Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2021, Vol. 12, No 2, 113-121
ISSN 2663-1334 (print), ISSN 2663-1342 (online), http://journals.nubip.edu.ua/index.php/Tekhnica

http://dx.doi.org/10.31548/machenergy2021.02.113

УДК 004.421:531.1

АНАЛІТИЧНІ ДОСЛІДЖЕННЯ КІНЕМАТИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

О. М. Черниш, М. Г. Березовий, В. В. Яременко, М. М. Круглій

Національний університет біоресурсів і природокористування України, Україна.

Стаття з спеціальності: 131 – прикладна механіка.

Кореспонденція авторів: mechanics_chair@nubip.edu.ua.

Історія статті: отримано – січень 2021, акцептовано – червень 2021, опубліковано – 30 липня 2021 року.
Бібл. 17, рис. 10, табл. 0.

Анотація. Розглянуто аналітичні дослідження кінематичних параметрів плоских важільних механізмів на прикладі кінематичного розрахунку аксіального кривошипно-повзунного механізму. Застосовано алгоритм у програмному середовищі Mathcad, що суттєво спрощує і прискорює процес обрахунку і дає можливість використання отриманих даних для подальшого аналізу і синтезу механізмів.

Ключові слова: плоскі важільні механізми, кінематичні параметри, кінематичний аналіз, аналітичні розрахунки, програмне середовище.

Постановка проблеми

Комп’ютерні технології і програмні засоби є важливим елементом інженерної діяльності сучасного фахівця та пов’язані з процесами моделювання і проектування, потребують виконання значної кількості аналітичних обчислень. Інженерні розрахунки лежать в основі проектування виробів. Вони є необхідним елементом кожного етапу процесу проектування. Перевагою застосування прикладних програм при розв’язанні задач кінематики і динаміки механізмів є швидкість і зручність розв’язання більш складних завдань, наближених до реальних умов. При цьому математичні трудноші, які пов’язані із традиційними методами аналітичних розрахунків, можуть бути суттєво спрощені при використанні систем комп’ютерного математичного аналізу.

Застосування прикладних програм з метою аналітичного обчислення і графічного відображення інформації вимагає глибоких знань і практичних навичок у сфері їх створення і використання. Тому питання розробки прикладних методів і проведення інженерних розрахунків у певному програмному середовищі відповідно до конкретних поставлених умов на сьогодні є актуальні.

Аналіз останніх досліджень

У питанні проведення прикладних інженерних розрахунків можна відмітити використання таких програмних систем як Mathcad, MATLAB, Maple, Mathematica, а також систем програмування високого рівня (Turbo Pascal, C++, VC++, Visual Basic тощо).

В роботах [1-14] розглянуто питання побудови розрахункових моделей механічних систем у відповідних програмних продуктах, алгоритми проведення деяких аналітичних розрахунків та приклади комп’ютерного моделювання.

Мета досліджень

Провести аналітичні дослідження кінематичних параметрів кривошипно-повзунного механізму із застосуванням програмного пакету Mathcad. Здійснити оцінку методики використання вбудованих в Mathcad функцій математичного розв’язку векторних рівнянь, проаналізувати результати обчислень методом замкнених векторних контурів із застосуванням функцій аналогів швидкостей і прискорень.

Результати досліджень

Для аналітичного визначення кінематичних параметрів механізмів застосовано кінематичні формули, що можуть бути отримані для ланок механізмів, як механічної системи твердих тіл [15-17].

З цією метою розглянемо кінематичні параметри аксіального (незміщеного) кривошипно-повзунного механізму, який обертається із кутовою швидкістю ω_1 (рис. 1).

Вхідними параметрами є кут повороту φ_1 кривошипа *1* і лінійні розміри ланок l_1 і l_2.

Важливим кінематичними характеристиками даного механізму є закони зміни переміщення, швидкості і прискорення точки B повзуна *3*, які необхідно визначити.

Систему координатних осей O, x, y розташовано так, щоб положення точки B можна було визначати за координатою s_B, яка відраховується від крайнього правого положення повзуна *3* (точки B_0) і знаходиться від осі обертання кривошипа O на відстані $x_B =$

$(OA_0 + A_0B_0) - BB_0 = (l_1 + l_2) - s_B$ (рис. 1).

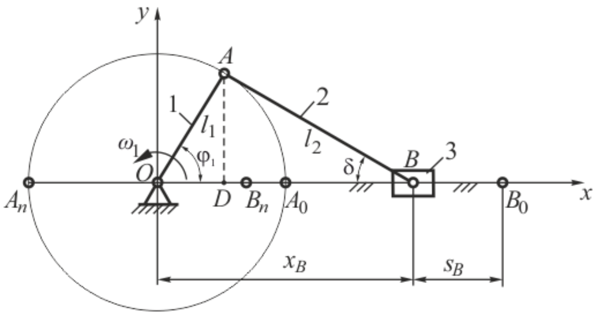

Рис. 1. Кінематична схема аксіального кривошипно-повзунного механізму.

Fig. 1. The kinematic scheme of the axial crank-slider mechanism.

Таким чином

$$s_B = (l_1 + l_2) - x_B. \quad (1)$$

Визначимо аналітичний закон зміни s_B положення точки B повзуна *3* при його переміщенні його від крайнього правого положення B_0 до крайнього лівого положення B_n і навпаки. При цьому значення положення точки B повзуна буде змінюватись у межах від 0 до $(l_1 + l_2)$ і знову до 0.

Опустимо перпендикуляр із точки A на вісь x і запишемо довжину x_B як

$$x_B = l_{OD} + l_{DB},$$

Переміщення s_B визначається виразом:

$$s_B = (l_1 + l_2) - (l_{OD} + l_{DB}) = \\ = (l_1 + l_2) - l_1 \cos\varphi_1 - l_2 \cos\delta,$$

де φ_1 – кут повороту кривошипа *1*; δ – кут між миттєвим напрямом лінії AB і віссю x (кут нахилу шатуна).

Кут нахилу шатуна можна знайти із ΔOAB:

$$\sin\delta = \frac{l_1 \sin\varphi_1}{l_2},$$

або

$$\sin\delta = \frac{1}{k}\sin\varphi_1, \quad (2)$$

де $k = \frac{l_2}{l_1}$ – коефіцієнт співвідношення між довжиною шатуна і кривошипа (для стаціонарних поршневих двигунів $k \approx 5$, в автомобільних двигунах $k \approx 4$).

Чим менше величина k, тим менші габарити і вага двигуна при однаковому значенні довжини кривошипа.

З іншого боку, із зменшенням коефіцієнта k збільшується кут нахилу шатуна δ і збільшується тиск на стінки поршня циліндра. Тому зменшення величини k веде до більшого зносу двигуна і зниження його коефіцієнта корисної дії.

Кут нахилу шатуна δ у будь якому положенні механізму можна визначити як

$$\delta = \arcsin\frac{1}{k}\sin\varphi_1. \quad (3)$$

Представивши l_2 у вигляді

$$l_2 = k \cdot l_1,$$

з (1) отримаємо

$$s_B = l_1(k + 1 - \cos\varphi_1 - k\cos\delta). \quad (4)$$

Для визначення швидкості υ_B точки B повзуна продиференціюємо попередній вираз за часом:

$$\upsilon_B = \frac{ds}{dt} = l_1\left(\omega_1 \sin\varphi_1 - k\sin\delta\frac{d\delta}{dt}\right). \quad (5)$$

Для визначення кутової швидкості ω_2 шатуна *2* продиференціюємо за часом ліву і праву частини виразу (2):

$$\cos\delta \cdot \frac{d\delta}{dt} = \frac{1}{k}\cos\varphi_1 \cdot \frac{d\varphi_1}{dt},$$

або

$$\cos\delta \cdot \frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_1}{k}\cos\varphi_1,$$

звідки

$$\omega_2 = \frac{d\delta}{dt} = \frac{\omega_1 \cos\varphi_1}{k\cos\delta}, \quad (6)$$

Підставляючи цей вираз у (4), отримаємо

$$\upsilon_B = l_1\omega_1\left(\sin\varphi_1 + \sin\delta\frac{\cos\varphi_1}{\cos\delta}\right) = \\ = l_1\omega_1\left(\frac{\sin(\varphi_1+\delta)}{\cos\delta}\right). \quad (7)$$

Для визначення прискорення a_B точки B повзуна, запишемо попередній вираз у вигляді:

$$\upsilon_B = l_1\omega_1(\sin\varphi_1 + tg\delta\cos\varphi_1).$$

При умові, що $\omega_1 = const$, після диференціювання за часом знаходимо:

$$a_B = \frac{d\upsilon}{dt} = l_1\omega_1 \times \\ \times\left(\cos\varphi_1 \cdot \omega_1 - tg\delta\sin\varphi_1 \cdot \omega_1 + \frac{\cos\varphi_1}{\cos^2\delta} \cdot \frac{d\delta}{dt}\right),$$

або із врахуванням (5), маємо:

$$a_B = l_1 \cdot \omega_1^2 \frac{1}{\cos\delta}\left(\cos(\varphi_1 + \delta) + \frac{\cos^2\varphi_1}{k\cos^2\delta}\right). \quad (8)$$

Треба зазначити, що при підрахунках переміщень, швидкостей і прискорень точки B повзуна за формулами (4), (7) і (8) крім кута повороту кривошипа φ_1 необхідно також знайти кут нахилу шатуна δ згідно із виразом (3).

Але величина δ теж залежить від величини φ_1, а тому в кінцевому варіанті переміщення, швидкості і прискорення залежать тільки від кута повороту кривошипа.

У багатьох випадках положення, швидкість і прискорення точки B повзуна зручно визначати за наближеними формулами.

Для отримання таких наближених формул знайдемо із (2):

$$\cos\delta = \sqrt{1 - \sin^2\delta} = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\varphi_1}. \quad (9)$$

Якщо підставити даний вираз у (4), отримаємо:

$$s_B = l_1\left(k + 1 - \cos\varphi_1 - k\sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\varphi_1}\right). \quad (10)$$

Вираз кореня (9), що входить в (10), можна розкласти в ряд за формулою бінома Ньютона при $n = \frac{1}{2}$. В результаті будемо мати:

$$\cos\delta = \left(1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\varphi_1\right)^{\frac{1}{2}} = \\ = 1 - \frac{1}{2k^2}\sin^2\varphi_1 - \frac{1}{8k^4}\sin^4\varphi_1 - \frac{1}{16k^2}\sin^6\varphi_1 - \ldots$$

Із врахуванням того, що

$sin^2\,\varphi_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos\,2\,\varphi_1;$
$sin^4\,\varphi_1 = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}cos\,2\,\varphi_1 + \frac{1}{8}cos\,4\,\varphi_1;$
$sin^6\,\varphi_1 = \frac{5}{16} - \frac{15}{32}cos\,2\,\varphi_1 + \frac{3}{16}cos\,4\,\varphi_1 - \frac{1}{32}cos\,6\,\varphi_1;$
…………………………………….

остаточно отримаємо:

$$cos\,\delta = \left(1 - \frac{1}{k^2}sin^2\,\varphi_1\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= 1 - \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{4k^2}cos\,2\,\varphi_1 - \frac{3}{64k^4} + \frac{1}{16k^4}cos\,2\,\varphi_1 -$$
$$- \frac{1}{64k^4}cos\,4\,\varphi_1 - \frac{5}{256k^6} + \frac{15}{512k^6}cos\,2\,\varphi_1 -$$
$$- \frac{3}{256k^6}cos\,4\,\varphi_1 + \frac{1}{512k^6}cos\,6\,\varphi_1 - \ldots =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{4k^2} - \frac{3}{64k^4} - \frac{5}{256k^6} - \ldots\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{16k^4} + \frac{15}{512k^6} + \ldots\right)cos\,2\,\varphi_1 -$$
$$- \left(\frac{1}{64k^4} + \frac{3}{256k^6} + \ldots\right)cos\,4\,\varphi_1 +$$
$$+ \left(\frac{1}{512k^6} + \ldots\right)cos\,6\,\varphi_1 - \ldots.$$

Найдене наближене значення кореня (9) підставимо у формулу визначення переміщення точки *B* повзуна (10):

$$s_B = l_1\left[\left(1 + \frac{1}{4k} + \frac{3}{64k^3} + \frac{5}{256k^5} + \ldots\right) - cos\,\varphi_1 -\right.$$
$$- \left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{16k^3} + \frac{15}{512k^5} + \ldots\right)cos\,2\,\varphi_1 +$$
$$+ \left(\frac{1}{64k^3} + \frac{3}{256k^5} + \ldots\right)cos\,4\,\varphi_1 -$$
$$\left. - \left(\frac{1}{512k^5} + \ldots\right)cos\,6\,\varphi_1 \ldots\right].$$

Таким чином, переміщення координати точки *B* повзуна може бути представлена у вигляді нескінченного ряду:

$$s_B = l_1(A_0 + A_1\,cos\,\varphi_1 + A_2\,cos\,2\,\varphi_1 +$$
$$+ A_4\,cos\,4\,\varphi_1 + A_6\,cos\,6\,\varphi_1 + \ldots), \qquad (11)$$

в якому кожен член (окрім члена $A_1 = -1$) також являє собою нескінчений ряд:

$$A_0 = 1 + \frac{1}{4k} + \frac{3}{64k^3} + \frac{5}{256k^5} + \cdots;$$
$$A_2 = -\left(\frac{1}{4k} + \frac{1}{16k^3} + \frac{15}{512k^5} + \cdots\right);$$
$$A_4 = \frac{1}{64k^3} + \frac{3}{256k^5} + \cdots; \qquad (12)$$
$$A_6 = -\left(\frac{1}{512k^5} + \ldots\right);$$

Як видно із останніх виразів, коефіцієнти із ряду *A* швидко зменшуються. Наприклад, якщо у виразі (11) відкинути член $A_6\,cos\,6\,\varphi_1$ і всі інші, що йдуть за ним, то точність розрахунків буде до п'ятого знаку після коми.

Отже практичного значення набуває наближена формула із трьома першими членами, яка надає достатню точність наближених розрахунків переміщення:

$$s_B = l_1(A_0 + A_1\,cos\,\varphi_1 + A_2\,cos\,2\,\varphi_1). \qquad (13)$$

При цьому і самі коефіцієнти A_0 і A_2 також розраховуються за старшими членами відповідних рядів:

$$A_0 = 1 + \frac{1}{4k};$$
$$A_2 = -\frac{1}{4k}.$$

Тоді із врахуванням того, що $A_1 = -1$, остаточно будемо мати наступну формулу наближеного розрахунку переміщення координати точки *B* повзуна:

$$s_B = l_1\left(1 + \frac{1}{4k} - cos\,\varphi_1 - \frac{1}{4k}cos\,2\,\varphi_1\right). \qquad (14)$$

Диференціюючи за часом вираз (14) можна знайти формулу наближеного розрахунку швидкості точки *B* повзуна:

$$\upsilon_B = \frac{ds}{dt} = l_1\omega_1\left(sin\,\varphi_1 + \frac{1}{2k}sin\,2\,\varphi_1\right), \qquad (15)$$

Аналогічно диференціюючи за часом вираз (15) можна знайти формулу наближеного розрахунку прискорення точки *B* повзуна:

$$a_B = \frac{d\upsilon}{dt} = l_1\omega_1^2\left(cos\,\varphi_1 + \frac{1}{k}cos\,2\,\varphi_1\right). \qquad (16)$$

Треба зауважити, що точність наближених формул (15) і (16) внаслідок диференціювання значно менша точності формули (14). Знаки плюс і мінус тут вказують на напрямок швидкості і прискорення.

Отримані формули наближеного розрахунку можна застосовувати, наприклад, при знаходженні максимальної швидкості повзуна. У цьому випадку похідна швидкості (тобто величина прискорення) дорівнює нулю і тоді із (16) отримаємо

$$cos\,\varphi_1 + \frac{1}{k}cos\,2\,\varphi_1 = 0.$$

або

$$\frac{2}{k}cos^2\,\varphi_1 + cos\,\varphi_1 - \frac{1}{k} = 0.$$

Розв'язком цього рівняння є значення кута повороту кривошипа φ_1:

$$cos\,\varphi_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 8}}{4},$$

де перед коренем вибраний тільки додатній знак як дійсно можливий.

Підставивши отримане значення кута φ_1 у вираз (15), можна знайти два максимальних значення швидкості υ_B, які будуть відрізнятись тільки за знаком. Одне максимальне значення швидкості виникає на ділянці $\varphi_1 \in [0, \pi]$, друге – на ділянці $\varphi_1 \in [\pi, 2\pi]$.

При цьому швидкість буде максимальною у тому положенні механізму, коли кривошип і шатун будуть мати між собою прямий кут

$$tg\varphi_1 = \frac{l_2}{l_1} = k.$$

Далі для кінематичного дослідження застосуємо метод замкнених векторних контурів, представивши кінематичну схему механізму у вигляді одного замкненого векторного контуру, який утворюють його ланки (рис. 2).

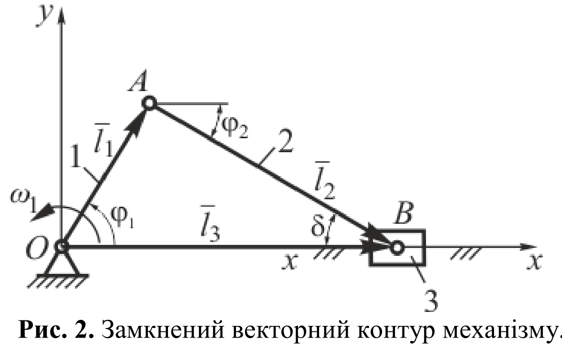

Рис. 2. Замкнений векторний контур механізму.
Fig. 2. The closed vector contour of the mechanism.

Визначимо закони переміщення, швидкості та прискорення шатуна *2* та повзуна *3* (його точки *B*).

Представимо схему механізму у вигляді замкненого векторного контуру *ОАВО*. У цей контур входить структурна група Ассура другого класу 2-го виду: II кл. 2в. (*2*, *3*).

Умова замкненості векторів $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$, $\bar{l}_3$ цього контуру буде наступною:

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_3, \tag{17}$$

Виберемо прямокутну систему координат *xOy*, за початок відліку якої приймемо центр шарніра *O*, а вісь *Ox* спрямуємо вздовж напрямної повзунів. Спроектуємо векторне рівняння (17) на осі *x* та *y* і отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 = l_3,\\ l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

де l_1, l_2 – відповідно довжини ланок *1* і *2*; l_3 – відстань між центром шарніра *O* кривошипа та центром шарніра *B* повзуна; φ_1 – узагальнена координата механізму (кут повороту кривошипа *1*); φ_2 – кут повороту ланки *2*.

В системі тригонометричних рівнянь (18) знаки при складових визначаються знаками тригонометричних функцій. За додатний напрямок відліку кутів φ_1 і φ_2 приймемо напрямок проти руху годинникової стрілки (напрямок обертання кривошипа).

Так, при куті $\varphi_1 = 40°$ кут $\varphi_2 = -20°$ і у цьому випадку друге рівняння системи (18) буде мати вигляд:

$$l_1 \sin 4\,0° + l_2 \sin(-20°) = 0,$$

$$l_1 \sin 4\,0° - l_2 \sin 2\,0° = 0.$$

Для того, щоб знайти зв'язок між лінійними і кутовими координатами, скористуємось геометричними співвідношеннями в кінематичній схемі даного механізму.

Із *Δ*OAB маємо:

$$l_2 \sin\delta = l_1 \sin\varphi_1,$$

$$\delta = \arcsin\left(\frac{l_1}{l_2}\sin\varphi_1\right), \tag{19}$$

Розв’язуючи рівняння (18) відносно невідомих φ_2 і l_3, отримаємо аналітичні залежності положень ланок *2, 3* від узагальненої координати φ_1, тобто функції положень ланок даного механізму.

Для контуру даного механізму $\varphi_2 = \delta$. В результаті із врахуванням напрямку відліку кутів із другого рівняння системи (18) маємо:

$$\varphi_2 = \arcsin\left(-\frac{l_1}{l_2}\sin\varphi_1\right), \tag{20}$$

а з першого рівняння (18):

$$l_3 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2.$$

Враховуючи, що

$$\cos\varphi_2 = \sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi_1},$$

Закон зміни положення точки *B* повзуна *3* відносно центру шарніра *O* кривошипа може бути представлений у вигляді

$$s_B = l_3 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2\sqrt{1 - \frac{l_1^2}{l_2^2}\sin^2\varphi_1}. \tag{21}$$

Визначення аналітичних залежностей швидкостей ланок і окремих точок механізму зводиться до диференціювання системи тригонометричних рівнянь (18), як складених функцій, за часом *t*:

$$\left.\begin{aligned} -l_1 \sin\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} - l_2 \sin\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{dl_3}{dt},\\ l_1 \cos\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} + l_2 \cos\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Із врахуванням того, що

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2; \quad \frac{dl_3}{dt} = \upsilon_3 = \upsilon_B,$$

отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} -l_1\omega_1 \sin\varphi_1 - l_2\omega_2 \cdot \sin\varphi_2 = \upsilon_B,\\ l_1\omega_1 \cos\varphi_1 + l_2\omega_2 \cos\varphi_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Сумісне розв’язання двох рівнянь системи (22) дозволяють визначити кутову швидкість ω_2 шатуна *2* і лінійну швидкість υ_B точки *B* повзуна *3*.

Із другого рівняння системи (22) визначаємо кутову швидкість шатуна *2*:

$$\omega_2 = -\frac{l_1\omega_1 \cos\varphi_1}{l_2 \cos\varphi_2}, \tag{23}$$

а із першого рівняння системи (22):

$$\upsilon_B = -(l_1\omega_1 \sin\varphi_1 + l_2\omega_2 \sin\varphi_2). \tag{24}$$

Підставимо у (24) вираз (23). Після перетворень остаточно лінійна швидкість точки *B* повзуна 3 визначиться як:

$$\upsilon_B = \frac{l_1\omega_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\varphi_2}. \tag{25}$$

У випадку, коли закон руху початкової ланки невідомий, визначають аналоги швидкостей та прискорень, диференціюючи систему рівнянь (18) за узагальненою координатою.

Для визначення прискорень продиференціюємо за часом *t* систему рівнянь (22). В результаті отримаємо:

$$\left.\begin{aligned} -l_1\omega_1^2 \cos\varphi_1 - l_2\omega_2^2 \cos\varphi_2 - l_2\varepsilon_2 \sin\varphi_2 = a_B,\\ -l_1\omega_1^2 \sin\varphi_1 - l_2\omega_2^2 \sin\varphi_2 + l_2\varepsilon_2 \cos\varphi_2 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Сумісне розв’язання системи рівнянь (33) дають формули визначення кутового прискорення ε_2 шатуна *2* і лінійного прискорення a_B точки *B* повзуна *3*.

Із другого рівняння системи (26) визначаємо:

$$\varepsilon_2 = \frac{l_1\omega_1^2 \sin\varphi_1 + l_2\omega_2^2 \sin\varphi_2}{l_2 \cos\varphi_2}, \tag{27}$$

а із першого рівняння системи (34):

$$a_B = -(\omega_1^2 l_1 \cos\varphi_1 + \omega_2^2 l_2 \cos\varphi_2 + \varepsilon_2 l_2 \sin\varphi_2), \tag{28}$$

Підставивши значення ε_2 із (27) в рівняння (28), після перетворень остаточно визначаємо лінійне прискорення точки *B* повзуна *3*:

$$a_B = -\frac{l_1\omega_1^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}{\cos\varphi_2}. \tag{29}$$

Координати будь-якої іншої характерної точки механізму, її швидкість та прискорення визначають, використовуючи рівняння проекцій даної точки на осі координат.

Наприклад, для точки центра мас S_2 шатуна *2* можна записати:

$$\left.\begin{aligned} x_{S_2} = l_1 \sin\varphi_1 + l_{AS_2} \sin\varphi_2\,,\\ y_{S_2} = l_1 \cos\varphi_1 + l_{AS_2} \cos\varphi_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Модулі швидкостей та прискорень цієї точки можна знайти за відомими формулами:

$$\upsilon_{S_2} = \sqrt{\dot{x}_{S_2}^2 + \dot{y}_{S_2}^2}, \quad a_{S_2} = \sqrt{\ddot{x}_{S_2}^2 + \ddot{y}_{S_2}^2}. \tag{31}$$

Аналітичне обчислення швидкостей і прискорень кривошипно-повзунного механізму при використанні базових лінійних рівнянь системи (18) можна проводити також за допомогою застосування аналогів швидкостей і прискорень.

Для визначення аналогів кутової швидкості шатуна *2* і лінійної швидкості повзуна *3*, продиференціюємо лінійні рівняння системи (18) за узагальненою координатою φ_1:

$$\left.\begin{aligned} -l_1 \sin\varphi_1 - l_2 \sin\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = \frac{dl_3}{d\varphi_1}, \\ l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = 0, \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} -l_1 \sin\varphi_1 - \varphi_2' \sin\varphi_2 \, l_2 = s_3', \\ l_1 \cos\varphi_1 + \varphi_2' \cos\varphi_2 \, l_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

де $\varphi_2' = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$ – аналог кутові швидкості шатуна *2*; $s_3' = \frac{dl_3}{d\varphi_1}$ – аналог лінійної швидкості повзуна *3*.

Із другого рівняння системи (32) знаходимо:

$$\varphi_2' = -\frac{l_1 \cos\varphi_1}{l_2 \cos\varphi_2} \tag{33}$$

Підставивши вираз (33) в перше рівняння системи (32), отримаємо:

$$\begin{aligned} s_3' &= -l_1 \sin\varphi_1 - \varphi_2' l_2 \sin\varphi_2 = \\ &= -l_1 \sin\varphi_1 + \frac{l_1 \cos\varphi_1 \cdot l_2 \sin\varphi_2}{l_2 \cos\varphi_2} = \\ &= \frac{-l_1 \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + l_1 \cos\varphi_1 \sin\varphi_2}{\cos\varphi_2} = \\ &= \frac{l_1(\sin\varphi_2 \cos\varphi_1 - \cos\varphi_2 \sin\varphi_1)}{\cos\varphi_2}. \end{aligned} \tag{34}$$

Остаточно після тригонометричних перетворень аналог лінійної швидкості повзуна *3* визначається як:

$$s_3' = \frac{l_1(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\varphi_2}. \tag{35}$$

В результаті кутову швидкість ω_2 шатуна *2* і лінійну швидкість υ_B точки *B* повзуна *3* легко знайти через їх аналоги:

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot \varphi_2' = -\omega_1 \cdot \frac{l_1 \cos\varphi_1}{l_2 \cos\varphi_2}, \tag{36}$$

$$\upsilon_B = \omega_1 \cdot s_3' = \omega_1 \cdot \frac{l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos\varphi_2}, \tag{37}$$

де ω_1 – кутова швидкість ведучої ланки (кривошипа *1*).

Як бачимо, отримані вирази (36) і (37) ідентичні відповідним виразам (23) і (25).

Аналогічно для визначення аналогів кутового прискорення шатуна *2* і лінійного прискорення повзуна *3*, продиференціюємо за узагальненою координатою φ_1 лінійні рівняння системи (22):

$$\left.\begin{aligned} -l_1 \cos\varphi_1 - l_2 \left(\frac{d\varphi_2'}{d\varphi_1} \sin\varphi_2 + \varphi_2' \cos\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right) = \frac{ds_3'}{d\varphi_1}, \\ -l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \left(\frac{d\varphi_2'}{d\varphi_1} \cos\varphi_2 - \varphi_2' \sin\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\right) = 0, \end{aligned}\right\}$$

або

$$\left.\begin{aligned} -l_1 \cos\varphi_1 - l_2 \varphi_2'' \sin\varphi_2 - l_2 (\varphi_2')^2 \cos\varphi_2 = s_3'', \\ -l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \varphi_2'' \cos\varphi_2 - l_2 (\varphi_2')^2 \sin\varphi_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

де $\varphi_2' = \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$, $\varphi_2'' = \frac{d\varphi_2'}{d\varphi_1} = \frac{d^2\varphi_2}{d\varphi_1^2}$ – відповідно аналоги кутові швидкості і прискорення шатуна *2*; $s_3'' = \frac{ds_3'}{d\varphi_1} = \frac{d^2 l_3}{d\varphi_1^2}$ – аналог лінійного прискорення повзуна *3*.

Із другого рівняння системи (38) знаходимо:

$$\varphi_2'' = \frac{l_2 (\varphi_2')^2 \sin\varphi_2 + l_1 \sin\varphi_1}{l_2 \cos\varphi_2}. \tag{39}$$

Із першого рівняння системи (38), підставивши вираз (39), отримаємо вираз для аналога лінійного прискорення повзуна *3*:

$$\begin{aligned} s_3'' &= -l_1 \cos\varphi_1 - l_2 (\varphi_2')^2 \cos\varphi_2 - l_2 \varphi_2'' \sin\varphi_2 = \\ &= -l_1 \cos\varphi_1 - l_2 (\varphi_2')^2 \cos\varphi_2 - \\ &-l_2 \sin\varphi_2 \frac{l_2 (\varphi_2')^2 \sin\varphi_2 + l_1 \sin\varphi}{l_2 \cos\varphi_2}. \end{aligned} \tag{40}$$

Рис. 3. Вхідні параметри для розрахунку кінематичних параметрів аксіального кривошипно-повзунного механізму.

Fig. 3. Input parameters for calculating the kinematic parameters of the axial crank-slider mechanism.

Результати проведених програмних розрахунків наведено на рис. 4 – 7.

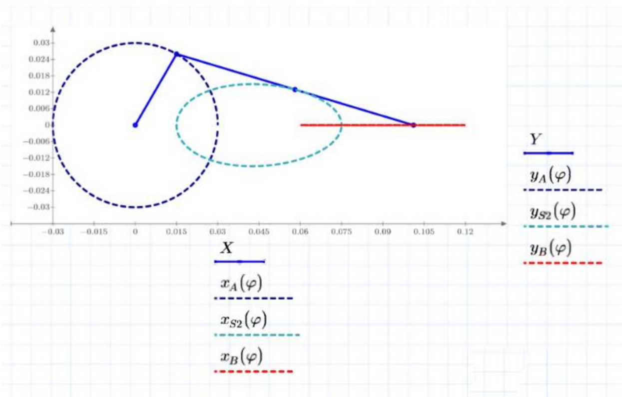

Рис. 4. План положення механізму і траєкторії руху характерних його точок A, B і A_{S2} (кут повороту кривошипа $\varphi_1 = 60^\circ$).

Fig. 4. The plan of the position of the mechanism and the trajectories of its key points A, B and A_{S2} (the crank angle $\varphi_1 = 60^\circ$).

В результаті кутове прискорення ε_2 шатуна *2* і лінійну швидкість a_B точки *B* повзуна *3* можна знайти через їх аналоги наступним чином:

$$\varepsilon_2 = \omega_1^2 \cdot \varphi_2'' + \varepsilon_1 \varphi_2', \quad (41)$$

$$a_B = \omega_1^2 \cdot s_3'' + \varepsilon_1 s_3', \quad (42)$$

де ω_1, ε_1 – кутова швидкість і кутове прискорення ведучої ланки (кривошипа *1*).

Вхідні параметри для побудови у програмному середовищі Mathcad кінематичних діаграм аксіального кривошипно-повзунного механізму із поточним положенням його кривошипа 60º показані на рис. 3.

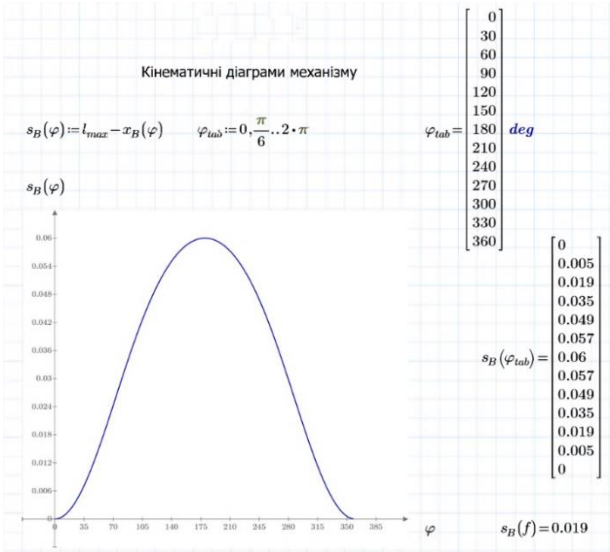

Рис. 5. Функція і графік лінійного переміщення s_B вихідної ланки.

Fig. 5. The function and graph of linear movement s_B of the output link.

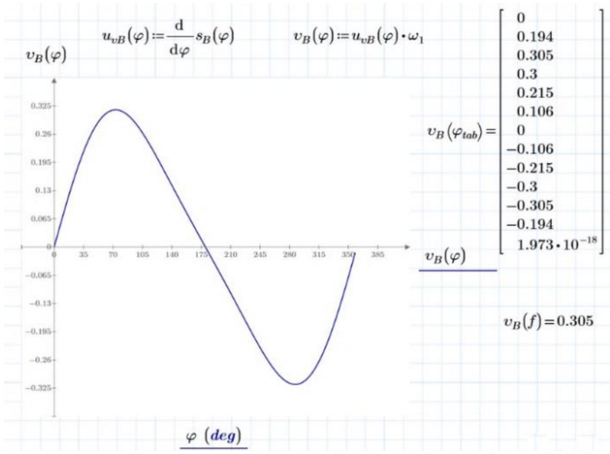

Рис. 6. Функція і графік лінійної швидкості υ_B вихідної ланки.

Fig. 6. The function and graph of the linear velocity υ_B of the output link.

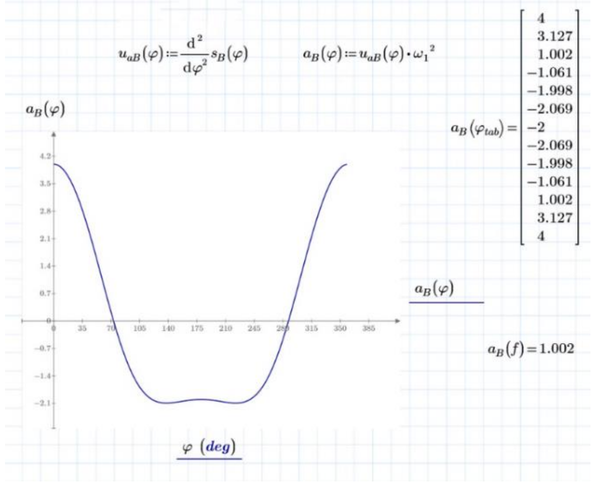

Рис. 7. Функція і графік лінійного прискорення a_B вихідної ланки.

Fig. 7. The function and graph of the linear acceleration a_B of the output link.

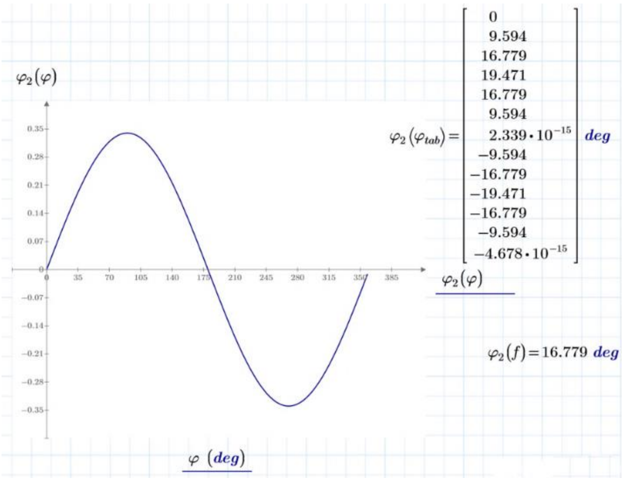

Рис. 8. Графік кутового переміщення шатуна.

Fig. 8. The graph of the angular movement of the connecting rod.

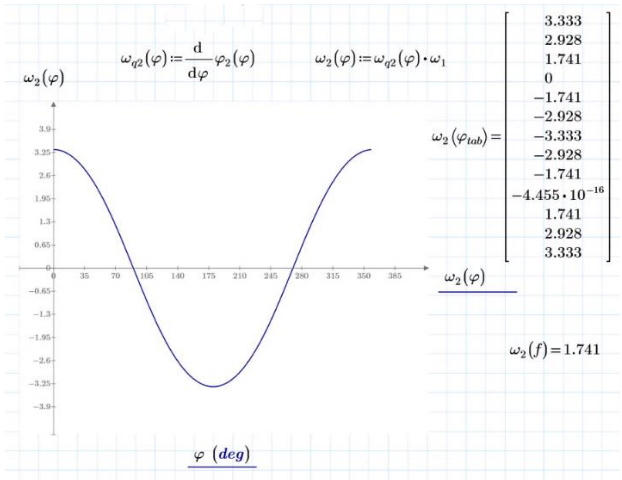

Рис. 9. Функція і графік кутової швидкості ω_2 шатуна.

Fig. 9. The function and graph of the angular velocity ω_2 of the connecting rod.

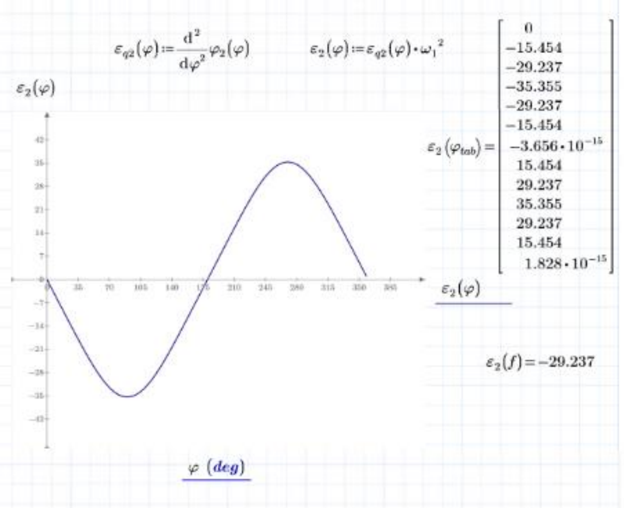

Рис. 10. Функція і графік кутового прискорення ε_2 шатуна.

Fig. 10. The function and graph of the angular acceleration ε_2 of the connecting rod.

Згідно кінематичних досліджень, що проведені, закон руху вихідної ланки – повзуна є гармонійною функцією, як і закон зміни швидкості його руху. Швидкість повзуна має максимальні значення у середині півперіодів його руху за один цикл, тобто при відповідних кутах повороту кривошипа від початкового положення і мінімальні значення у початку і кінці півперіодів руху одного циклу. Прискорення повзуна має максимальні значення в момент максимальної зміни його швидкості.

Висновки

1. Проведено аналітичні дослідження вхідних кінематичних параметрів кривошипно-повзунного механізму за допомогою математичного апарату розв'язання системи векторних рівнянь на базі програмного пакету Mathcad. Наведений алгоритм спрощує і прискорює процес обрахунків та дає можливість застосувати отримані данні для подальшого аналізу механізму аналітичним шляхом.

2. Швидкість вихідної ланки кривошипно-повзунного механізму має максимальні значення у середині півперіодів його руху (кути повороту кривошипа від початкового положення: $\frac{\pi}{2}$ і $\frac{3\pi}{4}$) і мінімальні значення на початку і в кінці півперіодів руху (кути повороту від початкового положення: $0, \pi, 2\pi$). Прискорення вихідної ланки має максимальні значення при кутах повороту кривошипа: $0, \pi, 2\pi$.

3. Точність аналітичних обрахунків, що проведені, дозволяє отримати вхідні дані для аналітичного розрахунку динамічних параметрів з метою проведення синтезу механічних пристроїв, що є подібними за структурою.

4. Можливість швидкої аналітичної обробки значної кількості вхідної інформації дозволяє здійснювати безперервний контроль технічного стану механізмів та визначати раціональні режими їх роботи.

Список літератури

1. *Доронін Ф. А., Доєв В. С.* Дослідження руху плоского механізму за допомогою пакету Mathcad. Теорія механізмів і машин. 2011. № 1. Т. 9. С. 77-87.

2. *Петров Г. Н.* Комп'ютерне моделювання механічних систем в середовищі Model Vision. Теорія механізмів і машин. 2004. № 1. Т. 9. С. 75–79.

3. *Третьяков В. М.* Використання програми Mathcad при визначенні швидкостей і прискорень важільних механізмів. Теорія механізмів і машин. 2009. № 2. Т. 7. С. 40-48.

4. *Krasniqi Fehmi, Shala Ahmet, Krasniqi Valdrin.* Planar kinematics analysis method of seven-bar mechanism using vector loops and the verification of results experimentally. Proc. 12th International research/expert conference "Trends in the Development of Machinery and Associated Technology" (TMT-2008). Istanbul. Turkey. 26-30 August. 2008. P. 985-988.

5. *Lobontiu N., Garcia E.* Analytical model of displacement amplification and stiffness optimization for a class of flexure-based compliant mechanisms. Computers and Structures. 2003. № 81 (32). P. 2797-2810. doi:10.1016/j.compstruc.2003.07.003.

6. *Hoevenaars Antonius, Lambert Patrice, Herder Just.* Kinematic Design of Two Elementary 3DOF Parallel Manipulators with Configurable Platforms. Mechanisms and Machine Science. 2014. № 15. P. 315-322. doi:10.1007/978-94-007-7214-4-35.

7. *Zou H., Abdel-Malek K. A., Wang J. Y.* Design propagation in mechanical systems: Kinematic analysis. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME, 1997. № 119(3). P. 338-345. doi:10.1115/1.2826353.

8. *Henning S., Linß S., Gräser P., Theska R., Zentner L.* Non-linear analytical modeling of planar compliant mechanisms. Mechanism and Machine Theory, 2021. 155. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2020.104067.

9. *Chen X., Jiang S., Wang S., Deng Y.* Dynamics analysis of planar multi-DOF mechanism with multiple revolute clearances and chaos identification of revolute clearance joints. Multibody System Dynamics. 2019. № 47(4). P. 317-345. doi:10.1007/s11044-018-09654-0.

10. *Geng X., Li M., Liu Y., Zheng W., Zhao Z.* Non-probabilistic kinematic reliability analysis of planar mechanisms with non-uniform revolute clearance joints. Mechanism and Machine Theory. 2019. № 140. P. 413-433. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2019.06.010.

11. *Калетнік Г. М., Черниш О. М., Березовий М. Г.* Використання сучасних методів механіки для сільського господарства. Зб. наук. праць ВНАУ. Серія: технічні науки. 2012. № 11. Т. 1 (65). С. 8-18.

12. *Черниш О. М., Березовий М. Г.* Елементи графічного моделювання вектора сили на площині з використанням засобів програмування на ПК. MOTROL Motoryzacja i Energetyka Rolnictwa. 2006. T. 8. P. 69-80.

13. *Zhang D., Xu Y., Yao J., Hu B., Zhao Y.* Kinematics, dynamics and stiffness analysis of a novel 3-DOF kinematically/actuation redundant planar parallel mechanism. Mechanism and Machine Theory. 2017. 116. P. 203-219. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2017.04.011.

14. *Chen Y., Sun Y., Yang D.* Investigations on the dynamic characteristics of a planar slider-crank

mechanism for a high-speed press system that considers joint clearance. Journal of Mechanical Science and Technology. 2017. Vol. 31(1). P. 75-85. doi:10.1007/s12206-016-1209-z.

15. *Nazarenko I., Mishchuk Y., Mishchuk D., Ruchynskyi M., Rogovskii I., Mikhailova L., Titova L., Berezovyi M., Shatrov R*. Determiantion of energy characteristics of material destruction in the crushing chamber of the vibration crusher. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2021. Vol. 4. Issue 7(112). P. 41-49. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.239292.

16. *Кініцький Я. Т.* Теорія механізмів і машин. Київ. Наукова думка. 2002. 662 с.

17. *Marghitu, Dan B.* San Diego. Mechanical engineer's handbook. AcademicPress. 2001. 864 с.

References

1. *Doronin F. A., Doev V. S.* (2011). Study of the motion of a planar mechanism using the Mathcad package. Theory of Mechanisms and Machines. 1(9). 77-87.

2. *Petrov G. N.* (2004). Computer model of mechanical systems in the Model Vision. Theory of Mechanisms and Machines. 1(9). 75-79.

3. *Tretiakov V. M.* (2009). Using Mathcad in determining the speeds and accelerations of rod mechanisms. Theory of Mechanisms and Machines. 2(7). 40-48.

4. *Krasniqi Fehmi, Shala Ahmet, Krasniqi, Valdrin.* (2008). Planar kinematics analysis method of seven-bar mechanism using vector loops and the verification of results experimentally. Proc. 12th International research/expert conference "Trends in the Development of Machinery and Associated Technology" (TMT). Istanbul. Turkey. 26-30 August. 985-988.

5. *Lobontiu N., Garcia E.* (2003). Analytical model of displacement amplification and stiffness optimization for a class of flexure-based compliant mechanisms. Computers and Structures. 81 (32). 2797-2810. doi:10.1016/j.compstruc.2003.07.003.

6. *Hoevenaars Antonius, Lambert Patrice, Herder Just.* (2014). Kinematic Design of Two Elementary 3DOF Parallel Manipulators with Configurable Platforms. Mechanisms and Machine Science. 15. 315-322. doi:10.1007/978-94-007-7214-4-35.

7. *Zou H., Abdel-Malek K. A., Wang J. Y.* (1997). Design propagation in mechanical systems: Kinematic analysis. Journal of Mechanical Design, Transactions of the ASME. 119(3). 338-345. doi:10.1115/1.2826353.

8. *Henning S., Linß S., Gräser P., Theska R., Zentner L.* (2021). Non-linear analytical modeling of planar compliant mechanisms. Mechanism and Machine Theory. 155 doi:10.1016/j.mechmachtheory.2020.104067.

9. *Chen X., Jiang S., Wang S., Deng Y.* (2019). Dynamics analysis of planar multi-DOF mechanism with multiple revolute clearances and chaos identification of revolute clearance joints. Multibody System Dynamics. 47(4). 317-345. doi:10.1007/s11044-018-09654-0.

10. *Geng X., Li M., Liu Y., Zheng W., Zhao Z.* (2019). Non-probabilistic kinematic reliability analysis of planar mechanisms with non-uniform revolute clearance joints. Mechanism and Machine Theory. 140. 413-433. doi:10.1016/j.mechmachtheory.2019.06.010.

11. *Kaletnik H. M., Chernysh O. M., Berezovyi M. H.* (2012). Use of modern methods of mechanics for agriculture. Collection of scientific papers of Vinnytsia National Agrarian University. Technical Sciences Series. 11. (65). 8-18.

12. *Chernysh O. M., Berezovyi M. H.* (2006). Elements of graphic modeling of the force vector on the plane using programming tools. MOTROL Motorization and Power Industry in Agriculture. 8. 69-80.

13. *Zhang D., Xu Y., Yao J., Hu B., Zhao Y.* (2017). Kinematics, dynamics and stiffness analysis of a novel 3-DOF kinematically/actuation redundant planar parallel mechanism. Mechanism and Machine Theory, 116. 203-219. doi:10.1016/j.mechmachtheory. 2017.04.011.

14. *Chen Y., Sun Y., Yang D.* (2017). Investigations on the dynamic characteristics of a planar slider-crank mechanism for a high-speed press system that considers joint clearance. Journal of Mechanical Science and Technology. 31(1). 75-85. doi:10.1007/s12206-016-1209-z.

18. *Nazarenko I., Mishchuk Y., Mishchuk D., Ruchynskyi M., Rogovskii I., Mikhailova L., Titova L., Berezovyi M., Shatrov R*. (2021). Determiantion of energy characteristics of material destruction in the crushing chamber of the vibration crusher. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 4(7(112). 41-49. https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.239292.

15. *Kinitskiy Ya. T.* (2002). Theory of Mechanisms and Machines. Kyiv. Naukova Dumka. 662.

16. *Marghitu Dan B.* (2001). Mechanical engineer's handbook. San Diego: Academic Press. 864.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ МЕХАНИЗМОВ

О. Н. Черныш, Н. Г. Березовый., В. В. Яременко, М. М. Круглий

Аннотация. Рассмотрены аналитические исследования кинематических параметров плоских стержневых механизмов на примере кинематического расчета аксиального кривошипно-ползунного механизма. Для исследований использован алгоритм в программной среде Mathcad, что существенно упрощает и ускоряет процесс расчетов и дает возможность использования полученных данных для дальнейшего анализа и синтеза механизмов.

Ключевые слова: плоские стержневые механизмы, кинематические параметры, кинематический анализ, аналитические расчеты, программная среда.

ANALYTICAL STUDIES OF THE KINEMATIC PARAMETERS OF PLANAR ROD MECHANISMS

O. M. Chernysh, M. H. Berezovyi, V. V. Yaremenko, M. M. Kruhlii

Abstract. Analytical studies of the kinematic parameters of planar (2D) rod mechanisms are considered on the example of the kinematic calculation of the axial crank-slider mechanism. The algorithm in the Mathcad software environment is used, which greatly simplifies and speeds up the calculation process and makes it possible to use the obtained data for further analysis and synthesis of mechanisms.

Key words: planar rod mechanisms, kinematic parameters, kinematic analysis, analytical calculations, software environment.

О. М. Черниш ORCID 0000-0001-6173-0259.
М. Г. Березовий ORCID 0000-0001-9221-9787.
В. В. Яременко ORCID 0000-0002-3271-6287.
М. М. Круглій ORCID 0000-0003-4753-4352.