

5. *Справочник конструктора сельскохозяйственных машин [текст] : в 4-х т. / ред. М.И. Клецкин. Т.3. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1969. – 743 с.*
6. *Теория, конструкция и производство сельскохозяйственных машин / ВИС-ХОМ; общ ред. В.П. Горячкина. Т. 3: Теория. – М.-Л.: Сельхозгиз, 1936. – 780 с.*
7. *Джонсон К. Механика контактного взаимодействия / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 510 с.*

*Проведено исследование физико-механических свойств, таких как конусность, длина, диаметр стеблей конопли, для обоснования конструктивных и геометрических параметров рабочих органов машин предназначенных для сбора конопли.*

***Физико-механические свойства, конусность, длина, диаметр стеблей конопли.***

*Research of physical and mechanical properties, such as conicity, length, diameter of stalks of hemp, for justification of design and geometrical parameters of working bodies of machines designed for collecting hemp is conducted.*

***Physical and mechanical properties, conicity, length, diameter of stalks of hemp.***

УДК 531.3

## **ПРО КРИТЕРІЙ МІЦНОСТІ І СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ КОМПОНЕНТАМИ НАПРУЖЕНЬ СИПУЧОГО СЕРЕДОВИЩА**

***В.П. Ковбаса, доктор технічних наук  
В.П. Курка, кандидат технічних наук  
Національний університет біоресурсів і  
природокористування України  
Алі Ахмед Кадем, аспірант\*  
Сумський національний аграрний університет***

*Показано вплив граничного напруження зсуву, початкового напруження зсуву, коефіцієнта внутрішнього і зовнішнього тертя при визначенні навантажень з боку матеріалів на конструкції, споруди та робочі органи.*

***Критерій міцності, сипуче середовище, напруження в середовищі, ґрунт, напруження зсуву в середовищі.***

***\*Науковий керівник – доктор технічних наук В.П. Ковбаса***

© В.П. Ковбаса, В.П. Курка, Алі Ахмед Кадем, 2015

**Постановка проблеми.** У багатьох процесах при формалізації матеріалів і середовищ застосовується модель сипучого дискретного середовища [1–4]. До таких моделей приходять у випадках формалізації процесів пов'язаних з ґрунтом, зерновими матеріалами, комбікормами, продуктами переробки зернових, бобових і олійних культур [5–7]. При цьому ці матеріали мають суттєві відмінності в механічних властивостях, зокрема граничному напруженні зсуву, початковому напруженні зсуву, коефіцієнтах внутрішнього і зовнішнього тертя. Тому при формалізації процесів дуже важливим є врахування цих властивостей при визначенні умов руху таких матеріалів, визначенні навантажень з боку матеріалів на конструкції, споруди та робочі органи. Крім того важливим є знання величин зовнішніх впливів при необхідності переміщення цих матеріалів та зміни їх властивостей.

**Аналіз останніх досліджень.** Виходячи з цього, знання зв'язків компонентів напружень таких матеріалів і умов порушення рівноваги має надзвичайно важливе значення. Відповідно з твердженням Хаара і Кармана класична теорія пластичності і теорія граничної рівноваги ґрунтів (теорія сипучого середовища) мають спільне підґрунтя, тому аналіз сипучого середовища проводиться із застосуванням методів класичної теорії пластичності.

**Мета досліджень.** Проаналізувати вплив граничного напруження зсуву, початкового напруження зсуву, коефіцієнта внутрішнього і зовнішнього тертя при визначенні навантажень з боку матеріалів на конструкції, споруди та робочі органи.

**Результати досліджень.** Одним з найбільш поширених і найбільш застосовуваних до сипучого середовища критеріїв повної пластичності (умови граничної рівноваги) є критерій Треска, згідно з яким умова граничної рівноваги має вигляд:

$$\sigma_3 = \sigma_2, \sigma_1 - \sigma_3 = 2k, \quad (17)$$

де:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження в середовищі;

$k$  – константа, яка характеризує границю переходу середовища в пластичний стан.

Для визначення величини  $k$  (умови рівноваги) можна скористатися колами Мора (рис.1).

На рис. 1 позначення мають наступні трактування:  $\tau_0$  – початкове напруження зсуву для зв'язного сипучого середовища,  $\varphi$  – кут внутрішнього тертя середовища,  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – головні напруження в середовищі (відповідно найбільше, середнє і найменше). Згідно Отто Мора  $CA_1$  і  $CA_2$  – лінії ковзання по яких відбувається пластична течія або руйнується суцільність. Співвідношення між компонентами напружень на лініях ковзання мають вигляд:

$$BO = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} + \sigma_3 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; BC = \frac{\tau_0}{\operatorname{tg} \varphi}; OC = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\tau_0}{\operatorname{tg} \varphi}; OP_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2};$$

$$\frac{1}{\sin \varphi} = \frac{\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\tau_0}{\operatorname{tg} \varphi}}{\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}; \quad (18)$$

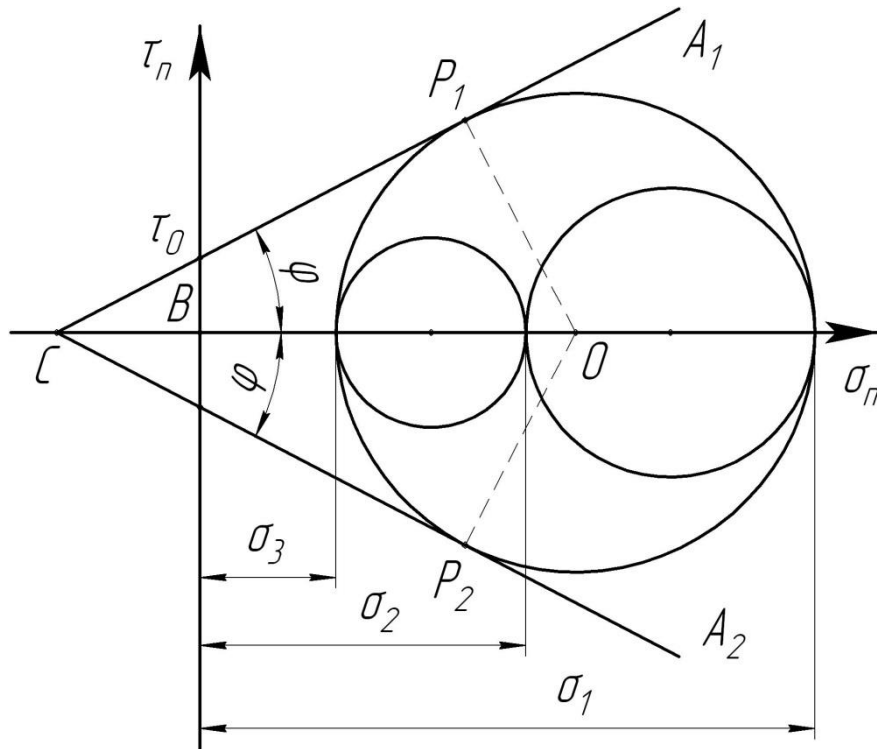


Рис. 1. Кола Мора для визначення співвідношень між компонентами напружень і умовами настання пластичності.

З виразу (2) на лініях ковзання можна отримати співвідношення між властивостями середовища і компонентами напружень:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_3 + 2\tau_0 \operatorname{ctg} \varphi + \sigma_3 \sin \varphi}{-1 + \sin \varphi}; \quad \sigma_3 = \frac{-\sigma_1 - \tau_0 \operatorname{ctg} \varphi + \sigma_1 \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}. \quad (19)$$

Згідно уявлень напружень через кола Мора максимальне дотичне напруження має вигляд:  $\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$ , що відповідно до умовою пластичності Треска:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \leq k, \quad k - \text{const}, \quad \text{або} \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2k.$$

Слід зазначити, що постійна  $k$  для пластичного зв'язного (сипучого) середовища може бути отримана з умови (3) з урахуванням того що:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2k, \quad \text{при} \quad \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(3\sigma - \sigma_1), \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Підстановка рівнянь для  $\sigma$  і  $\sigma_3$  в перше рівняння (3) і вираження з нього постійної  $k$  дає вираз:

$$k = -\frac{3(\sigma \sin \varphi + \tau_0 \cos \varphi)}{-3 + \sin \varphi}. \quad (20)$$

Графічно вираз (4) при постійній напрузі  $\sigma = const$  має вигляд представлений на рис. 2.

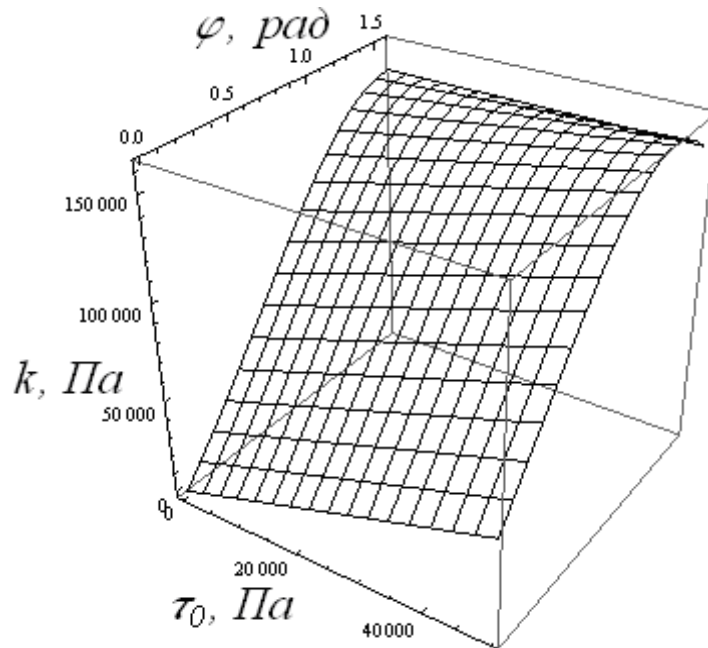


Рис. 2. Залежність постійної  $k$  від кута внутрішнього тертя  $\varphi$  і початкової напруги зсуву  $\tau_0$  середовища.

Для вирішення задач статичного пластичного (дискретного сипучого) середовища необхідно знати як пов'язані компоненти напружень між собою і який зв'язок вони мають з механічними властивостями самої середовища.

На майданчику довільно нахиленої до осей координат  $xyz$  зв'язок між компонентами напружень і головними напруженнями визначається через напрямні косинуси:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2; & \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2; \\ \sigma_y &= \sigma_1 l_2^2 + \sigma_2 m_2^2 + \sigma_3 n_2^2; & \tau_{yz} &= \sigma_1 l_2 l_3 + \sigma_2 m_2 m_3 + \sigma_3 n_2 n_3; \\ \sigma_z &= \sigma_1 l_3^2 + \sigma_2 m_3^2 + \sigma_3 n_3^2; & \tau_{xz} &= \sigma_1 l_1 l_3 + \sigma_2 m_1 m_3 + \sigma_3 n_1 n_3; \end{aligned} \quad (21)$$

де існує зв'язок між осями координат та напрямками головних напружень через напрямні косинуси:

	1	2	3
$x$	$l_1$	$m_1$	$n_1$
$y$	$l_2$	$m_2$	$n_2$
$z$	$l_3$	$m_3$	$n_3$

При цьому існує зв'язок:

$$\begin{aligned} l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= 1; & l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 &= 0; \\ l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 &= 1; & l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 &= 0; \\ l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 &= 1; & l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 &= 0, \end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned} l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 &= 1; & l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 &= 0; \\ m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 &= 1; & m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 &= 0; \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1; & l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 &= 0. \end{aligned}$$

З урахуванням (1) і (5) компоненти напружень можуть бути записані наступним чином:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - 2k/3 + 2k n_1^2; & \tau_{xy} &= 2k n_1 n_2; \\ \sigma_y &= \sigma - 2k/3 + 2k n_2^2; & \tau_{yz} &= 2k n_1 n_3; \\ \sigma_z &= \sigma - 2k/3 + 2k n_3^2; & \tau_{xz} &= 2k n_1 n_2, \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Якщо з виразів (6) для компонентів нормальних напружень виразити  $n_1, n_2, n_3$  і підставити у рівняння для  $\tau_{ij}$ , то можна записати:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^2 &= (\sigma_x - \sigma + 2k/3)(\sigma_y - \sigma + 2k/3); & \tau_{yz}^2 &= (\sigma_y - \sigma + 2k/3)(\sigma_z - \sigma + 2k/3); \\ \tau_{xz}^2 &= (\sigma_x - \sigma + 2k/3)(\sigma_z - \sigma + 2k/3), \end{aligned} \quad (23)$$

а потім:

$$\begin{aligned} (\sigma_x - \sigma + 2k/3)\tau_{yz} &= \tau_{xy}\tau_{zx}; & (\sigma_y - \sigma + 2k/3)\tau_{xz} &= \tau_{xy}\tau_{yz}; \\ (\sigma_z - \sigma + 2k/3)\tau_{xy} &= \tau_{xz}\tau_{yz}. \end{aligned} \quad (24)$$

З співвідношень (8):

$$\sigma_x = \sigma - 2k/3 + \frac{\tau_{xy}\tau_{zx}}{\tau_{yz}}; \quad \sigma_y = \sigma - 2k/3 + \frac{\tau_{zy}\tau_{yz}}{\tau_{xz}}; \quad \sigma_z = \sigma - 2k/3 + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}}. \quad (25)$$

А далі:

$$\frac{\tau_{xy}\tau_{zx}}{\tau_{yx}} + \frac{\tau_{xy}\tau_{yz}}{\tau_{zx}} + \frac{\tau_{xz}\tau_{yz}}{\tau_{xy}} = 2k.$$

Якщо в Декартовій системі координат ввести значення косинусів кута нахилу найбільшого головного напруження до осей координат  $x, y, z$ :  $n_1 = \cos \alpha$ ;  $n_2 = \cos \beta$ ;  $n_3 = \cos \gamma$ , то з рівнянь (6) можна визначити компоненти напружень через кути нахилу найбільшого головного напруження:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma - 2(k/3 + k \cos^2 \alpha); & \sigma_y &= \sigma - 2(k/3 + k \cos^2 \beta); \\ \sigma_z &= \sigma - 2(k/3 + k \cos^2 \gamma); & \tau_{xy} &= 2k \cos \alpha \cos \beta; \\ \tau_{yz} &= 2k \cos \beta \cos \gamma; & \tau_{xz} &= 2k \cos \alpha \cos \gamma. \end{aligned} \quad (26)$$

Такими є співвідношення для умов повної пластичності (граничної рівноваги для сипучих) при віднесенні до Декартової системи координат.

**Висновок.** Отримана постійна, яка визначає граничний стан зв'язкового сипучого матеріалу (середовища) і співвідношення між компонентами напружень в цьому середовищі, а також напрямками дії головних напружень, які дозволяють вирішувати завдання статички сипучої зв'язковий середовища, яка характеризується кутом внутрішнього тертя і початковим напруженням зсуву.

### Список літератури

1. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел / *А. Надаи.* – М.: Мир, 1969. – Т. 2. – 864 с.
2. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия / *К. Джонсон.* – М.: Мир, 1989. – 510 с.
3. *Дубровін В.О.* Фізичні рівняння формалізації ґрунту / *В.О. Дубровін, В.П. Ковбаса* // Науковий вісник Національного аграрного університету. – К.: НАУ, 2003. – Вип. 60. – С. 172–176.
4. *Ковбаса В.П.* Про критерій міцності та співвідношення між компонентами сипкого середовища / *В.П. Ковбаса, В.В. Ярошенко* // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. – Кіровоград: КНТУ, 2010. – Вип. 40. – Ч. 1. – С. 35–39.
5. *Шелудченко Б.А.* Напружено-деформований стан оброблюваного ґрунту і оптимізація кутових параметрів ґрунтообробних знарядь / [Б.А. Шелудченко, В.І. Котков, В.О. Шубенко, П.М. Забродський] // Вісник Житомирського інженерно-технологічного інституту. – 1994. – №1. – С. 115–123.
6. *Ковбаса В.П.* Про визначення критерію вигляду напружено-деформованого стану суцільного середовища / *В.П. Ковбаса* // Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. – Х.: ХДТУСГ, 2001. – Вип. 8, т. 2. – С. 79–82.
7. *Ишлинский А.Ю.* Математическая теория пластичности / *А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев.* – М.: Физматлит, 2003. – 701 с.

*Показано влияние предельного напряжения сдвига, начального напряжения сдвига, коэффициента внутреннего и внешнего трения при определении нагрузок со стороны материалов на конструкции, сооружения и рабочие органы.*

***Критерий прочности, сыпучая среда, напряжение в среде, почва, напряжение сдвига в среде.***

*Shows the effect of limiting shear stress, the initial shear stress coefficient of internal and external friction in determining the loads from the construction materials, structures and working bodies.*

***Strength criterion, loose environment, tension in environment, soil, shear stress in soil.***