передавальне число, яке визначається відношенням радіусів ділильних кіл зубчатих коліс, що працюють в парі. Ділильні кола котяться одне по одному без ковзання, тобто є центроїдами. Для евольвентного зачеплення це число є сталим. Його можна визначити також як відношення кутових швидкостей коліс при їх обертанні або ж відношенням кількості зубів. Для нашого випадку довжини радіус-векторів $\rho=ae^{b\alpha}$ і $\rho_1=\rho-r$ є змінними, тому їх відношення теж є змінною величиною. В цьому випадку замість передавального числа вживається термін «передавальна функція». Вона залежить від кута повороту α першої центроїди. Позначивши її через $i=i(\alpha)$, запишемо:

$$i = \frac{\rho}{\rho_1} = \ln\left(\frac{ae^{b\alpha}}{ae^{b\alpha} - r}\right). \qquad (26)$$

За залежністю (26) будується тільки одна вітка передавальної функції при зміні параметра $\alpha=0...\pi/n$. Вона відповідає коченню рівних дуг однієї сторони зубів. Симетрична вітка (рис. 17) будується за наступною залежністю:

$$i = \frac{\rho}{\rho_1} = \ln\left(\frac{ae^{b\left(\pi/_n-\alpha\right)}}{ae^{b\left(\pi/_n-\alpha\right)} - r}\right). \qquad (27)$$

На рис. 17 побудовано графік передавальної функції для центроїд $n=2$ і $n_1=1$, зображених на рис. 4. Симетричні вітки розділені точкою, що відповідає положенню центроїд, коли вершини зубів збігаються, причому цифрами позначені криві для наступних значень кута ψ: 1 – $\psi=90°$, 2 – $\psi=121,5°$, 3 – $\psi=180°$.

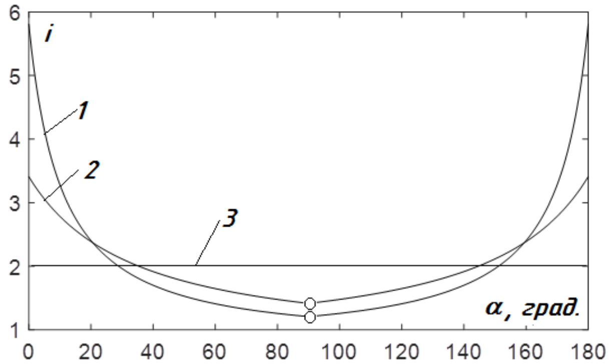

Рис. 17. Графік залежності $i=i(\alpha)$, побудований для центроїд, зображених на рис. 4.

Fig. 17. The graph of the dependence $i=i(\alpha)$, constructed for the centroids shown in Fig. 4.

Аналогічні графіки передавальної функції $i=i(\alpha)$ побудовано на рис. 18 для центроїд, зображених на рис. 12 (крива *1*), рис. 13 (крива *2*). Цим кривим відповідає кут $\psi=90°$ і $\psi=120°$ відповідно. При $\psi=180°$ передавальна функція перетворюється у стале число (крива 3).

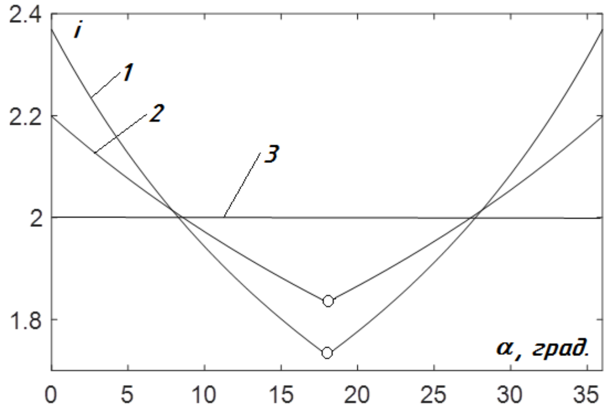

Рис. 18. Графік залежності $i=i(\alpha)$, побудований для центроїд, зображених на рис. 12.

Fig. 18. The graph of the dependence $i=i(\alpha)$, constructed for the centroids shown in Fig. 12.

Отже, по мірі наближення центроїд до кіл передавальна функція прямує до сталого значення. Це значення можна знайти із відношення зубів центроїд, яке можна вважати усередненим. Представлені графіки відображають передавальну функція при повному обкочуванні однієї пари зубів центроїд. За один повний оберт першої центроїди графік періодично повторюватиметься n раз. Чим більше зубів мають центроїди, тим менше відхилення максимальних і мінімальних значень передавального числа від усередненого. Для центроїд, утворених неперервною кривою, передавальна функція теж є неперервною. У нас центроїди утворені дугами логарифмічної спіралі, відповідно і передавальна функція є складеною.

Для знаходження кутової швидкості ω обертання першої центроїди потрібно знайти похідну кута повороту α по часу t: $\omega=d\alpha/dt$. Аналогічно знаходимо кутову швидкість обертання другої центроїди: $\omega_1=d\varphi/dt=d\varphi/d\alpha\cdot d\alpha/dt=d\varphi/d\alpha\cdot\omega=\varphi'\omega$. Передавальну функцію можна знайти також, як відношення кутових швидкостей: $i=\omega_1/\omega=\varphi'$. Таким чином, передавальну функцію можна знайти диференціюванням залежності $\varphi=\varphi(\alpha)$ по змінній α. І справді, похідна функції (7) точно збігається із залежністю (26), а похідна функції (25) – із залежністю (27). Перша залежність описує передавальну функцію при обкочуванні однієї сторони зубів, а друга – при обкочуванні симетричних сторін зубів.

Висновки

1. Теоретично показано, що центроїди із дуг логарифмічної спіралі можуть виконувати функції внутрішнього зубчатого зачеплення. При цьому повністю відсутнє ковзання зубів в зоні їх контакту, що не призводить до виникнення тертя і зносу поверхонь. Недоліком такої передачі є змінне передавальне число яке описується залежністю у функції кута повороту однієї із центроїд.

2. Для побудови центроїд розроблено два способи, які ґрунтуються на знаходженні дуг логарифмічної спіралі. Ці дуги є профілем зубів центроїд, що перебувають у зачепленні. Для побудови центроїд вихідними даними є кут при вершині зубів та їх число для обох центроїд.

3. Співвідношення зубів центроїд може бути різним за умови, що кількість зубів однієї центроїди повинна бути менша від кількості зубів другої центроїди. Якщо кількість зубів однакова, центроїди стають конгруентними і внутрішнє кочення стає неможливим.

Список літератури

1. Вікіпедія. Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B5_%D0%B7%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F.

2. *Тищенко О. Ф.* Зубчатые передачи часовых механизмов. Москва. Машгиз, 1963. 212 с.

3. *Литвин Ф. Л.* Некруглые зубчатые колеса. Москва. Машгиз, 1956. 312 с.

4. *Кресан Т. А., Пилипака С. Ф., Грищенко І. Ю., Бабка В. М., Кремець Я. С.* Траєкторії точок плоскої фігури, криволінійний контур якої котиться без ковзання по прямій лінії. Прикладні питання математичного моделювання. 2020. Т. 3. Вип. 1. С. 87-96. Режим доступу: http://212.111.209.17/index.php/aqmm/article/viewFile/518/pdf.

5. *Табацков В. П., Бойко А. П.* Визначення рівняння центроїд за заданим наперед законом руху. Вісник аграрної науки Причорномор'я. 2005. Вип. 4. С. 194-198. Режим доступу: http://base.dnsgb.com.ua/files/journal/Visnyk-agrarnoi-nauky-Prychornomorja/VANP2005/VANP2005-4(32)/Visnik_2005-4(32)_194-198.pdf.

6. *Кресан Т. А., Пилипака С. Ф., Грищенко І. Ю., Бабка В. М.* Окремий випадок конгруентних центроїд некруглих коліс, утворених дугами логарифмічної спіралі. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2020. Вип. 98. С. 84-93.

7. *Laczik B.* Design and manufacturing of non-circular gears by giventransfer function. 2020. http://www.hexagon.de/pdf/noncgear.pdf.

8. *Mundo D., Danneli G. A.*. Use of non-circular gears in pressing machine driving systems. 2020. http://www.wseas.us/e-library/conferences/udine2004/papers/483-172.pdf.

9. *Коврегін В. В., Маловик І. В.* Аналітичний опис центроїд некруглих зубчатих коліс. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2011. Т. 49. Вип. 4. С. 125-129.

10. *Легета Я. П.* Опис та побудова спряжених центроїд некруглих зубчастих коліс. Сучасні проблеми моделювання. 2014. Вип. 3. С. 87-92.

11. *Легета Я. П., Шоман О. В.* Геометричне моделювання центроїд некруглих зубчастих коліс за передавальною функцією. Геометричне моделювання та інформаційні технології. 2016. № 2. С. 59-63.

12. *Pylypaka S. F., Nesvidomin V. M., Klendii M. B., Rogovskii I. L., Kresan T. A., Trokhaniak V. I.* Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. 2019. Vol. 95. Issue 3. P. 108-118. doi 10.31489/2019M2/108-119.

13. *Kresan T., Pylypaka S., Ruzhylo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O.* External rolling of a polygon on a closed curvilinear profile. Acta Polytechnica. 2020. Vol. 60, no 4, P. 313-317. https://doi.org/10.14311/AP.2020.60.0313.

References

1.Wikipedia. Access mode: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B5_%D0%B7%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F.

2. *Tishchenko O. F.* (1963). Gears of watch mechanisms. Moscow. Mashgiz. 212.

3. *Litvin F. L.* (1956). Non-circular gears. Moscow: Mashgiz. 312.

4. *Kresan T. A., Pylypaka S. F., Grishchenko I. Yu., Babka V. M., Kremets Ya. S.* (2020). The trajectories of the points of a flat figure, the curvilinear contour of which rolls without sliding in a straight line. Applied questions of mathematical modeling. 3(1). 87-96. Access mode: http://212.111.209.17/index.php/aqmm/article/viewFile/518/pdf.

5. *Tabatskov V. P., Boyko A. P.* (2005). Determination of the centroid equation by a predetermined law of motion. Bulletin of Agrarian Science of the Black Sea Region. 4. 194-198. Access mode: http://base.dnsgb.com.ua/files/journal/Visnyk-agrarnoi-nauky-Prychornomorja/VANP2005/VANP2005-4(32)/Visnik_2005-4(32)_194-198.pdf.

6. *Kresan T. A., Pylypaka S. F., Grishchenko I. Yu., Babka V. M.* (2020). A special case of congruent centroids of non-circular wheels formed by arcs of a logarithmic spiral. Applied geometry and engineering graphics. 98. 84-93.

7. *Laczik B.* (2020). Design and manufacturing of non-circular gears by giventransfer function. Access mode: http://www.hexagon.de/pdf/noncgear.pdf.

8. *Mundo D., Danneli G. A.* (2020). Use of non-circular gears in pressing machine driving systems. Access mode: http://www.wseas.us/library/conferences/udine 2004/papers/483-172.pdf.

9. *Kovregin V. V., Malovik I. V.* (2011). Analytical description of the centroid of non-circular gears. Applied geometry and engineering graphics. 49(4). 125-129.

10. *Legeta Ya. P.* (2014). Description and construction of conjugate centroids of non-circular gears. Modern modeling problems. 3. 87-92.

11. *Legeta Ya. P., Shoman O. V.* (2016). Geometric modeling of the centroid of non-circular gears by transfer function. Geometric modeling and information technology. 2. 59-63.

12. *Pylypaka S. F., Nesvidomin V. M., Klendii M. B., Rogovskii I. L., Kresan T. A., Trokhaniak V. I.* (2019). Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. 95(3). 108-118. doi 10.31489/2019M2/108-119.

13. *Kresan T., Pylypaka S., Ruzhylo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O.* (2020). External rolling of a polygon on a closed curvilinear profile. Acta Polytechnica. 60(4). 313-317. https://doi.org/10.14311/AP.2020.60. 0313.

ВНУТРЕННЕЕ КАЧЕНИЕ НЕКРУГЛЫХ ЦЕНТРОИД, ОБРАЗОВАННЫХ ИЗ ДУГ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ СПИРАЛИ

Т. А. Кресан, С. Ф. Пилипака

Аннотация. В статье рассмотрено внутреннее качение плоских центроид одна по другой с одновременным вращением вокруг неподвижных центров. Характерной особенностью рассматриваемых центроид является то, что профиль каждой из них образован последовательным соединением одинаковых дуг одной и той же логарифмической спирали. Он подобен профилю зубчатого колеса. Как и в зубчатых зацеплениях, такие центроиды могут передавать вращательное движение. В отличие от зубчатых колес передача вращательного движения происходит без скольжения дуг в зоне контакта. Это происходит благодаря тому, что длины дуг профилей зубьев равны.

В классических зубчатых зацеплениях применяется эвольвентный профиль, который в свое время предложил Л. Эйлер. Зубчатые передачи с таким профилем являются наиболее распространенными. Известны и другие профили, например, в передаче Новикова, в которых профилем зуба есть окружность или кривая, близкая к окружности. При работе указанных зацеплений возникает скольжение в точке контакта зубъев, причем в зацеплении Новикова оно меньше, чем в зацеплений с эвольвентным профилем. В этих и других зубчатых передачах на обоих колесах существуют окружности, которые перекатываются друг по другу без скольжения. Они называются центроидами или делительными окружностями, диаметры которых являются основой для расчета всех геометрических элементов зубчатого зацепления. Соответственно и в нашем случае центроиды могут служить основой для проектирования зубчатого зацепления с эвольвентным или иным профилем зуба. В статье показано, что такие центроиды могут быть образованы с заданным числом зубъев в виде зубчатого колеса, так что они также могут выполнять роль зубчатой передачи. Главным преимуществом такой передачи является полное отсутствие скольжения, что исключает трение поверхностей в зоне контакта и их износ. Недостатком является то, что передаточное отношение при этом не является постоянным, оно периодически меняется. Однако для некоторых случаев это не влияет существенно на работу механизмов (например, часовых или счетных устройств).

Осуществлено математическое описание профилей центроид. Показана возможность построения центроид с произвольным допустимым количеством зубъев на каждой из них. Межосевое расстояние зависит от количества зубъев на каждой центроиде и величины угла при вершине зуба. При одинаковом количестве зубъев на обеих центроидах они совпадают. Построены пары центроид, а также показано их промежуточные положения при повороте одной из них на заданный угол. Угол поворота второй центроиды определяется аналитически и является функцией угла поворота первой центроиды.

Ключевые слова: логарифмическая спираль, центроиды, внутреннее качения, длина дуги, межцентровое расстояние.

INTERNAL ROLLING OF NON-CIRCULAR CENTROIDS FORMED FROM THE ARCS OF LOGARITHMIC SPIRAL

T. A. Kresan, S. F. Pylypaka

Abstract. The article considers the internal rolling of flat centroids one by one with simultaneous rotation abount fixed centers. A characteristic feature of the considered centroids is that the profile of each of them is formed by a series connection of identical arcs of the same logarithmic spiral. It is similar to the profile of a gear wheel. As in gears, such centroids can transmit rotational motion. Unlike gears, the transmission of rotational motion occurs without sliding arcs in the contact zone. This is due to the fact that the lengths of the arcs of the tooth profiles are equal.

In classical gears, an involute profile is used, which was once proposed by L. Euler. Gears with this profile are the most common. There are other profiles, for example, in Novikov's transmission, in which the tooth profile is a circle or a curve close to the circle. During the operation of these gears there is slippage at the point of contact of the teeth, and in Novikov gearing it is less than in gears with involute profile. In these and other gears on both wheels there are circles that roll one by one without slipping. They are called centroids or dividing circles, the diameters of which are the basis for calculating all the geometric elements of the gear. Accordingly, in our case, the centroids can serve as a basis for the design of gearing with an involute or other tooth profile. The article shows that such centroids can be formed with a given number of teeth in the form of a gear, so they can also act as a gear. The main advantage of this transmission is the complete absence of sliding, which does not lead to friction of surfaces in the contact zone and their wear. The disadvantage is that the gear ratio is not constant, it changes periodically. However, for some cases, this does not significantly affect the operation of mechanisms (clocks or counting devices).

A mathematical description of centroid profiles is performed. The possibility of constructing a centroid with an arbitrary number of teeth on each of them is shown. The wheelbase depends on the number of teeth on each centroid and the angle at the top of the tooth. With the same number of teeth on both centroids, they coincide. A pair of centroids is constructed, and their intermediate positions are shown when one of them is rotated by a given angle. The angle of rotation of the second centroid is determined analytically and is a function of the angle of rotation of the first centroid.

Key words: logarithmic spiral, centroids, internal rolling, arc length, center-to-center distance.

Т. А. Кресан ORCID 0000-0002-8280-9502.
С. Ф. Пилипака ORCID 0000-0002-1496-4615.