

Висновки

На підставі алгоритмів практичної стійкості для дискретних систем розроблено методи оцінювання областей початкових умов для функцій чутливості, зв'язаних з проектуванням малочутливих систем.

Список літератури

1. Бублик Б.Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. – К.: Наук. думка, 1985. – 304 с.
2. Панталиенко Л.А. Анализ и оценка дискретных параметрических систем методами практической устойчивости / Л.А. Панталиенко // Кибернетика и вычислительная техника. Дискретные системы управления: межведомств. сб. научн. тр. – К.: Изд-во НАНУ, 1997. – Вып.113. – С.101 – 106.
3. Панталієнко Л.А. Алгоритми побудови областей стійкості для лінійних різницевих систем, залежних від параметрів / Л.А. Панталієнко // Електрифікація та автоматизація сільського господарства. – 2006. – №3– 4. – С. 61– 65.
4. Розенвассер Е.Н. Чувствительность систем управления / Е.Н. Розенвассер, Р.М. Юсупов.– М.: Наука , 1981. – 464 с.

Приведены результаты расчета областей устойчивости для оптимизационных задач с ограниченной чувствительностью. Для линейных дискретных систем рассмотрены постановки задач гарантированной чувствительности, которые охватываются алгоритмами практической устойчивости.

Дискретная система, ограниченная чувствительность, параметры, практическая устойчивость.

The results of the calculation of stability regions for optimization problems with limited sensitivity. For linear discrete systems considered problem statement guaranteed sensitivity covered algorithms practical stability.

Discrete system, limited sensitivity, parameters, the practical stability.

УДК 517.51

КОНСТРУКТИВНА ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАСІВ ФУНКЦІЙ, ЩО ВИЗНАЧАЮТЬСЯ D-МОДУЛЕМ ГЛАДКОСТІ

О. Ю. Дюженкова, кандидат фізико-математичних наук

Розглянуто аналог модуля гладкості Дітзіана-Томіка – D-модуль гладкості для функцій, неперервних на кусково-гладких кривих

комплексної площини. Наведено конструктивну характеристику класів функцій, що характеризуються D -модулем гладкості.

Наближення функцій, комплексна площа, множини з кусково-гладкою межею, D -модуль гладкості, конструктивна характеристика.

У теорії наближень широко використовують DT -модулі гладкості (модулі гладкості Дітзіана-Тотіка) для функцій, неперервних на відрізьку $[-1;1]$ [5]. Вперше конструктивна характеристика рівномірного наближення функцій на множинах комплексної площини з кусково-гладкою межею була одержана в роботах В.К. Дзядика [1], Г.А. Алібекова, Ю.І. Волкова та ін. Вона розглядалася в термінах модулів гладкості функції $\tilde{f}(\omega) = f(\psi(\omega))$, де $\psi(\omega)$ – конформне відображення зовнішності круга на зовнішність розглядуваної множини.

Мета досліджень – поширення теорії гладкостей З.Дітзіана і В.Тотіка на множини комплексної площини з кусково-гладкою межею, вивчення властивостей аналога DT -модуля гладкості $\overline{\omega}_k(f,t)$ на областях з кутами та побудова конструктивної характеристики в термінах введеного D -модуля гладкості функції f .

Матеріали та методика досліджень. У роботі використовуються методи рівномірного наближення функцій [1,3,4], зокрема інтерполяція функцій алгебраїчними многочленами і многочленами Лагранжа.

Результати досліджень. Досліджено властивості аналога модуля гладкості Дітзіана–Тотіка для функцій, неперервних на кусково-гладких кривих комплексної площини, побудовано конструктивну характеристику класів функцій у термінах D -модуля гладкості.

Нехай M – замкнена обмежена множина комплексної площини, межа Γ якої є жордановою кривою і складається із скінченного числа гладких дуг Γ_j , які утворюють у точках стику a_j зовнішні кути $\alpha_j\pi$, $0 < \alpha_j \leq 2$. Клас таких множин позначимо через (C) .

Для всіх $z \in \Gamma$ і $h > 0$ позначимо

$$\rho_h(z) := h(|z - a_{j_*}|^{\frac{1}{\alpha_{j_*}}} + h)^{\alpha_{j_*}},$$

де j_* – індекс найближчої до z точки стику.

Розглянемо довільну точку $\tilde{z} \in \Gamma$. Нехай $U[\tilde{z}, \rho]$ – круг з центром у точці $\tilde{z}$ і радіусом ρ . Позначимо через $T(\Gamma, \tilde{z}, k, \rho)$ множину всіх наборів $Z = \{z_1, \dots, z_k\}$ із k точок, кожний з яких задовольняє умови:

$$1) z_i \in \Gamma \cap U[\tilde{z}, \rho], \quad i = \overline{1, k}$$

$$2) |z_i - z_j| \geq \frac{1}{(k+1)(k+2)} \rho, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, k}.$$

Нехай $L(z, f) := L(z, f; z_1, \dots, z_k)$ – многочлен Лагранжа степеня $\leq k-1$, який інтерполює функцію f у k різних точках $z_i \in C$, $i = \overline{1, k}$.

Означення. D -модулем гладкості порядку k на кривій Γ неперервної на Γ функції f назовемо функцію

$$\bar{\omega}_k(\tau, f, \Gamma) := \sup_{h \in [0; \tau]} \sup_{\tilde{z} \in \Gamma} \sup_{Z \in T(\Gamma, \tilde{z}, k, \rho)} |f(z_0) - L(z_0, f; z_1, \dots, z_k)|, \quad \tau \geq 0.$$

Основним результатом роботи є пряма та обернена теореми рівномірного наближення функцій на множинах $M \subset (\mathbb{C})$. Внаслідок цих теорем побудовано конструктивну характеристику класів функцій, що визначаються D -модулем гладкості.

Позначимо через $A(M)$ клас функцій, аналітичних в області $M \setminus \Gamma$ та неперервних на множині M .

Величиною найкращого рівномірного наближення неперервної на M функції f алгебраїчними многочленами $P_n = P_n(z)$ степеня $\leq n$ називається число

$$E_n(f) = E_n(f)_M = \inf_{P_n} \|f - P_n\|_M.$$

Теорема 1. Нехай $k \in \mathbb{N}$. Якщо функція $f \in A(M)$, то при кожному натуральному $n \geq k - 1$ має місце нерівність

$$E_n(f) \leq c \bar{\omega}_k\left(\frac{1}{n}, f, \Gamma\right). \quad (1)$$

Для доведення прямої теореми 1 рівномірного наближення функцій використовуються многочленні ядра Дзядика [1]. Ця теорема є наслідком теореми про властивість нормальності [2] і теореми Тамразова [3].

Неперервна і неспадна на $[0; \infty)$ функція φ називається мажорантою, якщо $\varphi(0) = 0$. Клас всіх мажорант позначимо через Φ . Нехай $\underline{\alpha}$ – найменше, а $\bar{\alpha}$ – найбільше серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Теорема 2. Нехай $k \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \Phi$. Якщо для заданої на множині M функції f при кожному натуральному $n \geq k - 1$ виконується нерівність

$$E_n(f) \leq \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \quad (2)$$

то має місце оцінка

$$\bar{\omega}_k(\tau, f) \leq c \tau^{\underline{\alpha}k} \int_{\tau}^{\text{diam} M} \frac{\varphi(u)}{u^{\underline{\alpha}k+1}} du, \quad 0 < \tau < \frac{1}{2} \text{diam} M. \quad (3)$$

Для доведення оберненої теореми 2 використаємо наближення функцій за допомогою алгебраїчних многочленів $P_n(z)$ та многочленів Лагранжа $L(z, f)$.

Розглянемо довільну точку $z \in \Gamma$ і позначимо $\rho := \rho_{\frac{1}{n}}(z)$. На межі Γ множини M виберемо k точок так, щоб $\{z_1, \dots, z_k\} \in T(\Gamma, z, k, \rho)$. Нехай $P_n(z)$ – многочлен степеня $\leq n$, для якого справедлива нерівність

$$|f(z) - P_n(z)| \leq 2\varphi\left(\frac{1}{n}\right), \quad z \in M. \quad (4)$$

Подамо різницю $f(z) - L(z, f)$ у вигляді

$$f(z) - L(z, f) = (f(z) - P_n(z)) - L(z, f - P_n) + (P_n(z) - L(z, P_n)). \quad (5)$$

Оцінимо кожний із доданків останньої рівності. Враховуючи нерівність (4), одержимо

$$|L(z, f - P_n)| \leq c \max_{i=1, k} |f(z_i) - P_n(z_i)| \leq c \|f - P_n\|_{\Gamma \cap U} \leq c \varphi\left(\frac{1}{n}\right). \quad (6)$$

Виберемо $l \in N$, $l_0 \in N$ так, щоб $2^l < n \leq 2^{l+1}$, $2^{l_0} < k-1 \leq 2^{l_0+1}$ і розкладемо $P_n(z)$ у суму Бернштейна

$$P_n(z) = P_{2^{l_0}}(z) + (P_{2^{l_0+1}}(z) - P_{2^{l_0}}(z)) + \dots + (P_{2^l}(z) - P_{2^{l-1}}(z)) + (P_n(z) - P_{2^l}(z)).$$

Нехай $\rho_{2^j} := \rho_{\frac{1}{2^j}}(z)$, $j = \overline{l_0, l}$. Скориставшись властивістю розділеної різниці та оцінкою В.К. Дзядика для похідної многочлена [1], маємо

$$|P_n(z) - L(z, P_n)| \leq \frac{1}{k!} \rho^k \|P_n^{(k)}\|_{\Gamma \cap U} \leq c \sum_{j=l_0}^l \frac{\rho^k}{\rho_{2^{j+1}}^k} \varphi\left(\frac{1}{2^j}\right) =: S. \quad (7)$$

Розглянувши різні випадки розташування точок на кривій Γ , отримаємо оцінку для величини S , а саме $S \leq ch^{\alpha k} \int_h^{\text{diam} M} \frac{\varphi(u)}{u^{\alpha k+1}} du$. (8)

Оскільки $\varphi(h) \leq ch^{\alpha k} \int_h^{\text{diam} M} \frac{\varphi(u)}{u^{\alpha k+1}} du$, то із подання (5) та оцінок (4), (6)–(8) випливає нерівність

$$|f(z) - L(z, f)| \leq |f(z) - P_n(z)| + |L(z, f - P_n)| + |P_n(z) - L(z, P_n)| \leq Ch^{\alpha k} \int_h^{\text{diam} M} \frac{\varphi(u)}{u^{\alpha k+1}} du$$

Тепер справедливості оцінки (3) випливає із означення D -модуля гладкості. Теорему 2 доведено.

Означення. Мажоранту φ назвемо l -мажорантою, якщо

$$\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2^l} \leq \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1^l}, \quad 0 < \tau_1 \leq \tau_2.$$

Множину всіх l -мажорант позначимо через Φ^l . Переформулюємо пряму теорему в термінах мажоранти φ .

Теорема 3. Нехай $k \in N$, $\varphi \in \Phi^{\alpha k}$. Якщо функція $f \in A(M)$ і

$$\bar{\omega}_k(\tau, f, \Gamma) \leq \varphi(\tau),$$

то при кожному натуральному $n \geq k-1$ має місце нерівність

$$E_n(f) \leq c \varphi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Функція φ задовольняє типу умови Барі-Стєчка, якщо

$$h^{\underline{\alpha}k} \int_h^{\text{diam}M} \frac{\varphi(u)}{u^{\underline{\alpha}k+1}} du = O(\varphi(h)), \quad h \rightarrow 0. \quad (9)$$

Зауважимо, що із виконання умови (9) для функції $\varphi \in \Phi$ випливає $\varphi \in \Phi^{\underline{\alpha}k}$, а отже, $\varphi \in \Phi^{\bar{\alpha}k}$.

Наслідком прямої теореми 3 та оберненої теореми 2 рівномірного наближення функцій на областях з кутами є конструктивна характеристика класів функцій у термінах D-модуля гладкості.

Теорема 4. Нехай мажоранта φ задовольняє умову (9). Для того, щоб $E_n(f) = O\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, $n \rightarrow \infty$, необхідно й достатньо, щоб $f \in A(M)$ і $\bar{\omega}_k(\tau, f, \Gamma) = O(\varphi(\tau))$, $\tau \rightarrow 0$.

Зауважимо, що для функції $\varphi^\tau = \tau^\beta$, $\beta > 0$ виконується умова (30) при $k > \frac{\beta}{\underline{\alpha}}$. Тоді має місце теорема.

Теорема 5. Нехай $\beta > 0$, $k > \frac{\beta}{\underline{\alpha}}$. Для того, щоб $E_n(f) = O\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$, $n \rightarrow \infty$, необхідно й достатньо, щоб $f \in A(M)$ і $\bar{\omega}_k(\tau, f, \Gamma) = O(\tau^\beta)$, $\tau \rightarrow 0$.

Висновки

У роботі поширено теорію модулів гладкості З.Дітзіана і В.Тотіка на функції, неперервні на кусково-гладких кривих комплексної площини. Розглянуто властивості D-модуля гладкості та наведено конструктивну характеристику класів функцій, що визначаються цим модулем.

Список літератури

1. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами / В.К. Дзядык– М.: Наука, 1977.– 512 с.
2. Дюженкова О.Ю. Модулі гладкості на множинах комплексної площини з кусково-гладкою межею / О.Ю. Дюженкова // Науковий вісник НУБіП України, Серія: «Техніка та енергетика АПК» – К., 2013. – Вип.184, ч.1. – С.278–282.
3. Тамразов П.М. Гладкости и полиномиальные приближения/ П.М. Тамразов. – К.: Наук. думка, 1975. – 272с.
4. Шевчук И.А. Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций/ И.А.Шевчук. – К.: Наук. думка, 1992. – 223 с.
5. Ditzian Z. Moduli of smoothness/ Ditzian Z., Totik V. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1987. – 300 p.

Рассмотрен аналог модуля гладкости Дитзиана-Тотика - D -модуль гладкости для функций, непрерывных на кусочно-гладких кривых комплексной плоскости. Приведена конструктивная характеристика классов функций, характеризующихся D -модулем гладкости.

Приближение функций, комплексная плоскость, множества с кусочно-гладкой границей, D -модуль гладкости, конструктивная характеристика.

We introduce the analog of modules of smoothness Ditziana-Totika - D -module of smoothness for functions on continuous piecewise smooth curves of the complex plane. We consider the structural characterization of functions classes that are characterized by D -modules of smoothness.

Function approximation, complex plane, piecewise smooth curves, D -module of smoothness, structural characterization.

УДК 517.51

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ НА КОЛІ

**Ю.Б. Гнучій, доктор фізико-математичних наук
Т.Г. Криворот, асистент**

У термінах інваріанта розглянуто топологічну еквівалентність неперервних функцій, заданих на колі зі скінченним числом екстремумів. Інваріантом функції, що дає можливість підрахувати число топологічно нееквівалентних функцій, є $\Omega(f)$ – розбиття S^1 на дуги S_i , значення функцій в їх локальних екстремумах, що утворюють змій певного типу.

Критерій, еквівалентність, функція, многовид, екстремум, послідовності.

Питання класифікації та дослідження умов топологічної еквівалентності функцій на многовидах є важливим напрямком топології. Цією проблемою займалися В.І. Арнольд, Дж.Дженкінс, В.Каплана, С.І. Максименко, М.Морс, О.О. Пришляк, В.В. Шарко.

Мета досліджень – встановлення критерію топологічної еквівалентності функцій, що задані на колі та приймають скінченне число критичних значень.

Матеріали та методика досліджень. Для побудови інваріанта неперервних функцій, заданих на колі, використовувалися методи топології та топологічної комбінаторики. Це дало можливість підрахувати число топологічно нееквівалентних функцій. Інваріантом функції, що дає