

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ШВИДКОГО ГРАВІТАЦІЙНОГО РУХУ ІНГРЕДІЄНТІВ КОМБІКОРМІВ ПРИ ЇХ ЗМІШУВАННІ

*Д. І. Бойко, аспірант**

*Харківський національний технічний університет
сільського господарства імені Петра Василенка*

Анотація. В результаті залучення законів механіки суцільних середовищ, зокрема законів збереження маси, змінення кількості руху, змінення кінетичного моменту і зберігання повної енергії проведено математичне моделювання швидкого гравітаційного руху сипких матеріалів і отримана система рівнянь їх динаміки, яка в подальшому буде використана для моделювання технологічного процесу дозувально-змішувального агрегату при приготуванні комбікормів.

Ключові слова: *суцільні середовища, сипкі матеріали, моделювання*

Постановка проблеми. Багато механічних процесів переробки сипких матеріалів і зокрема змішування інгредієнтів при приготуванні комбікормів відбуваються в режимі їх швидкого гравітаційного руху. Характерним для сипких матеріалів є присутність в них твердих частинок, простір між якими заповнений повітрям. В такому випадку сипкі матеріали представляють собою двофазне суцільне середовище і для визначення їх реологічних співвідношень виникає необхідність в залученні механіки багатофазних середовищ [1].

Швидкий гравітаційний рух сипких матеріалів супроводжується активною взаємодією частинок, внаслідок чого проявляються технологічно значущі ефекти змішування і розділення частинок. Названі ефекти не тільки суттєво впливають на кінетику технологічних процесів, але і часто використовуються в якості базових для організації технологічних процесів змішування, класифікації, сепарації та ін.

Основними ефектами взаємодії частинок сипких матеріалів при швидких гравітаційних рухах є квазидифузійне змішування і розділення частинок. Для прогнозування названих ефектів і управління ними, необхідно мати повну інформацію про їх структурні і кінематичні характеристики, які можуть бути визначені в результаті рішення системи рівнянь динаміки швидких рухів сипких матеріалів.

Аналіз останніх досліджень. В теперішній час відома достатньо велика кількість математичних моделей швидких

*Науковий керівник – кандидат технічних наук О. А. Науменко

гравітаційних рухів сипких матеріалів. Існуючі моделі можна умовно розділити на дві групи: 1) основані на континуальних теоріях, які базуються на різних формах взаємозв'язку між тензором напруження і швидкістю деформації; 2) основані на мікроструктурному аналізі, в якому напруження визначаються в залежності від закономірностей переносу кількості руху за рахунок зіткнення частинок. Моделі першої групи ґрунтуються на тому, що властивості сипкого матеріалу, як континуума, можуть бути представлені в вигляді безперервних функцій таким чином, що будь яка без кінцево мала частина середовища володіє її характерними властивостями. В цьому випадку аналіз взаємодії окремих частинок не проводиться.

Проблема описання поля швидкостей і розподілення твердих частинок в швидких рухах сипких матеріалів розглядалася в роботах Гудмена і Коуіна [2], які базуючись на положеннях механіки суцільних середовищ, розробили моделі швидкого руху сипкого матеріалу по похилій площині.

Запропоновану модель Седвідж [3] адаптував для випадку швидкого руху дисперсних матеріалів по похилій площині. Він виключив щільність сипкого матеріалу із числа змінних і запропонував гіпотезу, що тензор напруження є ізотропною функцією тензору швидкості деформації.

Канатані [4] розробив мікрополярну теорію суцільних середовищ, що описує швидкий рух сипкого матеріалу. Він отримав рівняння, яке визначає взаємозв'язок швидкості руху і щільності середовища.

К. Hutter і Т. Scheiwiler [5] на основі континуальної моделі Севіджа провели чисельне моделювання зернового потоку, який скочується по похилому жолобу. При цьому основна увага була зосереджена на формулюванні граничних умов. Автори запропонували залежність між енергією коливання і швидкістю ковзання та вивчали її значення при швидкому русі гранулометричного матеріалу по похилій поверхні. Формування умов на границі зводилась до того, що потоки кількості і енергії коливання в напрямку, перпендикулярному поверхні відсутні, що є очевидно, тільки деяким частковим випадкам граничних умов.

Практично усі розглянуті роботи мають загальний підхід до визначення закономірностей швидких гравітаційних рухів зернових матеріалів. Більш того, в результаті аналізу можна зробити висновок про те, що пропозиції авторів про відсутність передавання імпульсу за рахунок квазидифузійного переміщення частинок і незалежності ефективного коефіцієнта тертя від концентрації твердої фази надто умовні і в кожному конкретному випадку потребують серйозного обґрунтування. З цієї причини відповідні моделі пророкують існування стаціонарних швидких рухів сипких матеріалів в узькому

діапазоні значень кутів нахилу площин. Крім того, вони не дозволяють повністю описати профілі швидкостей і розподілення твердої фази, особливо в тонких шарах сипких матеріалів. З урахуванням викладеного, в загальному випадку не має можливості використання відомих математичних моделей для адекватного опису профілів швидкості і розподілення твердої фази по товщині шару сипкого матеріалу.

Мета досліджень. Розробити математичні моделі системи математичних рівнянь швидких гравітаційних рухів сипких матеріалів з подальшим їх використанням для опису процесів змішування при приготуванні комбікормів.

Результати досліджень. Сипкий матеріал можливо розглядати як суцільне середовище [3], для яких виконується гіпотеза суцільності, і які мають безперервне розподілення характеристик по простору. До таких параметрів відносяться об'ємна щільність сипкого матеріалу $\rho = \rho(t, \vec{r})$ і поле швидкостей $\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{r})$. Присутністю повітря в просторі між частинками будемо нехтувати і щільність частинок сипкого матеріалу γ будемо вважати постійною. Тоді щільність середовища (з урахуванням пустот між частинками) буде дорівнювати:

$$\rho = \gamma \cdot \nu. \quad (1)$$

Тензор напружень σ_{ik} може бути представлений у вигляді суми «рівноважного» $\sigma_{ik}^{(r)}$, залежного від $\nabla \nu = (\partial \nu / \partial x_1, \partial \nu / \partial x_2, \partial \nu / \partial x_3)$, і «не рівноважного», залежного від $\nabla v_k = \{\partial v_k / \partial x_i\}_{i,k=1}^3$; $\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(r)} + \sigma_{ik}^{(n)}$ тензорів:

$$\sigma_{ik}^{(r)} = -\alpha \beta \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial x_3} \right)^2 \right] \delta_{ik} - 2\alpha \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \frac{\partial \nu}{\partial x_k}, \quad (2)$$

$$\sigma_{ik}^{(n)} = \lambda \operatorname{div} \vec{v} \delta_{ik} + 2\mu V_{ik}, \quad (3)$$

де: σ_{ik} – одиничний тензор; x_1, x_2, x_3 – координати декартової системи координат; α – феноменологічний коефіцієнт; $\beta = \frac{1}{\sin \varphi} - 1$;

φ – кут внутрішнього тертя сипкого матеріалу; λ, μ – динамічні коефіцієнти в'язкості.

$$V_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right), \quad (4)$$

тензор швидкостей, який відповідає полю швидкостей середовища, що рухається $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}.$$

Рівноважна частина тензора напруження відповідає граничному стану середовища, коли вона наближається до спокою $\vec{v} = 0$. Вигляд цієї складової обраний так, що виконується граничне співвідношення для сухого тертя по Кулону:

$$|S| = f|N|,$$

де: S – дотичне напруження, яке визначається на площині, пов'язаною з головним напрямком тензора $\sigma_{ik}^{(r)}$; N – нормальне напруження на цій же площадці; f – коефіцієнт внутрішнього тертя сипкого матеріалу.

Для сипкого матеріалу повинні виконуватися закони механіки суцільних середовищ [6]. Закон зберігання маси:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (5)$$

Закон зміни кількості руху:

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} + \rho g_i. \quad (6)$$

Закон зміни кінетичного моменту, який в безмоментній механіці зводиться до симетрії тензора напружень:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \quad (7)$$

Закон збереження повної енергії:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial J_{ei}}{\partial x_i} = 0, \quad (8)$$

де: g_i – інтенсивність масових сил; e – масова щільність повної енергії, що складається з кінетичної, потенційної та внутрішньої енергій; J_{ei} – щільність кондуктивного потоку повної енергії [7], за повторюваними індексами, згідно тензорного аналізу, проводиться підсумовування від 1 до 3. У випадку, коли нехтують тепловими ефектами, залучати останнє співвідношення немає потреби. Враховуючи сталість, рівняння (5) можна переписати замінивши змінну ρ на v .

На рис. 1 зображений деякий об'єм V шару сипкого матеріалу, що лежить на твердій поверхні Σ_0 . Шар має вільну поверхню на якій мають місце дві граничні умови: одна – скалярна – кінематичного характеру у вигляді:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = v_z - v_x \frac{\partial F}{\partial x} - v_y \frac{\partial F}{\partial y} \quad (9)$$

де: $z = F(t, x, y)$ являє собою рівняння вільної поверхні Γ . Дана умова виражає собою рівність нормальної швидкості частинки і швидкості точки поверхні Γ .

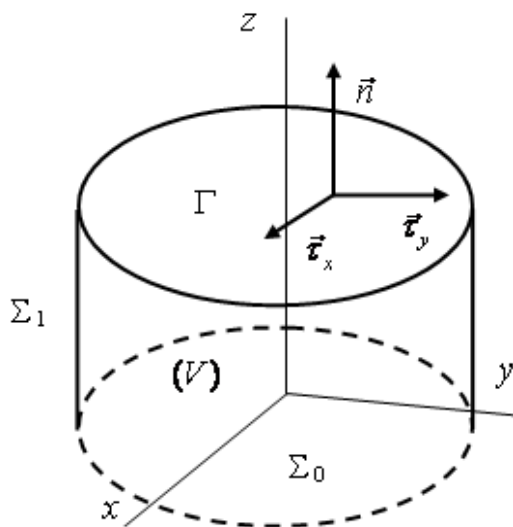


Рис. 1. Об'єм шару сипкого матеріалу, що лежить на твердій поверхні Σ_0 .

Інша умова – векторна – динамічна, що виражає собою безперервність тензора напружень при переході через поверхню Γ . Поза об'ємом V сипкий матеріал відсутній, тому тут тензор напружень дорівнює нулю. Тоді векторна гранична умова еквівалентна трьом скалярним співвідношенням для тензора напружень, який визначається з боку сипкого матеріалу

$$n_k \sigma_{ki} n_i \Big|_{z=F(t,x,y)} = 0, \quad (10)$$

$$n_k \sigma_{ki} \tau_{li} \Big|_{z=F(t,x,y)} = 0, \quad (11)$$

$$n_k \sigma_{ki} \tau_{2i} \Big|_{z=F(t,x,y)} = 0, \quad (12)$$

де: n_k, τ_{mi} ($m=1,2$) – одиничні нормальні і дотичні вектори до поверхні Γ (рис. 1).

Крім цього залучається додаткова гранична умова:

$$v = v_0, \quad (13)$$

де: v_0 – мінімальна об'ємна щільність, при якій в сипкому середовищі зникає кулонівська сила тертя між частинками [3]. На твердій поверхні Σ_0 має місце непроникнення суцільного середовища через стінку. І, якщо стінка не рухається в напрямку своєї нормалі, то звідси випливає виконання умови непротікання:

$$v_z \Big|_{z=0} = 0, \quad (14)$$

де: v_z – нормальна складова швидкості сипкого матеріалу на зазначеній поверхні.

У напрямку вздовж стінки Σ_0 спостерігається прослизання і на сипкий матеріал діє силу опору руху згідно закону Кулона – дотичне напруження \vec{p}_τ пропорційно нормальній нарузі p_n і протилежно направлене по відношенню до відносної швидкості частинки $\vec{v}(t, x, y, 0) - \vec{V}(t, x, y)$ сипкого матеріалу по стінці:

$$\vec{p}_\tau = - \frac{\vec{v}(t, x, y, 0) - \vec{V}(t, x, y)}{|\vec{v}(t, x, y, 0) - \vec{V}(t, x, y)|} f_v p_n, \quad (15)$$

де: f_v – зовнішній коефіцієнт тертя. Знак мінус у правій частині даного співвідношення узятий у зв'язку з тим, що нормальна напруга має бути стискуючою ($p_n < 0$). Враховуючи зв'язок напружень з тензором напружень у вигляді формули Коші [6, 8]:

$$\vec{p} = p_i \vec{e}_i = n_k \sigma_{ki} \vec{e}_i,$$

векторне рівняння (15) можна представити двома скалярними співвідношеннями:

$$n_k \sigma_{ki} \tau_{1i} = - \frac{v_x(t, x, y, 0) - V_x(t, x, y)}{|\vec{v}(t, x, y, 0) - \vec{V}(t, x, y)|} f_v n_k \sigma_{ki} n_i, \quad (16)$$

$$n_k \sigma_{ki} \tau_{2i} = - \frac{v_y(t, x, y, 0) - V_y(t, x, y)}{|\vec{v}(t, x, y, 0) - \vec{V}(t, x, y)|} f_v n_k \sigma_{ki} n_i, \quad (17)$$

де: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = (v_x, v_y, v_z)$ $\vec{\tau}_m = (\tau_{m1}, \tau_{m2}, \tau_{m3}) = (\tau_{mx}, \tau_{my}, \tau_{mz})$ одиничні дотичні до вектора.

Висновок. В результаті приведених математичних перетворень отримана основна система рівнянь динаміки швидкого гравітаційного руху сипкого матеріалу в вигляді співвідношень (16) і (17). В подальшому приведені рівняння будуть використані при визначенні продуктивності дозувально-змішувального агрегату для приготування комбікормів.

Список літератури

1. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред / Р. И. Нигматулин. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
2. Гудмен М. Две задачи о гравитационном течении гранулированных материалов / М. Гудмен, С. Коун // Механика гранулированных сред: Теория быстрых течений: Сб. статей. Пер. с англ. / сост. И. В. Ширко. – М.: Мир, 1965. – С. 65–85.
3. Севидж С. Гравитационное течение несвязанных гранулированных материалов в лотках и каналах / С. Севидж // Механика гранулированных сред: Теория быстрых течений: Сб. статей. Пер. с англ. / сост. И. В. Ширко. – М.: Мир, 1985. – С. 86–146.

4. *Kanatanı K. I. Propertses of Ideal Granular Material / Mechanics of granular Vaterials.* – Elsevier Science Publishers. – Amsterdam. – 1983. – P. 235–244.
5. *Hutter K., Sheiwiler T. Rapid Plane Flow of Granular Materials down a Chute / Mechanics of granular Materials.* – Elsevier Science Publishers. – Amsterdajn, 1983, – P. 283–293.
6. *Седов Л. И. Механика сплошных сред / Л. И. Седов.* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
7. *Дьярмати И. Неравновесная термодинамика: Теория поля и вариационные принципы / И. Дьярмати.* – М.: Мир, 1974. – 304 с.
8. *Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе.* – М.: Физматгиз, 1964. – 554 с.

Аннотация. В результате привлечения законов механики сплошных сред, в частности законов сохранения массы, изменения количества движения, изменения кинетического момента и сохранения полной энергии проведено математическое моделирование быстрого гравитационного движения сыпучих материалов и получена система уравнений их динамики, которая в дальнейшем будет использована для моделирования технологического процесса дозоровочно-смесительного агрегата при приготовлении комбикормов.

Ключевые слова: сплошные среды, сыпучие материалы, моделирования

Annotation. As a result of bringing in of laws of mechanics of continuous environments, in particular laws of maintainance of mass, treason of amount of motion, the changes of kinetic moment and conservation of complete energy are conducted mathematical design of rapid gravity motion of friable materials and the system of equalizations of their dynamics which in future will be utillized for the design of technological process of dosage-mixer aggregate at preparation of the mixed fodders.

Key words: continuous environments, friable materials, designs

УДК 368.54

СТРАХУВАННЯ ВИРОБНИЧО-ГОСПОДАРСЬКИХ РИЗИКІВ АГРАРНИХ ПІДПРИЄМСТВ: ІННОВАЦІЙНИЙ АСПЕКТ

В. В. Дранус, магістр

Подільський державний аграрно-технічний університет

Анотація. В статті розглянуто проблеми виникнення ризиків та управління ними в сільськогосподарському виробництві,

© В. В. Дранус, 2016