Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2021, Vol. 12, No. 2, 67-75
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), www.journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

http://dx.doi.org/10.31548/machenergy2021.02.067

УДК 514.18

РУХ ЧАСТИНКИ ГРУНТУ ПО ПОВЕРХНІ РОЗГОРТНОГО ГЕЛІКОЇДА З ГОРИЗОНТАЛЬНОЮ ВІССЮ ОБЕРТАННЯ І ЗАДАНИМ КУТОМ АТАКИ

Т. А. Кресан

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Стаття зі спеціальності: 131 – прикладна механіка.

Кореспонденція автора: tanyakresan@i.ua.

Історія статті: отримано – січень 2021, акцептовано – червень 2021, опубліковано – 30 липня 2021 року.
Бібл. 15, рис. 5, табл. 0.

Анотація. В статті розглянуто взаємодію гвинтового ґрунтообробного органа із частинками грунту. Завдяки дуже широкому застосуванню у техніці під терміном “гвинтова поверхня” зазвичай розуміють поверхню гвинтового коноїда або шнека. В роботі розглянуто поверхню розгортного гелікоїда, яка теж є лінійчатою, але суттєво відрізняється від шнека. Відмінність полягає не тільки у геометричній формі, але і в технології виготовлення. Якщо шнек виготовляють штамповкою або прокаткою смуги із значними деформаціями заготовки, то розгортний гелікоїд можна виготовити простим згинанням при мінімумі пластичних деформацій. З точки зору теорії при нульовій товщині заготовки пластичні деформації при її згинанні взагалі були б відсутні.

Робочий орган для обробітку ґрунту складається із смуги розгортної гвинтової поверхні, у якої зовнішня крайка загострена і виконує функцію леза, а внутрішня жорстко кріпиться до решітчастого циліндра. Різниця між радіусом гвинтової лінії леза і циліндра визначає глибину обробітку. Решітчастий циліндр запобігає забиванню міжвиткового простору і одночасно виконує додаткову функцію котка. Орган працює подібно до дискових знарядь, тобто профіль обробленого поля має гребені і впадини. В момент контакту леза із поверхнею поля наявні кути, аналогічні кутам атаки і крену для дискових знарядь. Конструктивні параметри, якими забезпечуються ці кути, можна розрахувати, виходячи із аналітичного опису поверхні.

Секція, тобто барабан із витком гвинтової робочої поверхні, розташовується так, що його вісь складає певний кут із напрямом руху агрегату. Це зумовлює появу кута атаки і сил реакції, які змушують барабан із поверхнею обертатися. Виходячи із швидкості руху агрегату і враховуючи кут атаки, можна знайти кутову швидкість обертання секції. Далі складається диференціальне рівняння руху частинки після вступу її на поверхню, яка обертається. Диференціальне рівняння розписується в проекціях на три осі нерухомої системи координат. До нього входять три невідомі залежності: дві змінні, що описують траєкторію ковзання частинки по поверхні і сила реакції поверхні. Систему розв’язано чисельним способом. Побудовано траєкторії відносного і абсолютного руху частинки та графіки зміни її відносної і абсолютної швидкостей.

Ключові слова: розгортний гелікоїд, ґрунтообробний орган, кутова швидкість, частинка, ковзання, диференціальні рівняння.

Постановка проблеми

Для поверхневого обробітку ґрунту використовуються дискові робочі органи. Від відстані між дисками, їх конструктивними параметрами та кутами установки залежить форма профілю обробленої смуги ґрунту та висота гребенів. Диск встановлюють так, щоб між площиною розташування леза (крайки диска) і напрямом руху агрегату був певний кут атаки. Для покращення перемішування диск відхиляють ще і від вертикального напряму, тому кожен диск має індивідуальне кріплення осі обертання до рами. Якщо застосувати гвинтову поверхню, то можна очікувати аналогічні результати роботи. Однак в цьому випадку гвинтову робочу поверхню можна кріпити на спільному валу, подібно батареї дисків лущильника. Це спрощує конструкцію робочого органа.

Аналіз останніх досліджень

Дискові ґрунтообробні машини, їх конструкція, робочі органи та розрахунок основних параметрів висвітлено в монографіях [1–3]. Проектування і розрахунок дискових ґрунтообробних знарядь ґрунтовно розглянуто в праці [4]. В праці [5] розроблено аналітичну модель установки ґрунтообробних сферичних дисків для визначення геометричних та технологічних характеристик. У працях більш вузького спрямування досліджуються різні аспекти покращення якості обробітку ґрунту такими знаряддями [6–8]. Перспективи подальшого удосконалення дискових та інших ґрунтообробних знарядь розглянуто в праці [9]. В працях [10, 11] досліджено рух частинок ґрунту по поверхні дискових робочих органів. Теорія конструювання лінійчатих поверхонь висвітлене у праці [14]. Застосування розгортного гелікоїда для розрахунку і виготовлення робочих елементів розглянуто в працях [12, 13]. У [15] обґрунтована практична можливість застосування гвинтового робочого органу.

Мета досліджень

Розробити аналітичний опис руху частинок ґрунту по поверхні розгортного гелікоїда, який в складі ґрунтообробного агрегату рухається вперед і одночасно обертається навколо горизонтальної осі.

Результати досліджень

Гелікоїдальний робочий орган для поверхневого обробітку ґрунту пропонується виготовляти у вигляді розгортного гелікоїда.

Витки робочої поверхні такого органу можна отримати згинанням і розтягуванням розгортки у вигляді плоского кільця вздовж осі гелікоїда.

Отримана таким чином поверхня буде відрізнятися від іншої широко відомої гвинтової лінійчатої поверхні – гвинтового коноїда (шнека). 1,б). Якщо у шнека прямолінійні твірні поверхні перпендикулярні його осі, то у розгортного гелікоїда вони складають із віссю певний кут (рис. 1,а).

Конструктивними параметрами робочої поверхні є радіус r внутрішньої кромки, радіус R зовнішньої (ріжучої) кромки, крок H, кут нахилу прямолінійних твірних.

Зовнішня і внутрішня кромки є гвинтовими лініями із кутами підйому φR і φr. Кут нахилу φ прямолінійних твірних поверхні визначається кутом підйому гвинтової лінії мінімально можливого радіуса p, яка носить назву ребра звороту. Саме наявність кута нахилу прямолінійних твірних сприяє зануренню поверхні у ґрунт, якщо її вісь розташувати горизонтально і під кутом β до напряму, перпендикулярному напряму V руху агрегату (рис. 1,б).

На горизонтальній проекції (рис. 1,б) поверхня показана без вала, причому вісь поверхні зображена так, що має невидимі ділянки. Це зроблено для того, щоб зорієнтуватися, де верхній, а де нижній виток поверхні. У одній із точок нижнього витка, яку можна уявити, як точку контакту ріжучої крайки із ґрунтом, показано кут атаки γ. Із рисунка можна записати:

$$\gamma = \beta + \varphi_R , \qquad (1)$$

Глибина a обробітку ґрунту є різницею радіусів: $a=R-r$. Глибина обробки a, висота гребенів c, відстань між гребенями b залежать від конструктивних параметрів поверхні і кута атаки γ.

Результат роботи такого органа є аналогічним результату роботи дискового робочого органу. Якщо кожен диск дискового ґрунтообробного агрегату потребує установки його на індивідуальній осі із забезпеченням заданих кутів атаки і крену для примусового занурення його у ґрунт, то гвинтова форма робочої поверхні забезпечує її занурення у ґрунт більш простим конструктивним виконанням.

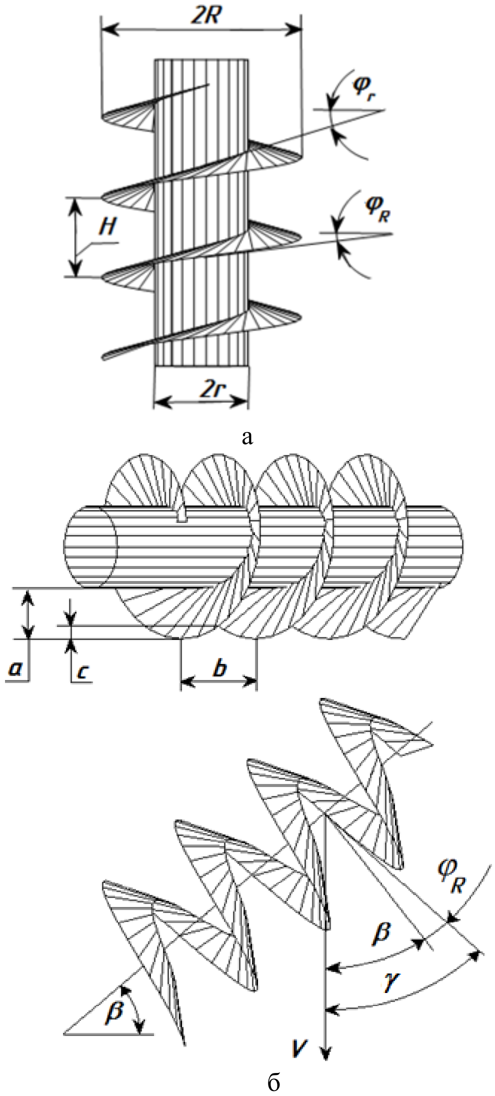


Рис. 1. Графічні ілюстрації до поверхні розгортного гелікоїда робочого органу для поверхневого обробітку грунту:

а) конструктивні параметри поверхні із вертикальною віссю;

б) фронтальна і горизонтальна проекції поверхні гелікоїда із горизонтальною віссю, спрямованої під кутом β.

Fig. 1. Graphic illustrations to the surface of the developable helicoid of the working body for surface tillage:

a) design parameters of the surface with a vertical axis;

b) frontal and horizontal projections of the surface of the helicoid with a horizontal axis directed at an angle β.

Параметричні рівняння розгортного гелікоїда з горизонтальною віссю обертання, паралельною осі OX, мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} X &= h\alpha - u\sin\varphi; \\ Y &= p\sin\alpha - u\cos\varphi\cos\alpha; \\ Z &= p\cos\alpha + u\cos\varphi\sin\alpha, \end{aligned} \qquad (2)$$

де α, u – змінні параметри поверхні, причому α – кут повороту точки навколо осі поверхні при її русі до поточної точки на гвинтовій лінії, яка розташована на циліндрі радіуса p; u – довжина прямолінійної твірної від поточної точки на гвинтовій лінії до точки на поверхні;

h – стала величина (гвинтовий параметр), через якого визначається крок поверхні – $H=2\pi h$;

φ – кут нахилу прямолінійних твірних гелікоїда, який можна знайти через сталі величини h і p: $\cos\varphi = p\big/\sqrt{p^2+h^2}$. Виходячи із цієї залежності рівняння (2) запишемо у більш компактному вигляді:

$$\begin{aligned} X &= (A\alpha - u)\sin\varphi; \\ Y &= (A\sin\alpha - u\cos\alpha)\cos\varphi; \\ Z &= (A\cos\alpha + u\sin\alpha)\cos\varphi, \end{aligned} \qquad (3)$$

де стала $A=\sqrt{p^2+h^2}$.

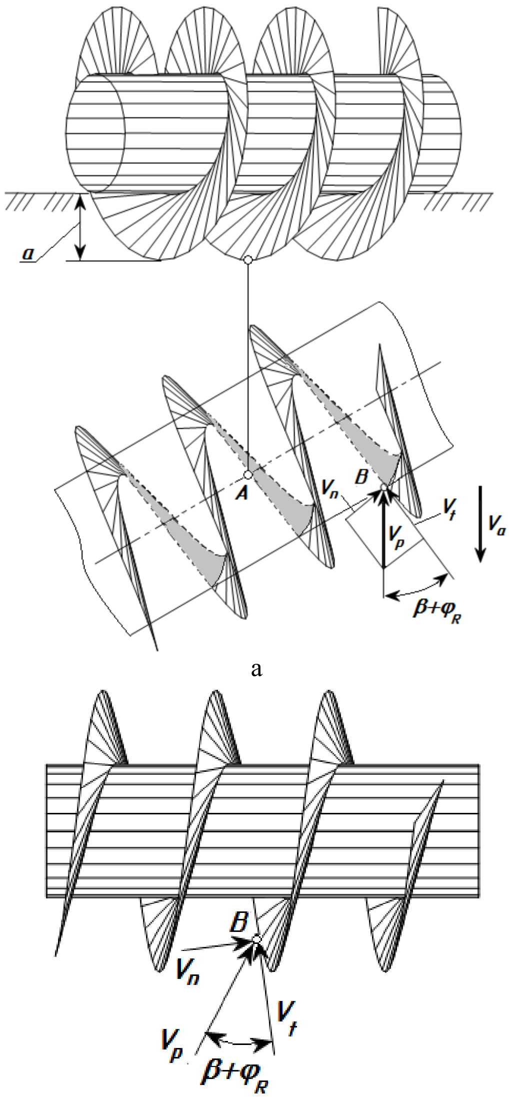


Рис. 2. Графічні ілюстрації до розкладання швидкості V_p частинки, яка вступає на поверхню гелікоїда, на складові V_t і V_n:

а) гелікоїд повернуто на кут β;

б) гелікоїд разом із векторами повернуто в зворотному прядку на кут $(-\beta)$

Fig. 2. Graphic illustrations for the decomposition of the velocity V_p of a particle entering the surface of a helicoid into components V_t and V_n:

a) the helicoid is rotated by the angle β;

b) the helicoid together with the vectors is rotated in the reverse strand by the angle $(-\beta)$

В силу обмеженого обсягу статті відомості про поверхню розгортного гелікоїда є стислими. Для подальшого викладу матеріалу важливими є параметричні рівняння (3) цієї поверхні.

Розглянемо ще раз поверхню робочого органу, повернуту під кутом атаки $\gamma=\beta+\varphi_R$ відносно напрямку руху агрегату V_a (рис. 2,а). Її нижня частина в межах глибини обробітку a буде знаходитися в ґрунті. На горизонтальній проекції ця частина поверхні обмежена прямими, паралельними осі, і зображена штриховими лініями. Найнижча точка A поверхні (ріжучої крайки) має контакт із ґрунтом на дні борозни. Точка B крайки має контакт із ґрунтом на поверхні поля. Якщо агрегат рухається із швидкістю V_a, то із такою ж швидкістю V_p частинка грунту вступає на робочу поверхню гелікоїда. Цю швидкість можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові: $V_t=V_p\cdot\cos(\beta+\varphi_R)$ і $V_n=V_p\cdot\sin(\beta+\varphi_R)$. Кут атаки $\gamma=\beta+\varphi_R$ для гелікоїда є змінним і залежним від глибини положення точки ріжучої крайки в грунті. Це зумовлено змінним значенням кута φ_R. Межі зміни цього кута є відносно незначними $\varphi_R\ldots\varphi_r$ (рис. 1,а), тому ми приймемо його сталим і рівним в найнижчій точці ріжучої крайки: $\varphi_R=\mathrm{arctg}(h/R)=\mathrm{arctg}(A\sin\varphi/R)$.

Для спрощення розрахунків ми гелікоїд не повертатимемо на кут β, як показано на рис. 1,б, а вважатимемо, що на нього насувається ґрунт із швидкістю V_p при $\beta=0$ (рис. 2,б). Така модель дозволить спрощено описати поверхню гелікоїда без повороту його на кут β, замінивши поворот гелікоїда на поворот вектора швидкості агрегату. Іншими словами, гелікоїд разом із позначеними векторами (рис. 2,а) повернемо в зворотну сторону на кут $(-\beta)$. Це дає можливість використовувати параметричні рівняння (3) гелікоїда, не ускладнюючи їх поворотом на кут β.

З поперечною швидкістю V_n частинка вступає на поверхню гелікоїда, а від поздовжньої V_t залежить кутова швидкість його обертання. Будемо виходити із умови, що ріжуча крайка гелікоїда перекочується по дну борозни в напрямі руху агрегату без ковзання, тому з певним допущенням можна записати $V_t=R\omega$, де ω – кутова швидкість обертання гелікоїда. Цей вираз не є точним, оскільки ріжучою крайкою є гвинтова лінія, а не коло, але будемо вважати, що він прийнятний для практики. Звідси знаходимо ω:

$$\begin{aligned} \omega &= V_p\cdot\cos(\beta+\varphi_R)/R= \\ &= V_p\cdot\cos[\beta+\mathrm{arctg}(A\sin\varphi/R)]/R. \end{aligned} \qquad (4)$$

Величину поперечної швидкості V_n, так як і кутову швидкість ω обертання гелікоїда, будемо враховувати при чисельному інтегруванні диференціальних рівнянь відносного руху частинки по його поверхні.

Якщо незалежні змінні поверхні u і α зробити залежними одна від одної, то на поверхні гелікоїда буде описана лінія. Будемо вважати, що така залежність встановлена через іншу змінну t – час ковзання частинки по поверхні гелікоїда. Тоді внутрішнє рівняння відносної траєкторії частинки опишеться залежностями: $u=u(t)$ і $\alpha=\alpha(t)$. Ці залежності потрібно розшукати. Рівняння (3) є рівняннями поверхні, але при встановленні залежностей $u=u(t)$ і $\alpha=\alpha(t)$ вони перетворюються у рівняння лінії на поверхні. Щоб відрізнити рівняння поверхні від рівнянь кривої на ній, у рівняннях поверхні будемо робити позначення «X», «Y», «Z»

прописними літерами, а у рівняннях лінії – строчними. При залежностях $u=u(t)$ і $\alpha=\alpha(t)$ (поки що невідомих) рівняння (3) опишуть на поверхні траєкторію відносного руху частинки. Зокрема, при $u=const$, на поверхні гелікоїда буде описана гвинтова лінія. Радіус циліндра R, на якому вона розташована, можна знайти піднесенням до квадрату останніх двох рівнянь (3):

$$R^2=\sqrt{Y^2+Z^2}=\left(A^2+u\right)^2\cos^2\varphi. \qquad (5)$$

З виразу (5) можна знайти значення $u=const$ при заданому радіусі R:

$$u=\frac{\sqrt{R^2-A^2\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}=\frac{\sqrt{R^2-\left(p^2+h^2\right)\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}. \qquad (6)$$

Було взято наступні конструктивні параметри гелікоїда: $R=0{,}25$ *м*, $r=0{,}15$ *м* (глибина обробітку ґрунту $a=0{,}1$ *м*). Для забезпечення прийнятних значень висоти гребенів c, відстані між гребенями b, було прийнято решту конструктивних параметрів: $p=0{,}0721$, $h=0{,}0416$, $\varphi=30^0$. Для цих даних за формулою (6) знаходимо значення u: $u=0{,}276$. Якщо у формулу (6) замість R підставити значення r, то отримаємо: $u=0{,}152$. Таким чином, для побудови гелікоїда із обмежувальними зовнішньою і внутрішньою гвинтовими лініями незалежна змінна повинна змінюватися в межах $u=0{,}152\ldots0{,}276$. Друга незалежна змінна – кут α – для одного витка змінюється в межах $\alpha=0\ldots2\pi$.

Диференціюванням (3) по часу t отримаємо проекції відносної швидкості ковзання частинки по поверхні гелікоїда:

$$\begin{aligned}
x'&=\left(A\alpha'-u'\right)\sin\varphi;\\
y'&=\left[\alpha'\left(u\sin\alpha+A\cos\alpha\right)-u'\cos\alpha\right]\cos\varphi;\\
z'&=\left[\alpha'\left(u\cos\alpha-A\sin\alpha\right)+u'\sin\alpha\right]\cos\varphi.
\end{aligned} \qquad (7)$$

Величину відносної швидкості отримаємо із геометричної суми складових (7):

$$V_r=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=\sqrt{\left(A\alpha'-u'\right)^2+u^2\alpha'^2\cos^2\varphi}. \qquad (8)$$

Внаслідок контакту робочої поверхні гелікоїда із грунтом він обертається навколо осі з кутовою швидкістю ω згідно (4), величина якої залежить від швидкості руху агрегата $V_a=V_p$. За час t поверхня гелікоїда (3) повернеться на кут $\psi=\omega\cdot t$. Застосувавши формули повороту, запишемо параметричні рівняння гелікоїда, які описують його положення після повороту на кут $\psi=\omega\cdot t$:

$$\begin{aligned}
X&=\left(A\alpha-u\right)\sin\varphi;\\
Y&=\left(A\sin\alpha-u\cos\alpha\right)\cos\varphi\cos\psi-\\
&-\left(A\cos\alpha+u\sin\alpha\right)\cos\varphi\sin\psi;\\
Z&=\left(A\sin\alpha-u\cos\alpha\right)\cos\varphi\sin\psi+\\
&+\left(A\cos\alpha+u\sin\alpha\right)\cos\varphi\cos\psi.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Після підстановки у (9) $\psi=\omega\cdot t$ і спрощень ми отримаємо рівняння лінії на поверхні гелікоїда, яка є абсолютною траєкторією руху частинки, тому переходимо до строчних літер:

$$\begin{aligned}
x&=\left[A\alpha-u\right]\sin\varphi;\\
y&=-\left[A\sin\left(\omega t-\alpha\right)+u\cos\left(\omega t-\alpha\right)\right]\cos\varphi;\\
z&=\left[A\cos\left(\omega t-\alpha\right)-u\sin\left(\omega t-\alpha\right)\right]\cos\varphi.
\end{aligned} \qquad (10)$$

Диференціальне рівняння руху частинки по поверхні гелікоїда складемо у вигляд $m\overline{w}=\overline{F}$ і, де m – маса частинки, $\overline{w}$ - вектор абсолютного прискорення, $\overline{F}$ - рівнодійний вектор прикладених до частинки сил. Такими силами є: сила ваги частинки mg ($g=9{,}81$ *м/с*^{2}), реакція $\overline{N}$ поверхні і сила тертя $\overline{fN}$, яка чинить опір ковзанню частинки по поверхні гелікоїда (f – коефіцієнт тертя). Наведене векторне рівняння розпишемо в проекціях на осі координат, в результаті чого отримаємо систему із трьох диференціальних рівнянь.

Абсолютне прискорення частинки отримаємо послідовним диференціюванням рівнянь абсолютної траєкторії (10) по часу t. Перша похідна рівнянь (10), тобто вектор абсолютної швидкості частинки, має вигляд:

$$\begin{aligned}
x'&=\left(A\alpha'-u'\right)\sin\varphi;\\
y'&=-\begin{bmatrix}\left(u'+A(\omega-\alpha')\right)\cos\left(\omega t-\alpha\right)-\\-u(\omega-\alpha')\sin\left(\omega t-\alpha\right)\end{bmatrix}\cos\varphi;\\
z'&=-\begin{bmatrix}\left(u'+A(\omega-\alpha')\right)\sin\left(\omega t-\alpha\right)+\\+u(\omega-\alpha')\cos\left(\omega t-\alpha\right)\end{bmatrix}\cos\varphi.
\end{aligned} \qquad (11)$$

Диференціюємо вирази (11) і отримуємо вектор абсолютного прискорення в проекціях на осі координат:

$$\begin{aligned}
x''&=\left(A\alpha''-u''\right)\sin\varphi;\\
y''&=\left(A\alpha''-u''+u(\omega-\alpha')^2\right)\cos\left(\omega t-\alpha\right)\cos\varphi+\\
&+\left(A(\omega-\alpha')^2+2u'(\omega-\alpha')-u\alpha''\right)\sin\left(\omega t-\alpha\right)\cos\varphi;\\
z''&=\left(A\alpha''-u''+u(\omega-\alpha')^2\right)\sin\left(\omega t-\alpha\right)\cos\varphi-\\
&-\left(A(\omega-\alpha')^2+2u'(\omega-\alpha')-u\alpha''\right)\cos\left(\omega t-\alpha\right)\cos\varphi.
\end{aligned} \qquad (12)$$

Сила ваги mg спрямована вниз, отже проекції напрямного одиничного вектора на орти тригранника запишуться:

$$\{0;\quad 0;\quad -1\}. \qquad (13)$$

Реакція N поверхні спрямована по нормалі до неї і визначається із векторного добутку двох векторів, дотичних до координатних ліній поверхні. Проекціями цих векторів є частинні похідні рівнянь (3):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial u}=-\sin\varphi; && \frac{\partial X}{\partial\alpha}=A\sin\varphi;\\
&\frac{\partial Y}{\partial u}=-\cos\varphi\cos\alpha; && \frac{\partial Y}{\partial\alpha}=\begin{pmatrix}u\sin\alpha+\\+A\cos\alpha\end{pmatrix}\cos\varphi;\\
&\frac{\partial Z}{\partial u}=\cos\varphi\sin\alpha; && \frac{\partial Z}{\partial\alpha}=\left(u\cos\alpha-A\cos\alpha\right).
\end{aligned} \qquad (14)$$

Після векторного множення векторів (14) і приведення отриманого вектора до одиничного проекції вектора нормалі до поверхні запишуться:

$$\{-\cos\varphi;\qquad \sin\varphi\cos\alpha;\qquad -\sin\varphi\sin\alpha\}. \qquad (15)$$

Слід зауважити, що одиничний вектор нормалі може бути спрямований як в одну, так і у протилежну сторону від точки на поверхні. Тому потрібно стежити, щоб його напрям збігався із напрямом реакції поверхні на частинку в точці її вступу на поверхню. Крім того, одиничний вектор (15) отриманий для нерухомої поверхні. Але сама поверхня обертається, тобто повертається на кут $\psi=\omega\cdot t$. Для узгодження напряму одиничного вектора (15) з напрямом дії інших сил, що діють на частинку в поточний момент часу t, його теж потрібно повернути на кут $\psi=\omega\cdot$ аналогічно повороту поверхні (9):

$$\{-\cos\varphi;\sin\varphi\cos(\omega t-\alpha);\sin\varphi\sin(\omega t-\alpha)\}. \quad (16)$$

Сила тертя $\overline{fN}$ – спрямована в сторону, протилежну відносній швидкості V_r ковзання частинки, тобто по дотичній до відносної траєкторії. Проекції одиничного вектора, вздовж якого спрямована швидкість ковзання частинки, визначається діленням складових швидкості (7) на її модуль (8) з наступним поворотом на кут $\varphi=\omega t$ в силу зазначених вище причин:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{(A\alpha'-u')}{\sqrt{(A\alpha'-u')^2+u^2\alpha'^2\cos^2\varphi}}\sin\varphi; \\ -\dfrac{u\alpha'\sin(\omega t-\alpha)+(u'-A\alpha')\cos(\omega t-\alpha)}{\sqrt{(A\alpha'-u')^2+u^2\alpha'^2\cos^2\varphi}}\cos\varphi; \\ \dfrac{u\alpha'\cos(\omega t-\alpha)-(u'-A\alpha')\sin(\omega t-\alpha)}{\sqrt{(A\alpha'-u')^2+u^2\alpha'^2\cos^2\varphi}}\cos\varphi \end{array}\right\}. \quad (17)$$

Напрями дії сил ваги mg, реакції поверхні N і сили тертя fN задаються одиничними векторами (13), (16) і (17). Розпишемо векторне рівняння $m\overline{w}=\overline{F}$ в проекціях на осі системи координат, взявши до уваги, що сила тертя fN спрямована вздовж одиничного вектора (17) в протилежну до нього сторону:

$$\begin{aligned} mx'' &= -N\cos\varphi - \\ &- fN\frac{(A\alpha'-u')}{\sqrt{(A\alpha'-u')^2+u^2\alpha'^2\cos^2\varphi}}\sin\varphi; \\ my'' &= N\sin\varphi\cos\alpha - \\ &- fN\frac{u\alpha'\sin(\omega t-\alpha)+(u'-A\alpha')\cos(\omega t-\alpha)}{\sqrt{(A\alpha'-u')^2+u^2\alpha'^2\cos^2\varphi}}\cos\varphi; \\ mz'' &= -mg+N\sin\varphi\sin(\omega t-\alpha) - \\ &- fN\frac{u\alpha'\cos(\omega t-\alpha)-(u'-A\alpha')\sin(\omega t-\alpha)}{\sqrt{(A\alpha'-u')^2+u^2\alpha'^2\cos^2\varphi}}\cos\varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Підставимо у (18) вирази других похідних із (12) і розв'яжемо систему (18) відносно других похідних невідомих функцій $u=u(t)$ і $\alpha=\alpha(t)$, а також $N=N(t)$. Після спрощень отримаємо:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{(2u'+A(\omega-\alpha'))(\omega-\alpha')\cos\varphi - g\cos(wt-\alpha)}{u\cos\varphi} - \\ &\qquad - f\alpha'\sin\varphi\frac{u(\omega-\alpha')^2\cos\varphi+g\sin(wt-\alpha)}{\sqrt{(A\alpha'-u')^2+u^2\alpha'^2\cos^2\varphi}} \\ u'' &= g\cos\varphi\sin(wt-\alpha) - fu'\sin\varphi\frac{u(\omega-\alpha')^2\cos\varphi+g\sin(wt-\alpha)}{\sqrt{(A\alpha'-u')^2+u^2\alpha'^2\cos^2\varphi}} + \\ &+ \frac{2Au'(\omega-\alpha')\cos\varphi - Ag\cos(wt-\alpha)+(\omega-\alpha')^2(A^2+u^2\cos^2\varphi)\cos\varphi}{u\cos\varphi}; \\ N &= m\sin\varphi[u(\omega-\alpha')^2\cos\varphi+g\sin(wt-\alpha)] \end{aligned} \quad .(19)$$

Вирази (19) потрібно розглядати як систему двох перших рівнянь. Третє рівняння – реакція поверхні – стає відомим після розв'язання системи двох перших рівнянь. Її потрібно розв'язувати чисельними методами.

Система перших двох рівнянь (19) була розв'язана чисельними методами в середовищі «*Simulink*» програмного продукту «*MatLab*». Було прийнято умову, що гелікоїд, конструктивні параметри якого наведені раніше, рухається із швидкістю $V_a=9$ *км/год* ($V_a=V_p=2{,}5$ *м/с*). Кут установки $\beta=40°$, коефіцієнт тертя $f=0{,}3$. На основі цього знаходимо: $V_t=V_p\cdot\cos(\beta+\varphi_R)=1{,}62$ *м/с*; $V_n=V_p\cdot\sin(\beta+\varphi_R)=1{,}9$ *м/с*. Отже, $\omega=V_t/R=6{,}5\ с^{-1}$.

Початкові умови інтегрування вибираються виходячи із того, в якій точці ріжучої крайки частинка вступає на поверхню. Цю точку можна вибирати в межах глибини a занурення поверхні у ґрунт і вона задається початковими координатами u_o і α_o. Для ріжучої крайки $u_o=0{,}276$ *м*. Для знаходження значення змінної α_o потрібно відносно неї розв'язати останнє рівняння (3):

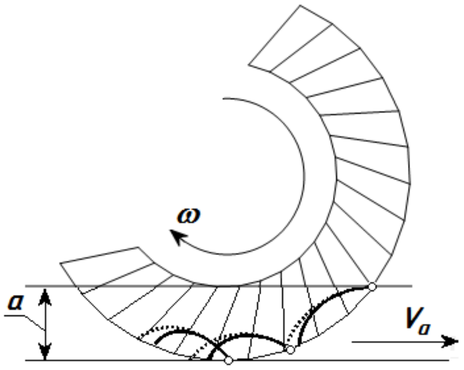
$$\alpha_0 = -\mathrm{Arccos}\frac{Az+u\sqrt{(A^2+u^2)\cos^2\varphi - z^2}}{(A^2+u^2)\cos^2\varphi}. \quad (20)$$

Поверхні поля відповідає значення $z=-0{,}15$ *м*, а дну борозни – $z=-0{,}25$ *м*. Підстановка цих значень у формулу (20) дає $\alpha_o=-0{,}94$ і $\alpha_o=-1{,}83$. Отже, початкове значення u_o при інтегруванні буде $u_o=0{,}276$ *м*, а початкове значення α_o буде залежати від глибини знаходження точки ріжучої крайки у ґрунті. Для поверхні грунту $\alpha_o=-0{,}94$, для дна борозни $\alpha_o=-1{,}83$. Інші значення α_o із даного проміжку відповідатимуть певній глибині знаходження точки ріжучої крайки у ґрунті. Вибираючи параметр α_o із зазначених меж, ми вибираємо точку на лезі на різній глибині занурення.

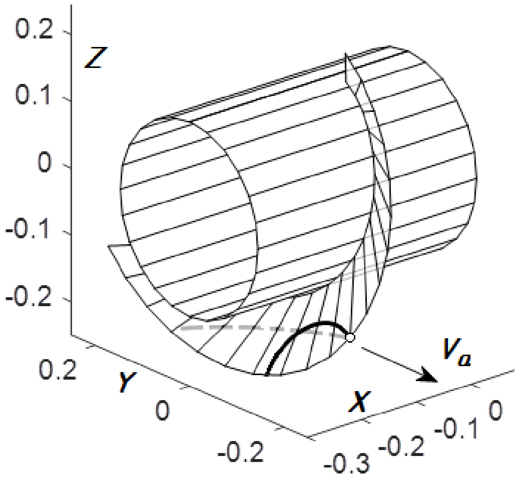
Початковим значенням перших похідних u_o' і α_o' визначається напрям вступу частинки на поверхню гелікоїда.

Похідна α_o' означає кутову швидкість ковзання частинки в момент її вступу на лезо. Якби гелікоїд обертався, а частинка залишалася на місці, то швидкість ковзання по лезу була б сталою, протилежною напряму обертання гелікоїда і рівною $\alpha_o'=-\omega$. Однак це відбувається тільки на момент вступу частинки на лезо, а далі частинка захоплюється поверхнею, рухається по ній і кутова швидкість ковзання зменшується.

Похідна u_o' означає лінійну швидкість руху частинки по поверхні вздовж координатної лінії (прямолінійної твірної) u. Лінійна швидкість u_o' вздовж прямолінійної твірної поверхні залежить від складової V_n, яка в нашому випадку рівна $1{,}9$ *м/с*. Однак напрям складової V_n не збігається із напрямом прямолінійної твірної. Крім того, при обертанні гелікоїда виникає складова швидкості переміщення його точок вздовж осі обертання. Частинка поступає на поверхню із швидкістю V_n і додатково поверхня внаслідок обертання «наїжджає» на частинку. З огляду на це, за початкове значення u_o' ми приймемо значення $u_o'=V_n=-1{,}9$ *м/с* (знак «мінус» означає, що частинка рухається вздовж прямолінійної твірної поверхні в протилежну сторону її відліку), а потім дослідимо закономірність ковзання частинки при збільшенні цього значення. На рис. 3 наведені траєкторії руху частинки за результатами чисельного інтегрування диференціальних рівнянь (19).



а



б

Рис. 3. Відносна та абсолютна траєкторії руху частинки:

а) гвинтова поверхня, вісь якої проекціюється в точку;

б) швидкість вступу частинки на поверхню збільшена до u_o'=-2,5 *м/с*

Fig. 3. Relative and absolute trajectories of the particle:

a) screw surface, the axis of which is projected into a point;

b) the velocity of the particle entering the surface is increased to u_o'=-2,5 *m/s*

На рис. 3,а гвинтова поверхня зображена таким чином, що її вісь проекціюється в точку. Траєкторії ковзання побудовані при вступі частинки на поверхню в трьох точках: на поверхні поля, на дні борозни і в проміжній точці. Суцільною лінією зображено рух окремої частинки грунту без взаємодії із іншими. Однак в реальному процесі відбувається її взаємодія із іншими частинками. Існують сили підпору суміжних частинок, які примушують частинку рухатися по поверхні. Можна припустити, що сила підпору долає силу тертя і в такому випадку можна прийняти коефіцієнт тертя *f* рівним нулеві. Штриховою лінією зображені відносні траєкторії частинок при *f=0*. Я видно із рис. 2,а, різниця між траєкторіями несуттєва.

Незалежно від точки вступу частинки на поверхню, вона ковзає по ній, наближаючись при цьому до внутрішньої периферії поверхні, тобто до циліндричного вала.

При збільшенні швидкості руху агрегату це наближення зростає. Наприклад, на рис. 3,б швидкість вступу частинки на поверхню збільшили від u_o'=*-1,9 м/с* до u_o'=*-2,5 м/с*.

Траєкторія ковзання ближче наблизилася до циліндричного вала.

Гвинтова поверхня зображена напівпрозорою, для того, щоб було видно абсолютну траєкторію руху частинки, яка зображена штриховою лінією. Справа в тому, що вона не лежить на поверхні і розташована за її тильною стороною.

Під час ковзання по поверхні частинка додатково відкидається назад за рахунок її повороту.

Сума цих двох рухів утворює абсолютну траєкторію. Таким чином, частинки грунту на початку руху під час ковзання по поверхні наближаються до циліндричного вала. Якщо лезо знаходиться в грунті, то нижні частинки тиснуть на верхні і циліндричний вал стає перепоною для їх руху.

В області примикання гвинтової поверхні до вала відбуватиметься залипання грунту. Щоб цьому запобігти, вал має бути решітчастим (рис. 4).

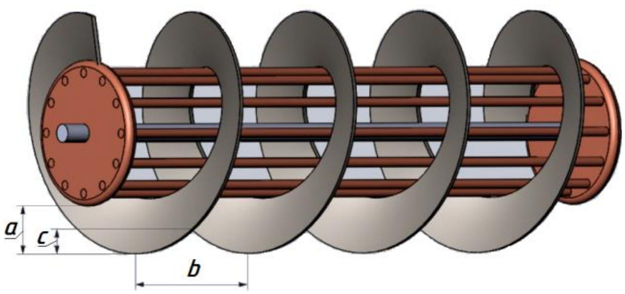


Рис. 4. Вигляд спереду на гелікоїд із решітчастим валом, проекції якого зображено на рис. 1,б.

Fig. 4. Front view of a helicoid with a lattice shaft, the projections of which are shown in Fig. 1,b.

Решітчастий вал буде додатково виконувати функцію котка.

На рис. 5 побудовано кінематичні характеристики руху частинки, яка вступає на поверхню гелікоїда у верхній точці,тобто на рівні поля (рис. 3,а). Суцільними лініями зображено криві для *f=0,3*, а штиховими – для *f=0.*

На рис. 5,а показано графік зміни кутової швидкості ковзання частинки по поверхні, а на рис. 5,б – відносну і абсолютну швидкості руху частинки Відносну визначали за формулою (8), а абсолютну – як геометричну суму складових (11).

Характерним для руху частинки є те, що на початку, тобто з моменту вступу на поверхню, наведені характеристики зменшуються, а потім починають зростати. Вони відображають проміжок часу (*t=0,11 с*) з моменту вступу частинки на поверхню до її сходу із поверхні.

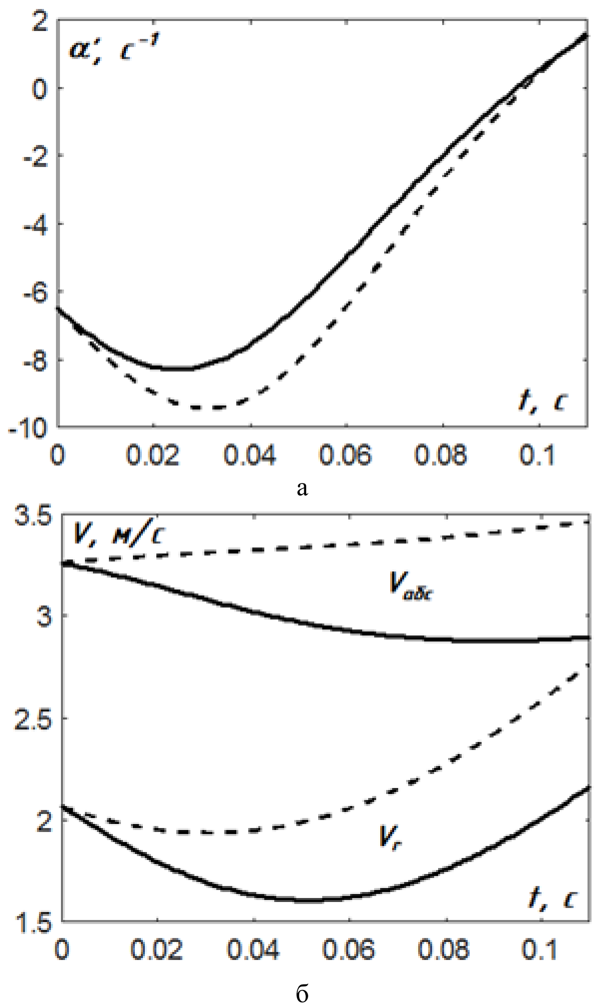


Рис. 5. Графіки зміни кінематичних характеристик частинки при *f=0,3* (суцільна) і *f=0* (штрихова) лінії:

а) кутової швидкості ковзання частинки;

б) відносної і абсолютної швидкостей

Fig. 5. Graphs of changes in the kinematic characteristics of the particle at *f=0,3* (solid) and *f=0* (dashed) lines:

a) the angular velocity of the particle;

b) relative and absolute velocities

Висновки

1. Побудовано математичну модель руху частинки ґрунту по гвинтовій робочій поверхні ґрунтообробного органу, який обертається навколо горизонтальної осі. Гвинтовою поверхнею є розгортний гелікоїд.

2. Рух леза гвинтової поверхні під кутом атаки по відношенню до напряму руху агрегату замінено подачею частинки на поверхню під таким же кутом. Це спростило процес складання диференціальних рівнянь руху.

3. Результати чисельного розв'язку рівнянь показали, що при збільшенні кута атаки висота підйому частинок зростає і збільшується площа роззосередження їх по робочій поверхні. Коефіцієнт тертя незначно впливає на траєкторію руху частинки.

Список літератури

1. Вікіпедія. Режим доступу: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B5_%D0%B7%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F.

2. *Тищенко О. Ф.* Зубчатые передачи часовых механизмов. Москва. Машгиз, 1963. 212 с.

3. *Литвин Ф. Л.* Некруглые зубчатые колеса. Москва. Машгиз, 1956. 312 с.

4. *Кресан Т. А., Пилипака С. Ф., Грищенко І. Ю., Бабка В. М., Кремець Я. С.* Траєкторії точок плоскої фігури, криволінійний контур якої котиться без ковзання по прямій лінії. Прикладні питання математичного моделювання. 2020. Т. 3. Вип. 1. С. 87-96. Режим доступу: http://212.111.209.17/index.php/aqmm/article/viewFile/518/pdf.

5. *Табацков В. П., Бойко А. П.* Визначення рівняння центроїд за заданим наперед законом руху. Вісник аграрної науки Причорномор'я. 2005. Вип. 4. С. 194-198. Режим доступу: http://base.dnsgb.com.ua/files/journal/Visnyk-agrarnoi-nauky-Prychornomorja/VANP2005/VANP2005-4(32)/Visnik_2005-4(32)_194-198.pdf.

6. *Кресан Т. А., Пилипака С. Ф., Грищенко І. Ю., Бабка В. М.* Окремий випадок конгруентних центроїд некруглих коліс, утворених дугами логарифмічної спіралі. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2020. Вип. 98. С. 84-93.

7. *Laczik B.* Design and manufacturing of non-circular gears by giventransfer function. 2020. http://www.hexagon.de/pdf/noncgear.pdf.

8. *Mundo D., Danneli G. A.*. Use of non-circular gears in pressing machine driving systems. 2020. http://www.wseas.us/e-library/conferences/udine2004/papers/483-172.pdf.

9. *Ковргін В. В., Маловик І. В.* Аналітичний опис центроїд некруглих зубчатих коліс. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2011. Т. 49. Вип. 4. С. 125-129.

10. *Легета Я. П.* Опис та побудова спряжених центроїд некруглих зубчастих коліс. Сучасні проблеми моделювання. 2014. Вип. 3. С. 87-92.

11. *Легета Я. П., Шоман О. В.* Геометричне моделювання центроїд некруглих зубчастих коліс за передавальною функцією. Геометричне моделювання та інформаційні технології. 2016. № 2. С. 59-63.

12. *Pylypaka S. F., Nesvidomin V. M., Klendii M. B., Rogovskii I. L., Kresan T. A., Trokhaniak V. I.* Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. 2019. Vol. 95. Issue 3. P. 108-118. doi 10.31489/2019M2/108-119.

13. *Kresan T., Pylypaka S., Ruzhylo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O.* External rolling of a polygon on a closed curvilinear profile. Acta Polytechnica. 2020. Vol. 60, no 4, P. 313-317. https://doi.org/10.14311/AP.2020.60.0313.

14. *Rynkovskaya M.* Introduction of Two Analytical Theories as Applied to Developable Surfaces. *Advanced Structured Materials*. 2020. Vol. 124. P. 309–320.

15. *Pylypaka S., Klendii M., Trokhaniak V., Kresan T., Hryshchenko I., Pastushenko A.* External rolling of a polygon on closed curvilinear profile. *Acta Polytechnica*. 2021. Vol. 61(1). P. 270–278.

References

1.Wikipedia. Access mode: https://uk.wikipedia. org/wiki/%D0%95%D0%B2%D0%BE%D0%BB%D1%8C%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%BD%D0%B5_%D0%B7%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BF%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8F.

2. *Tishchenko O. F.* (1963). Gears of watch mechanisms. Moscow. Mashgiz. 212.

3. *Litvin F. L.* (1956). Non-circular gears. Moscow: Mashgiz. 312.

4. *Kresan T. A., Pylypaka S. F., Grishchenko I. Yu., Babka V. M., Kremets Ya. S.* (2020). The trajectories of the points of a flat figure, the curvilinear contour of which rolls without sliding in a straight line. Applied questions of mathematical modeling. 3(1). 87-96. Access mode: http://212.111.209.17/index.php/aqmm/article/viewFile/518/pdf.

5. *Tabatskov V. P., Boyko A. P.* (2005). Determination of the centroid equation by a predetermined law of motion. Bulletin of Agrarian Science of the Black Sea Region. 4. 194-198. Access mode: http://base.dnsgb.com.ua/files/journal/Visnyk-agrarnoi-nauky-Prychornomorja/VANP2005/VANP2005-4(32)/Visnik_2005-4(32)_194-198.pdf.

6. *Kresan T. A., Pylypaka S. F., Grishchenko I. Yu., Babka V. M.* (2020). A special case of congruent centroids of non-circular wheels formed by arcs of a logarithmic spiral. Applied geometry and engineering graphics. 98. 84-93.

7. *Laczik B.* (2020). Design and manufacturing of non-circular gears by giventransfer function. Access mode: http://www.hexagon.de/pdf/noncgear.pdf.

8. *Mundo D., Danneli G. A.* (2020). Use of non-circular gears in pressing machine driving systems. Access mode: http://www.wseas.us/library/conferences/udine 2004/papers/483-172.pdf.

9. *Kovregin V. V., Malovik I. V.* (2011). Analytical description of the centroid of non-circular gears. Applied geometry and engineering graphics. 49(4). 125-129.

10. *Legeta Ya. P.* (2014). Description and construction of conjugate centroids of non-circular gears. Modern modeling problems. 3. 87-92.

11. *Legeta Ya. P., Shoman O. V.* (2016). Geometric modeling of the centroid of non-circular gears by transfer function. Geometric modeling and information technology. 2. 59-63.

12. *Pylypaka S. F., Nesvidomin V. M., Klendii M. B., Rogovskii I. L., Kresan T. A., Trokhaniak V. I.* (2019). Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. Bulletin of the Karaganda University – Mathematics. 95(3). 108-118. doi 10.31489/2019M2/108-119.

13. *Kresan T., Pylypaka S., Ruzhylo Z., Rogovskii I., Trokhaniak O.* (2020). External rolling of a polygon on a closed curvilinear profile. Acta Polytechnica. 60(4). 313-317. https://doi.org/10.14311/AP.2020.60. 0313.

14. *Rynkovskaya M.* (2020). Introduction of Two Analytical Theories as Applied to Developable Surfaces. *Advanced Structured Materials*. 124. 309–320.

15. *Pylypaka S., Klendii M., Trokhaniak V., Kresan T., Hryshchenko I., Pastushenko A.* (2021). External rolling of a polygon on closed curvilinear profile. Acta Polytechnica. 61(1). 270–278.

ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦЫ ПОЧВЫ ПО ПОВЕРХНОСТИ РАЗВЕРТЫВАЮЩЕГОСЯ ГЕЛИКОИДА С ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОСЬЮ ВРАЩЕНИЯ С ЗАДАННЫМ УГЛОМ АТАКИ

Т. А. Кресан

Аннотация. В статье рассмотрено взаимодействие винтового почвообрабатывающего органа с частицами почвы. Благодаря очень широкому применению в технике под термином "винтовая поверхность" обычно понимают поверхность винтового коноид или шнека. В работе рассмотрено поверхность развертывающегося геликоида, которая тоже является линейчатой, но существенно отличается от шнека. Отличие заключается не только в геометрической форме, но и в технологии изготовления. Если шнек изготавливают штамповкой или прокаткой полосы со значительными деформациями заготовки, то развертывающийся геликоид можно изготовить простым сгибанием при минимуме пластических деформаций. С точки зрения теории при нулевой толщине заготовки пластические деформации при ее сгибании вообще отсутствовали бы.

Рабочий орган для обработки почвы состоит из полосы развертывающейся винтовой поверхности, в которой внешняя кромка заострена и выполняет функцию лезвия, а внутренняя жестко крепится к решетчатому цилиндру. Разница между радиусом винтовой линии лезвия и цилиндра определяет глубину обработки. Решетчатый цилиндр предотвращает забивание межвиткового пространства и одновременно выполняет дополнительную функцию катка. Орган работает подобно дисковых орудий, то есть профиль обработанного поля имеет гребни и впадины. В момент контакта лезвия с поверхностью поля имеются углы, аналогичные углам атаки и крена для дисковых орудий. Конструктивные параметры, которыми обеспечиваются эти углы, можно рассчитать, исходя из аналитического описания поверхности.

Секция, то есть барабан с витком винтовой рабочей поверхности, располагается так, что его ось составляет определенный угол с направлением движения агрегата. Это приводит к появлению угла атаки и сил реакции, которые заставляют барабан с поверхностью вращаться. Исходя из скорости движения агрегата и учитывая угол атаки, можно найти угловую скорость вращения секции. Далее составляется дифференциальное уравнение движения частицы после вступления ее на поверхность, которая вращается. Дифференциальное уравнение расписывается в проекциях на три оси неподвижной системы координат. В него входят три неизвестные зависимости: две переменные, описывающие траекторию скольжения частицы по поверхности и сила реакции поверхности. Систему решена численными методами. Построено траектории относительного и абсолютного движения частицы и графики изменения ее относительной и абсолютной скоростей.

Ключевые слова: развертывающийся геликоид, почвообрабатывающий орган, угловая скорость, частица, скольжение, дифференциальные уравнения.

MOVEMENT OF SOIL PARTICLES ON SURFACE OF DEVELOPABLE HELICOID WITH HORIZONTAL AXIS OF ROTATION WITH GIVEN ANGLE OF ATTACK

T. A. Kresan

Abstract. The interaction of the screw tillage body with soil particles is considered in the article. Due to its very wide application in engineering, the term "helical surface" is usually understood to mean the surface of a helical conoid or auger. The surface of the deployable helicoid, which is also linear, but significantly different from the auger, is considered in the work. The difference is not only in the geometric shape, but also in the manufacturing technology. If the auger is made by stamping or rolling a strip with significant deformations of the workpiece, then the deployable helicoid can be made by simple bending with a minimum of plastic deformation. From the point of view of the theory at zero thickness of preparation plastic deformations at its bending in general would be absent.

The working body for tillage consists of a strip of developable screw surface, in which the outer edge is pointed and acts as a blade, and the inner is rigidly attached to the lattice cylinder. The difference between the radius of the screw line of the blade and the cylinder determines the depth of processing. The lattice cylinder prevents clogging of interturn space and at the same time carries out additional function of a roller. The body works like a disk tool that is the profile of the treated field has ridges and depressions. At the time of contact of the blade with the surface of the field there are angles similar to the angles of attack and roll for disk guns. The design parameters that provide these angles can be calculated based on the analytical description of the surface.

The section, that is the drum with the turn of the screw working surface, is located so that its axis is a certain angle with the direction of movement of the unit. This cause the angle of attack and reaction forces that cause the drum to rotate with the surface. Based on the speed of the unit and taking into account the angle of attack, we can find the angular velocity of the section. Next, a differential equation of motion of the particle is formed after its entry on the rotating surface. The differential equation is painted in projections on three axes of a fixed coordinate system. It includes three unknown dependencies: two variables that describe the trajectory of the particle sliding on the surface and the reaction force of the surface. The system is solved by numerical methods. The trajectories of relative and absolute motion of a particle and graphs of changes in its relative and absolute velocities are constructed.

Key words: developable helicoid, tillage body, angular velocity, particle, slip, differential equations.

Т. А. Кресан ORCID 0000-0002-8280-9502.