

ОПТИМІЗАЦІЯ ДИСКРЕТНИХ СИСТЕМ ЗА НАЯВНОСТІ ОБМЕЖЕНЬ НА ФУНКЦІЇ ЧУТЛИВОСТІ

Л.А. Панталієнко, кандидат фізико-математичних наук
Ю. Б. Гнучій, доктор фізико-математичних наук

Наведено результати розрахунку областей стійкості для оптимізаційних задач з обмеженою чутливістю. Для лінійних дискретних систем розглянуто постановки задач гарантованої чутливості, що охоплюються алгоритмами практичної стійкості.

Дискретна система, обмежена чутливість, параметри, практична стійкість.

Проблема працездатності системи на реальних режимах стосується низки задач, пов'язаних з аналізом і оцінкою чутливості відносно збурень [4]. Як правило, процес керування реальною системою здійснюється в умовах невизначеності, що обумовлено різними причинами, зокрема наявністю неточно заданих зовнішніх збурень, похибками при виконанні програм керування, похибками у каналі вимірювань тощо. Наслідком цього є певна невідповідність математичної моделі реальному об'єкту, для опису якого вона слугує. Тому при проектуванні реальної системи виникає необхідність враховувати вимоги щодо робастності (стійкості) моделі відносно невизначених факторів [1,2]. Як критерій чутливості часто вибирають динамічні обмеження на функції чутливості, що є кількісною мірою ефективності керування за принципом оберненого зв'язку. Постановки задач з обмеженою чутливістю охоплюються алгоритмами практичної стійкості [1–3] у просторі функцій чутливості.

Мета досліджень — розробка ефективних методів розрахунку областей стійкості дискретних систем для задач з обмеженою та гарантованою чутливістю.

Матеріали та методика досліджень. У роботі застосовуються методи теорії стійкості, чутливості, теорії керування та оптимізації.

Нехай рух об'єкта описується дискретною нелінійною системою рівнянь вигляду

$$x_{i+1} = f_i(x_i, \alpha) \quad (f_i(0,0)=0), \quad i = p_0, p_0+1, \dots, P-1, \quad (1)$$

де α — вектор параметрів вимірності m ; x_i — n -вимірні вектори станів для довільного $p_0 \leq i \leq P$; $f_i(x_i, \alpha)$, $i = p_0, p_0+1, \dots, P-1$ — вектор-функції вимірності n . Припускається, що розв'язок системи (1) існує та єдиний для будь-яких x_{p_0} та усіх значень α з деякої допустимої множини G_α .

Дослідимо систему (1) за наявності початкових умов $x_{p_0} = x_0(\alpha)$, де $x_0(\alpha)$ — неперервно-диференційовані функції вимірності n . Тоді, якщо

праві частини вихідної системи є неперервними разом із частинними похідними по x_i, α ($i = p_0, p_0 + 1, \dots, P$), то існують вектори функцій чутливості

$$u_i^{(j)} = \frac{\partial x_i(\alpha)}{\partial \alpha_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad i = p_0, p_0 + 1, \dots, P, \quad \text{причому}$$

$$u_{i+1}^{(j)} = \frac{\partial f_i(x_i, \bar{\alpha})}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_i(\bar{\alpha})} u_i^{(j)} + \frac{\partial f_i(x_i, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} \Big|_{x_i=x_i(\bar{\alpha})};$$

$$i = p_0, p_0 + 1, \dots, P-1;$$

$$u_{p_0}^{(j)} = \frac{\partial x_{p_0}(\bar{\alpha})}{\partial \alpha_j}, \quad (2)$$

де $\bar{\alpha} \in G_{\alpha} \subset G_{\alpha}$ – деяке розрахункове значення вектора параметрів α ; $\{x_{p_0}(\bar{\alpha}), x_{p_0+1}(\bar{\alpha}), \dots, x_P(\bar{\alpha})\}$ – розрахункова траєкторія, що визначається за системою (1) при $\alpha = \bar{\alpha}$ ($x_i = x_i(\alpha), i = p_0, p_0 + 1, \dots, P$ – вектори станів системи (1) вимірності n).

Розглянемо задачу мінімізації функціонала від кінцевого стану системи (1) по вектору параметрів α

$$I(\alpha^{(0)}) = \min_{\alpha \in G_{\alpha}} \Phi(x_P(\alpha)) \quad (3)$$

при динамічних обмеженнях на функції чутливості:

$$u_i(\alpha) \in \Gamma_i = \{u_i(\alpha): \left| \sum_{j=1}^m l_{si}^{(j)*} u_i^{(j)} \right| \leq 1, s = 1, 2, \dots, N_i\}, \quad i = p_0, p_0 + 1, \dots, P; \quad (4)$$

$$u_i(\alpha) \in \Psi_i = \{u_i(\alpha): \psi^{(i)}(u_i(\alpha)) \leq 1\}, \quad i = p_0, p_0 + 1, \dots, P. \quad (5)$$

Тут $u_i^*(\alpha) = (u_i^{(1)*}(\alpha), u_i^{(2)*}(\alpha), \dots, u_i^{(m)*}(\alpha))$ – $n \cdot m$ вимірні вектори функцій чутливості; $\psi_i(u_i(\alpha))$ – скалярні неперервно-диференційовані функції; множини Ψ_i опуклі, замкнені та містять нульову точку $u_i = 0$; $l_{si}^{(j)}, j = 1, 2, \dots, m, s = 1, 2, \dots, N_i$ – n - вимірні вектори, що задають обмеження на функції чутливості.

Для мінімізації функціонала (3) скористаємося методом проекції градієнтів:

$$\alpha^{(k+1)} = P_{G_{\alpha^{(k)}}} \left\{ \alpha^{(k)} - \rho_k \begin{pmatrix} \text{grad}_{x_P}^* \Phi(x_P(\alpha^{(k)})) u_P^{(1)}(\alpha^{(k)}) \\ \dots \dots \dots \text{grad}_{x_P}^* \Phi(x_P(\alpha^{(k)})) u_P^{(m)}(\alpha^{(k)}) \end{pmatrix} \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (6)$$

де $P_{G_{\alpha^{(k)}}}(\cdot)$ – операція проектування вектора параметрів $\alpha^{(k+1)}$ на множину $G_{\alpha^{(k)}} \subset G_{\alpha}$, ρ_k – крок градієнтного спуску.

Щоб урахувати вимоги (4), (5) на фіксованих $\alpha^{(k)}, k = 0, 1, 2, \dots$, застосуємо алгоритми практичної стійкості [2] у просторі функції чутливості. З цією метою задамо множину початкових умов у структурному вигляді $G_0 = \left\{ u_{p_0}(\alpha): \sum_{j=1}^m u_{p_0}^{(j)*} B_j u_{p_0}^{(j)} \leq c^2 \right\}$, де $B_j, j = 1, 2, \dots, m$ – відомі додатно визначені квадратні матриці вимірності m . Параметр c ,

залежно від типу обмежень, будемо вибирати згідно із такими нерівностями:

$$c^2 \leq \min_{i=p_0, p_0+1, \dots, P} \min_{s=1, 2, \dots, N_i} \frac{\left(1 - \left| \sum_{j=1}^m l_{si}^{(j)*} a_{i-1}^{(j)} \right| \right)^2}{\sum_{j=1}^m l_{si}^{(j)*} X_{i, p_0} B_j^{-1} X_{i, p_0}^* l_{si}^{(j)}},$$

$$\left| \sum_{j=1}^m l_{si}^{(j)*} a_{i-1}^{(j)} \right| < 1, \quad s=1, 2, \dots, N_i, \quad i = p_0, p_0+1, \dots, P; \quad (7)$$

$$c^2 \leq \min_{i=p_0, p_0+1, \dots, P} \min_{\bar{u}_i \in \bar{\Psi}_i} \frac{\left[g^{(i)*}(\bar{u}_i)(\bar{u}_i - a_{i-1}) \right]^2}{g^{(i)*}(\bar{u}_i) Q_i^{-1} g^{(i)}(\bar{u}_i)},$$

$$g^{(i)*}(\bar{u}_i)(\bar{u}_i - a_i) > 0, \quad \bar{u}_i \in \bar{\Psi}_i, \quad i = p_0, p_0+1, \dots, P. \quad (8)$$

Тут $g^{(i)}(\bar{u}_i) = \text{grad}_{\bar{u}_i} \psi^{(i)}(\bar{u}_i)$; $a_{i-1}^{(j)} = A_{i-1} A_{i-2} \dots A_{p_0+1} b_{p_0}^{(j)} + A_{i-1} A_{i-2} \dots A_{p_0+2} b_{p_0+1}^{(j)} + \dots + A_{i-1} b_{i-2}^{(j)} + b_{i-1}^{(j)}$;
 $A_i = \frac{\partial f_i(x_i, \bar{\alpha})}{\partial x_i} \Big|_{x_i=x_i(\bar{\alpha})}$; $b_i^{(j)} = \frac{\partial f_i(x_i, \bar{\alpha})}{\partial \alpha_j} \Big|_{x_i=x_i(\bar{\alpha})}$; $a_{i-1}^* = (a_{i-1}^{(1)*}, a_{i-1}^{(2)*}, \dots, a_{i-1}^{(m)*})$ — $n \cdot m$ -

вимірний вектор ($i = p_0, p_0+1, \dots, P-1, j=1, 2, \dots, m$). X_{i, p_0} — фундаментальна матриця розв'язків однорідної системи (2), що задовольняє матричне різницеве рівняння

$$X_{i+1, p_0} = A_i X_{i, p_0}, \quad X_{p_0, p_0} = E, \quad i = p_0, p_0+1, \dots, P-1.$$

Квадратна матриця Q_i^{-1} — вимірності $n \times m$ має вигляд:

$$Q_i^{-1} = \begin{pmatrix} X_{i, p_0} B_1^{-1} X_{i, p_0}^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_{i, p_0} B_2^{-1} X_{i, p_0}^* & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_{i, p_0} B_m^{-1} X_{i, p_0}^* \end{pmatrix}$$

та обчислюється згідно з рівнянням

$$Q_{i+1}^{(j)-1} = A_i Q_i^{(j)-1} A_i^*, \quad Q_{p_0}^{(j)-1} = B_j^{-1}, \quad i = p_0, p_0+1, \dots, P,$$

де $Q_i^{(j)-1} = X_{i, p_0} B_j^{-1} X_{i, p_0}^*$ ($j=1, 2, \dots, m$), $\bar{\Psi}_i$ — межа опуклої множини Ψ_i .

Отже, обмеження на функції чутливості в ітераційній процедурі (6) будуть справджуватися для кожного фіксованого значення вектора $\alpha^{(k)}$, якщо операцію проектування здійснювати на таку множину:

$$G_{\alpha^{(k)}} = G_{\alpha} \cap \left\{ \alpha : \sum_{j=1}^m \left(\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha_j} \right)^* B_j \frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha_j} \leq c^2 \right\}, \quad (9)$$

де стала c задовольняє нерівність (7) або (8) відповідно.

Для того, щоб обмеження на функції чутливості виконувалися для кожного довільного значення α , потрібно будувати множину $G_{\alpha^{(k)}}$ для лінеаризованої системи (1).

Розглянемо спочатку лінійну дискретну систему

$$x_{i+1} = A_i x_i + \Omega_i \alpha, \quad i = p_0, p_0 + 1, \dots, P-1, \quad (10)$$

для якої рівняння чутливості мають такий вигляд:

$$u_{i+1}^{(j)} = A_i u_i^{(j)} + \omega_i^{(j)}, \quad i = p_0, p_0 + 1, \dots, P-1, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Тут A_i , Ω_i – сталі матриці вимірності $n \times n$ та $n \times m$ відповідно; $\omega_i^{(j)}$ – n -вимірний вектор, що відповідає j -му стовпцю матриці Ω_i ($i = p_0, p_0 + 1, \dots, P-1$).

Для системи різницевих рівнянь (10) умови стійкості записуються аналогічно (7), (8). Але, на відміну від попереднього випадку, матриці A_i та вектори $\omega_i^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, m$ ($i = p_0, p_0 + 1, \dots, P-1$) є однаковими для всіх розрахункових режимів. Тому відповідні вимоги на функції чутливості будуть виконуватися для довільних α з множини (9).

Цей підхід поширюється на нелінійні системи типу (9). Так, лінеаризуючи систему (1) в околі будь-якого розрахункового руху, наприклад нульового – $x_i = 0$, $\alpha = 0$, $i = p_0, p_0 + 1, \dots, P$, одержимо лінійну систему з постійно діючими збуреннями

$$x_{i+1} = A_i x_i + \Omega_i \alpha + R_i(x_i, \alpha), \quad i = p_0, p_0 + 1, \dots, P-1,$$

де $A_i = \left\{ \frac{\partial f_i(x_i, \alpha)}{\partial x_i} \right\}_n \Big|_{x_i=0, \alpha=0}$, $\Omega_i = \left\{ \frac{\partial f_i(x_i, \alpha)}{\partial \alpha} \right\}_n \Big|_{x_i=0, \alpha=0}$ – відомі матриці, а $R_i(x_i, \alpha)$ –

вектор-функції вимірності n , що визначають похибку апроксимації ($i = p_0, p_0 + 1, \dots, P-1$).

Критерії стійкості для системи відносно функцій чутливості

$$u_{i+1}^{(j)} = A_i u_i^{(j)} + \omega_i^{(j)} + \frac{\partial R_i(x_i, \alpha)}{\partial \alpha_j}, \quad i = p_0, p_0 + 1, \dots, P-1$$

при відомих векторах $\omega_i^{(j)}$ та обмежених збуреннях $\frac{\partial R_i(x_i, \alpha)}{\partial \alpha_j}$ записуються

за аналогією з (7), (8) на підставі алгоритмів практичної стійкості [2,3].

Запропонований підхід можна застосовувати для оцінки області допусків на параметри за наявності обмежень на розкид фазових координат системи [2].

Результати досліджень. Для дискретних параметричних систем здійснено чисельне розв'язання задач обмеженої та гарантованої чутливості методами практичної стійкості.

Висновки

На підставі алгоритмів практичної стійкості для дискретних систем розроблено методи оцінювання областей початкових умов для функцій чутливості, зв'язаних з проектуванням малочутливих систем.

Список літератури

1. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. – К.: Наук. думка, 1985. – 304 с.
2. Панталиенко Л.А. Анализ и оценка дискретных параметрических систем методами практической устойчивости / Л.А. Панталиенко // Кибернетика и вычислительная техника. Дискретные системы управления: межведомств. сб. научн. тр. – К.: Изд-во НАНУ, 1997. – Вып.113. – С.101 – 106.
3. Панталієнко Л.А. Алгоритми побудови областей стійкості для лінійних різницевих систем, залежних від параметрів / Л.А. Панталієнко // Електрифікація та автоматизація сільського господарства. – 2006. – №3– 4. – С. 61– 65.
4. Розенвассер Е.Н. Чувствительность систем управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов.– М.: Наука , 1981. – 464 с.

Приведены результаты расчета областей устойчивости для оптимизационных задач с ограниченной чувствительностью. Для линейных дискретных систем рассмотрены постановки задач гарантированной чувствительности, которые охватываются алгоритмами практической устойчивости.

Дискретная система, ограниченная чувствительность, параметры, практическая устойчивость.

The results of the calculation of stability regions for optimization problems with limited sensitivity. For linear discrete systems considered problem statement guaranteed sensitivity covered algorithms practical stability.

Discrete system, limited sensitivity, parameters, the practical stability.

УДК 517.51

КОНСТРУКТИВНА ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАСІВ ФУНКЦІЙ, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬСЯ D-МОДУЛЕМ ГЛАДКОСТІ

О. Ю. Дюженкова, кандидат фізико-математичних наук

Розглянуто аналог модуля гладкості Дітзіана-Томіка – D-модуль гладкості для функцій, неперервних на кусково-гладких кривих