В работе дан анализ современных методов упрочнения рабочих органов почвообрабатывающих машин, рассмотрены их преимущества и недостатки. Показано, что наиболее эффективным методом упрочнения рабочих поверхностей деталей почвообрабатывающих машин является точечное упрочнение – дуговая точечная сварка порошковой проволокой.

Абразивное изнашивание, точечное упрочнение, лемех плуга, лапа культиватора, диск бороны.

In paper present introduce the present method hardening working tool cultivation machine them advantage and defect Demonstrate what the greatest effective method hardening force surface part cultivation machine have-point hardening point consumable-electrode are welding flux cored electrode.

Abrasive wear, pointwise reinforcement, plough share, sweep, harrow disk.

УДК 681.513.5

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА АНАЛІЗ МЕТОДІВ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

В.С. Ловейкін, доктор технічних наук
Ю.О. Ромасевич, кандидат технічних наук
В.А. Голдун, аспірант*

У статті розв’язана задача оптимального керування динамічною системою, яка описується диференціальним рівнянням другого порядку. Показаний зв'язок між відомими методами оптимального керування: варіаційним численням, принципом максимуму та динамічним програмуванням. Оптимальне керування знайдено у вигляді зворотного зв’язку при врахуванні обмежень на величину керування.

Динамічне програмування, принцип максимуму, варіаційне числення, обмеження на керування.

Постановка проблеми. Експлуатація сучасних технічних систем пов’язана із значними динамічними навантаженнями, енергетичними витратами та швидкоплинними перехідними процесами. Явища, які супроводжують протікання перехідних

*Науковий керівник – доктор технічних наук В.С. Ловейкін

© В.С. Ловейкін, Ю.О. Ромасевич, В.А. Голдун, 2013

процесів у різноманітних динамічних системах, часто носять небажаний характер. Наприклад, небажаним є нагрівання обмоток електричного привода, оскільки це призводить до старіння ізоляції та зменшує енергетичну ефективність машини. Для зменшення небажаних або/і збільшення бажаних факторів використовуються різноманітні процедури оптимізації машин, які ґрунтуються на відомих математичних методах. У даному дослідженні висвітлюються лише питання оптимізації керування динамічними системами і не розглядаються питання оптимізації її конструктивних параметрів.

Важливою задачею, яка носить не тільки теоретичний, але й прикладний характер, є встановлення взаємозв'язків між відомими методами оптимального керування. Це дає змогу розкрити важливі співвідношення між цими методами, що в результаті дозволяє намітити шляхи розв'язання оптимізаційних задач альтернативними шляхами.

Аналіз останніх досліджень. Для оптимізації режимів руху механічних систем використовуються різноманітні математичні методи. Найстарішим серед вказаних методів є метод варіаційного числення [1], зародження і розвиток котрого пов'язаний з іменами Ейлера, Лагранжа, Пуассона, Вейерштрасса та інших вчених. Одним із найвідоміших методів для розв'язування задач оптимального керування є принцип максимуму [2], розроблений Л.С. Понтрягіним та його учнями. Даний метод дозволяє врахувати обмеження накладені на керування динамічною системою. Потужним методом для розв'язування задач оптимального керування не тільки технічними, але й економічними, соціальними та системами іншої природи, є динамічне програмування [3]. Автором даного методу є американський математик Р. Беллман. Крім вказаних методів, також використовується метод моментів [4], розвиток якого пов'язаний з ім'ям акад. М.М. Красовського. Відома також теорема В.Ф. Кротова про достатні умови оптимальності процесу керування [5].

У даному аналізі не вказано значний масив наближених методів оптимального керування, які дозволяють у тій чи іншій мірі наблизитись до розв'язку задачі. Аналіз цих методів можна знайти у працях [6, 7].

Всі перераховані методи дозволяють знаходити оптимальне керування у вигляді функції часу і лише деякі з них – у вигляді оптимального зворотного зв'язку (задача синтезу оптимального керування). Загалом аналіз вказаних методів є досить складною задачею, оскільки кожен із них має власні переваги і недоліки.

Мета досліджень. Найпоширенішими методами розв'язування задач оптимального керування є варіаційне числення, принцип максимуму та динамічне програмування. Мета даної роботи з'ясувати зв'язки між цими методами на прикладі найпростішої задачі оптимального керування одно масовою динамічною системою. Для досягнення поставленої мети необхідно розв'язати такі завдання: 1) здійснити постановку задачі оптимального керування; 2) розв'язати задачу оптимального керування за допомогою принципу максимуму; 3) показати, як із співвідношень методу принципу максимуму можна отримати необхідну умову екстремуму класичного варіаційного числення – рівняння Ейлера-Пуассона; 4) здійснити синтез оптимального керування за допомогою методу динамічного програмування; 5) знайти співвідношення між методами динамічного програмування та принципу максимуму; 6) проаналізувати оптимальні результати та вказати шляхи подальших досліджень.

Результати досліджень. *1. Постановка задачі оптимального керування.* Для великої кількості технічних систем динаміку руху у першому наближенні можна представити у вигляді найпростішого диференціального рівняння:

$$m\ddot{x} = F - W, \tag{1}$$

де m – приведена до поступального руху маса системи; x – узагальнена координата системи (поступальне переміщення); F – приводне зусилля, що діє на систему; W – сила статичного опору руху системи, утому числі технологічного характеру. Крапка над символом означає диференціювання за часом.

Рівняння (4), з урахуванням позначень $x = x_1$, $\frac{F - W}{m} = u$ можна подати у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases} \tag{2}$$

Критерієм оптимізації процесу, який необхідно мінімізувати, оберемо інтегральний функціонал, який за структурою є комплексним критерієм:

$$I = \int_0^T (\delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 u^2) dt, \tag{3}$$

де *T* – тривалість руху системи; δ_1, δ_2 та δ_3 – вагові коефіцієнти, які враховують важливість відповідних доданків у підінтегральному виразі критерію (3).

Будемо шукати оптимальне керування при таких крайових умовах:

$$\begin{cases} x_1(0) = s_0, \ x_2(0) = v_0; \\ x_1(T) = x_2(T) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

де s_0 та v_0 – початкове положення та початкова швидкість динамічної системи.

Таким чином, необхідно перевести динамічну систему з деякого початкового положення, яке характеризується ненульовими значеннями положення s_0 та швидкості v_0 у нульове положення при мінімізації критерію за виразом (3). Для механічної системи такий режим руху означає загальмовування.

2. Розв'язання оптимізаційної задачі методом принципу максимуму. Для того, щоб розв'язати поставлену задачу методом принципу максимуму необхідно записати функцію Гамільтона:

$$\acute{I} = \psi_1 \tilde{o}_2 + \psi_2 u - \delta_1 x_1^2 - \delta_2 x_2^2 - \delta_3 u^2, \tag{5}$$

де ψ_1 і ψ_2 – спряжені змінні. Згідно принципу максимуму необхідно таким чином керувати процесом, щоб Гамільтоніан (5) був максимальним. Для відкритої області керування ($u \in (-\infty; \infty)$) таке керування знаходиться з умов стаціонарності функції Гамільтона:

$$\frac{\partial \acute{I}}{\partial u} = \psi_2 - 2\delta_3 u = 0. \tag{6}$$

З рівняння (6) отримаємо:

$$u = \frac{\psi_2}{2\delta_3}. \tag{7}$$

Для того, щоб пересвідчитись, що отримане керування (7) доставляє максимум Гамільтоніану (5), необхідно проаналізувати знак другої похідної Гамільтоніана по керуванню:

$$\frac{\partial^2 \acute{I}}{\partial u^2} = -2\delta_3 < 0, \quad (\delta_3 > 0). \tag{8}$$

Вираз (7) справедливий для відкритої області керування. Однак, як правило, на керування накладаються обмеження у вигляді нестрогих нерівностей:

$$u_{\max} \geq u \geq u_{\min}, \tag{9}$$

де $u_{\max}$ та $u_{\min}$ – відповідно максимальне та мінімальне значення керування. Тоді область допустимих керувань буде обмежена границями $u_{\max}$ та $u_{\min}$. Враховуючи обмеження (9) оптимальне керування можна подати у такому вигляді:

$$u = \begin{cases} u_{\max}, & \text{якщо } \dfrac{\psi_2}{2\delta_3} \geq u_{\max}; \\ \dfrac{\psi_2}{2\delta_3}, & \text{якщо } u_{\max} \geq \dfrac{\psi_2}{2\delta_3} \geq u_{\min}; \\ u_{\min}, & \text{якщо } \dfrac{\psi_2}{2\delta_3} \leq u_{\min}. \end{cases} \tag{10}$$

3. Знаходження зв'язку між принципом максимуму та класичним варіаційним численням. Таким чином, отримано структуру оптимального керування (10). Для знаходження невідомої спряженої змінної ψ_2 необхідно знайти розв'язки спряженої системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -\dfrac{\partial \acute{I}}{\partial \tilde{o}_1} = 2\tilde{o}_1\delta_1; \\ \dot{\psi}_2 = -\dfrac{\partial \acute{I}}{\partial \tilde{o}_2} = -\psi_1 + 2\tilde{o}_2\delta_2. \end{cases} \tag{11}$$

Продиференціюємо останнє рівняння системи (11) за часом та враховуючи перше рівняння (11) отримаємо:

$$\ddot{\psi}_2 = -2\tilde{o}_1\delta_1 + 2u\delta_2. \tag{12}$$

Надалі двічі продиференціюємо вираз (7) за часом та підставимо у отриманий вираз (12). В результаті будемо мати:

$$\ddot{u} = \frac{\ddot{\psi}_2}{2\delta_3} = \frac{-2\tilde{o}_1\delta_1 + 2u\delta_2}{2\delta_3}. \tag{13}$$

Враховуючи, що $\ddot{u} = \overset{IV}{\tilde{o}}$ і $u = \ddot{x}$ запишемо рівняння (13) у такому вигляді:

$$\overset{IV}{\tilde{o}} - \ddot{x}\frac{\delta_2}{\delta_3} + x\frac{\delta_1}{\delta_3} = 0. \tag{14}$$

Рівняння (14) є рівнянням Ейлера-Пуассона для функціоналу (3).

4. Синтез оптимального керування за допомогою методу динамічного програмування. Для знаходження оптимального керування як функції фазових змінних динамічної системи використаємо метод динамічного програмування. Основне функціональне рівняння Беллмана прийме такий вигляд:

$$\min_u \left\{ \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u + \delta_1 x_1^2 + \delta_2 x_2^2 + \delta_3 u^2 \right\} = 0, \tag{15}$$

де S – функція Беллмана.

Мінімум правої частини рівняння (9) будемо шукати по параметру керування u для чого продиференціюємо її за u та прирівняємо отримане до нуля:

$$2\delta_3 u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \tag{16}$$

Знайдемо з рівняння (16) керування u:

$$u = -\frac{1}{2\delta_3}\frac{\partial S}{\partial x_2} \tag{17}$$

та підставимо отримане у рівняння (15) в результаті чого будемо мати:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}x_2-\frac{1}{4\delta_3}(\frac{\partial S}{\partial x_2})^2+\delta_1 x_1^2+\delta_2 x_2^2+=0. \tag{18}$$

Рівняння (18) є нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних. Будемо шукати його розв'язок у вигляді квадратичної форми:

$$S=A_1x_1^2+A_2x_1x_2+A_3x_2^2. \tag{19}$$

Візьмемо частинні похідні з виразу (19) за параметрами x_1 та x_2:

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}=2A_1x_1+A_2x_1, \tag{20}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2}=A_2x_1+2A_3x_2. \tag{21}$$

Підставимо вирази (20) і (21) у рівняння (18) і отримаємо:

$$x_1^2(\delta_1-\frac{A_2^2}{4\delta_3})+x_2^2(\delta_2+A_2-\frac{A_3^2}{\delta_3})+x_1x_2(2A_1-\frac{A_2A_3}{\delta_3})=0. \tag{22}$$

Рівняння (22) буде справедливим у тому випадку коли вирази у дужках будуть рівні нулю, оскільки $x_1\neq 0,\ x_2\neq 0$. Тому рівняння (22) можна замінити на систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases}\delta_1-\dfrac{A_2^2}{4\delta_3}=0,\\ \delta_2+A_2-\dfrac{A_3^2}{\delta_3}=0,\\ 2A_1-\dfrac{A_2A_3}{\delta_3}=0.\end{cases} \tag{23}$$

Розв'язок системи рівнянь (23) буде мати два дійсних та два комплексних кореня. Оберемо один дійсний, який не приводить до втрати стійкості системи.

Підставивши отримані корені у вираз (17) отримаємо функцію оптимального керування у вигляді синтезу:

$$u=-\frac{\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3}}{\delta_3}x_1-\frac{\sqrt{(\delta_2+2\sqrt{\delta_1}\sqrt{\delta_3})\delta_3}}{\delta_3}x_2. \tag{24}$$

Розглянемо рівняння Беллмана (15). Виконаємо перетворення цього рівняння:

$$\min_u(-1)\left\{\left(-\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)x_2+\left(-\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)u-\delta_1x_1^2-\delta_2x_2^2-\delta_3u^2\right\}=0 \tag{25}$$

або

$$\max_u \left\{ \left(-\frac{\partial S}{\partial x_1} \right) x_2 + \left(-\frac{\partial S}{\partial x_2} \right) u - \delta_1 x_1^2 - \delta_2 x_2^2 - \delta_3 u^2 \right\} = 0. \qquad (26)$$

Вираз у фігурних дужках представляє собою функцію Гамільтона, якщо прийняти $-\frac{\partial S}{\partial x_1} = \psi_1$ та $-\frac{\partial S}{\partial x_2} = \psi_2$. Зазначимо, що синтез оптимального керування за допомогою рівняння Беллмана виконувався для відкритої області керування, тобто обмеження (9) не враховувались. Принцип максимуму дозволяє врахувати обмеження і тому оптимальне керування у формі зворотного зв'язку при обмеженнях (9) можна записати таким чином:

$$u = \begin{cases} u_{\max}, \ \textit{якщо} -\frac{\sqrt{\delta_1\delta_3}}{\delta_3} x_1 - \frac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1\delta_3})\delta_3}}{\delta_3} x_2 \geq u_{\max}; \\ -\frac{\sqrt{\delta_1\delta_3}}{\delta_3} x_1 - \frac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1\delta_3})\delta_3}}{\delta_3} x_2, \ \textit{якщо} \ u_{\max} \geq -\frac{\sqrt{\delta_1\delta_3}}{\delta_3} x_1 - \frac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1\delta_3})\delta_3}}{\delta_3} x_2 \geq u_{\min}; \\ u_{\min}, \ \textit{якщо} -\frac{\sqrt{\delta_1\delta_3}}{\delta_3} x_1 - \frac{\sqrt{(\delta_2 + 2\sqrt{\delta_1\delta_3})\delta_3}}{\delta_3} x_2 \leq u_{\min}. \end{cases} \qquad (27)$$

Побудуємо графіки оптимального процесу (рис. 1, рис. 2) для таких параметрів системи $\delta_1 = 0{,}2$, $\delta_1 = 0{,}3$, $\delta_1 = 0{,}5$, $u_{\max} = 1$, $u_{\min} = -1$, $\tilde{o}_0 = 0$ м, $v_0 = 1$ м/с.

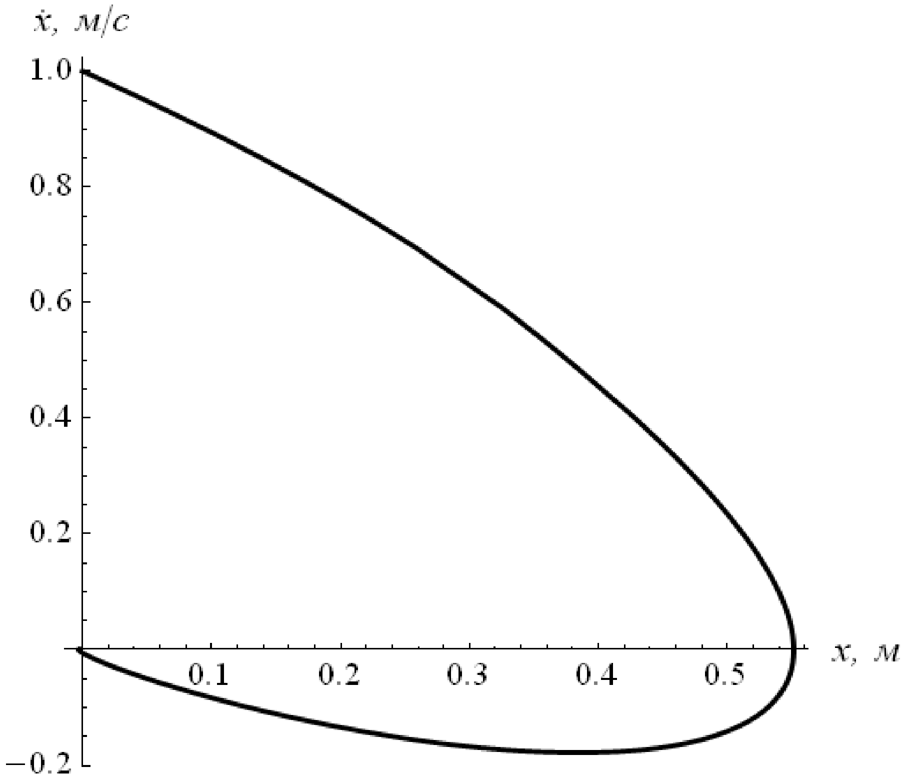

Рис. 1. Фазовий портрет руху динамічної системи.

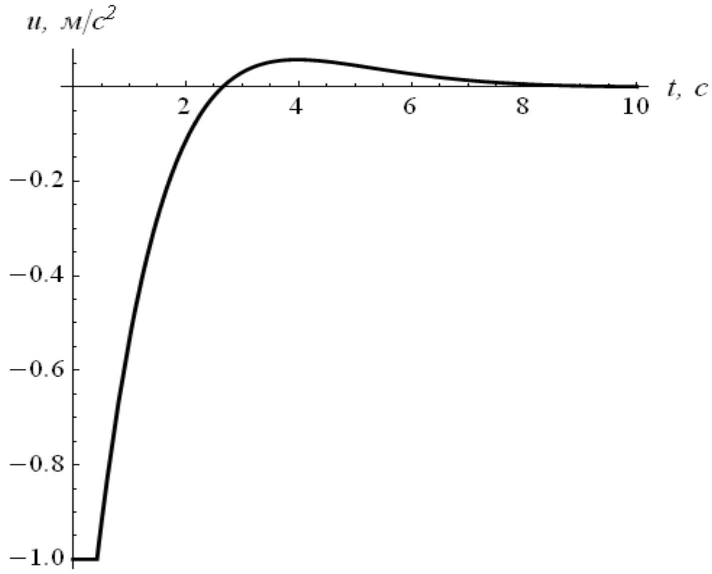

Рис. 2. Графік функції оптимального керування динамічною системою.

Висновок. Використання методів оптимального керування (динамічне програмування та принцип максимуму) дозволяє знайти оптимальне керування динамічною системою у вигляді зворотного зв'язку. Використання лише одного із цих методів не дає бажаного результату: принцип максимуму встановлює „якісну" картину оптимального керування, а динамічне програмування – „кількісну" і лише поєднання цих методів дає бажаний результат. У даній роботі встановлено зв'язки між методами динамічного програмування, принципу максимуму та варіаційним численням. Ці зв'язки дають змогу поєднувати на різних етапах розв'язку оптимізаційної задачі підходи того чи іншого методу.

Список літератури

1. *Петров Ю.П.* Вариационные методы теории оптимального управления / *Ю.П. Петров*. – Л.: Энергия, 1977. – 280 с.
2. *Понтрягин Л.С.* Принцип максимума в оптимальном управлении / *Л.С. Понтрягин*. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 64 с.
3. *Беллман Р.* Динамическое программирование [пер. с англ. *И.М. Андреева*, *А.А. Корбут, И.В. Романовский, И.Н. Соколов*]. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960. – 400 с.
4. *Красовский И.И.* Теория управления движением (линейные системы) / *И.И. Красовский*. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
5. *Кротов В.Ф.* Методы и задачи оптимального управления / *В.Ф. Кротов, В.И. Гурман*. – М.: Наука, 1973. – 389 с.
6. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления / *Р.П. Федоренко*. – М.: Наука, 1978. – 488 с.
7. *Черноусько Ф.Л.* Вычислительные и приближенные методы оптимального управления / *Ф.Л. Черноусько, В.Б. Колмановский* // Итоги науки и техники. Серия „Математический анализ". – 1977. – № 14. – С. 101–166.

В статье решена задача оптимального управления динамической системой, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка. Показана связь между известными методами оптимального управления: вариационным исчислением, принципом максимума и динамическим программированием. Оптимальное управление найдено в виде обратной связи при учете ограничений на величину управления.

Динамическое программирование, принцип максимума, вариационное исчисление, ограничение на управление.

The optimal control problem by dynamical systems has been solved in paper. Dynamical systems is describing by differential equation of second order. Connection with known methods of optimal control (variational calculus, maximum principle, dynamical programming) has been showed. Optimal control has been calculated in feedback form with accounting control limitation.

Dynamical programming, maximum principle, variational calculus, control limitation.

УДК 620.95

АНАЛІЗ ТЕХНОЛОГІЙ ВИРОБНИЦТВА ДИЗЕЛЬНОГО БІОПАЛИВА

М.Ю. Павленко, аспірант*

Проведено аналіз технологій виробництва дизельного біопалива для використання в умовах господарств.

Рослинна олія, продукція, зерно, технологія, дизельне біопаливо.

Постановка проблеми. В умовах сучасного розвитку виробництва альтернативного біопалива існує широке різноманіття технологій виробництва дизельного біопалива. Серед всіх технологій широко використання набули промислова та агропромислова технології виробництва дизельного біопалива з використанням метанолу, в якості компоненту для трансформації рослинної олії в МЕЖК (метилові ефіри жирних кислот).

Технологія виробництва дизельного біопалива складається з таких основних процесів: естерифікації рослинних олій та послідовної очистки метилового ефіру (дизельного біопалива).

*Науковий керівник – доктор технічних наук Г.А. Голуб

© М.Ю. Павленко, 2013