УДК 681.5.07

ЧУТЛИВІСТЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ ТА ЇХ ОПТИМІЗАЦІЯ

Л. А. ПАНТАЛІЄНКО, *кандидат фізико-математичних наук, доцент*[25]
Національний університет біоресурсів і природокористування України
e-mail: *nni.elektrik@gmail.com*

Анотація. *Наведено алгоритми розв'язання задач оптимізації з обмеженою та гарантованої чутливістю для систем диференційних рівнянь зі змінною структурою, залежних від параметрів. Розглянуто динамічні обмеження на функції чутливості лінійного та нелінійного типів. Аналіз та оцінку початкової області для функцій чутливості здійснено за допомогою алгоритмів стійкості*.

Ключові слова: ***чутливість, оптимізація, системи зі змінною структурою, точки перемкнення, параметри, функції чутливості***

Проблема чутливості, зазвичай, виникає у зв'язку з необхідністю підвищення ефективності роботи реального об'єкта, що зв'язане з різними факторами впливу, у тому числі й неконтрольованими [1]. Умови нормального функціонування системи на реальних режимах охоплюють низку задач, зокрема, з обмеженою та гарантованою чутливістю [2,3]. За цими постановками, за наявності певних вимог щодо диференційованості, накладають обмеження на функції чутливості та розглядають задачі оптимізації [2]. Для аналізу чутливості систем зі змінною структурою [4] за заданими обмеженнями застосовуються критерії практичної стійкості у просторі функцій чутливості [3,4].

Мета досліджень ─ розробка методів розв'язання задач оптимізації з обмеженою та гарантованої чутливістю для систем зі змінною структурою за допомогою алгоритмів стійкості.

Матеріали та методика досліджень. У роботі застосовуються методи аналізу практичної стійкості, чутливості та алгоритми оптимізації.

Розглянемо систему диференційних рівнянь [4]:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t,\alpha)\ ,t \in [t_0,T], \tag{1}$$

$$x(t_0,\alpha) = x_0(\alpha),\ t_0 = t_0(\alpha)\ , \tag{2}$$

за умовою, що вектор станів x в момент часу t_j має розриви згідно із заданими співвідношеннями:

$$x(t_j+0) = \Phi_j(x(t_j-0),t_j,\alpha),\ \ j=1,2,...,N\ . \tag{3}$$

де Φ_j, $j=1,2,...,N$ − неперервно-диференційовані за своїми аргументами вектор-функції;

$x(t_j-0), x(t_j+0)$, $j=1,2,...,N$ − значення вектора x до та після стрибка відповідно;

$t_j=t_j(\alpha)$, $j=1,2,...,N$ − моменти перемкнення.

У загальному випадку умови перемкнення залежать від вектора параметрів α та вектора станів x в момент часу t_j-0:

$$\psi_j\left(x(t_j-0),t_j,\alpha\right)=0,\ j=1,2,...,N. \tag{4}$$

Припустимо, що функції $\psi_j(x,t,\alpha)$, $j=1,2,...,N$ є неперервно-диференційованими за своїми аргументами. Тоді, якщо для розрахункового значення вектора параметрів $\overline{\alpha}$ справджується вимога:

$$\left(\frac{\partial\psi_j^*}{\partial x}f+\frac{\partial\psi_j}{\partial t}\right)^- \neq 0,\ j=1,2,...,N, \tag{5}$$

то вектори функцій чутливості $u^{(i)}(t,\alpha)=\dfrac{\partial x(t,\alpha)}{\partial\alpha_i}$, $i=1,2,...,m$ при $t\neq t_j$, $j=1,2,...,N$ обчислюються згідно із задачею Коші:

$$\frac{du^{(i)}(t,\overline{\alpha})}{dt}=\frac{\partial f(\overline{x},t,\overline{\alpha})}{\partial x}u^{(i)}(t,\overline{\alpha})+\frac{\partial f(\overline{x},t,\overline{\alpha})}{\partial\alpha_i}, \tag{6}$$

$$u^{(i)}(t_0,\overline{\alpha})=\frac{dx_0(\alpha)}{d\alpha_i}-f\left(x_0(\overline{\alpha}),t_0(\overline{\alpha}),\overline{\alpha}\right)\frac{dt_0(\overline{\alpha})}{d\alpha_i},\ i=1,2,...,m. \tag{7}$$

У точках перемкнення функції чутливості мають стрибки [1,2]:

$$u^{(i)}(t_j+0)=u^{(i)}(t_j-0)+\left[\frac{\partial\Phi_j^-}{\partial t}+\left(\frac{\partial\Phi_j^-}{\partial x}-E\right)f^- -\Delta f^{(j)}\right]\frac{dt_j}{d\alpha_i}+$$
$$+\left(\frac{\partial\Phi_j^-}{\partial x}-E\right)u^{(i)}(t_j-0)+\frac{\partial\Phi_j^-}{\partial\alpha_i},\ j=1,2,...,N,\ i=1,2,...,m. \tag{8}$$

Тут

$$\Delta f^{(j)}=f\left(x(t_j+0),t_j,\overline{\alpha}\right)-f\left(x(t_j-0),t_j,\overline{\alpha}\right),$$

$$\frac{dt_j}{d\alpha_i}=\frac{\dfrac{\partial\psi_j^{-*}}{\partial x}u^{(i)}(t_j-0)+\dfrac{\partial\psi_j^-}{\partial\alpha_i}}{\dfrac{\partial\psi_j^{-*}}{\partial x}f\left(x(t_j-0),t_j,\overline{\alpha}\right)+\dfrac{\partial\psi_j^-}{\partial t}}, \tag{9}$$

а індекс «−» означає, що відповідні функції обчислюються в момент часу $t=t_j-0$.

Для випадку, коли

$$\Phi_j\left(x(t_j-0),t_j,\alpha\right)=x(t_j-0),\ j=1,2,...,N,$$

система (1) має вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = f^{(j)}(x,t,\alpha) \ , t \in \left[t_{j-1}, t_j\right[. \tag{10}$$

При цьому формула для розрахунку стрибків функцій чутливості залишається незмінною, але прирости $\Delta f^{(j)}$ необхідно вже обчислювати таким чином:

$$\Delta f^{(j)} = f^{(j+1)}\left(x(t_j+0), t_j, \overline{\alpha}\right) - f^{(j)}\left(x(t_j-0), t_j, \overline{\alpha}\right). \tag{11}$$

Тому для систем зі змінною структурою, хоча вихідна система диференціальних рівнянь має неперервний розв'язок, функції чутливості є розривними у точках перемкнення:

$$u^{(i)}(t_j+0) = u^{(i)}(t_j-0) - \Delta f^{(j)} \frac{dt_j}{d\alpha_i}, \ j = 1,2,...,N, \ i = 1,2,...,m. \tag{12}$$

На підставі викладеного розглянемо задачі оптимізації з обмеженою та гарантованою чутливістю для релейних систем вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) + g(x,t)v \ , t \in [t_0, T], \tag{13}$$

де $f(x,t)$, $g(x,t)$ − вектор-функції вимірності n, неперервно-диференційовані за своїми аргументами;

$v(t) = v_j = const$, $t \in \left[t_{j-1}, t_j\right[$ − скалярна функція керування.

Припустимо, що параметрами оптимізації є точки перемкнення, тобто $\alpha^* = (t_1, t_2, ..., t_N)$, $m = N$. Необхідно мінімізувати функціонал від кінцевого стану системи (13) за точками перемкнення:

$$\min_{t_1, t_2, ..., t_N} \Phi\left(x(T, t_1, t_2, ..., t_N)\right) \tag{14}$$

за и обмеження на функції чутливості $u^{(i)}(t, t_1, t_2, ..., t_N) = \dfrac{\partial x(t, t_1, t_2, ..., t_N)}{\partial t_i}$, $i = 1,2,...,N$ вигляду:

$$\Phi_t = \Gamma_t = \left\{ u(t,\alpha): \left| \sum_{i=1}^{m} l_s^{(i)*}(t) u^{(i)}(t,\alpha) \right| \le 1, s = 1,2,...,\tilde{N} \right\}, \ t \in [t_0, T], \tag{15}$$

$$\Phi_t = \Psi_t = \left\{ u(t,\alpha): \ \psi(u(t,\alpha),t) = \psi\left(u^{(1)}(t,\alpha), u^{(2)}(t,\alpha), ..., u^{(m)}(t,\alpha)\right) \le 1 \right\}, \ t \in [t_0, T], \tag{16}$$

де $l_s^{(i)}(t)$, $i = 1,2,...,m$, $s = 1,2,...,\tilde{N}$ − відомі неперервні вектор-функції вимірності n;

$u^*(t,\alpha) = \left(u^{(1)^*}(t,\alpha), ..., u^{(m)^*}(t,\alpha)\right)$ − вектор вимірності $n \cdot m$;

$\psi(u(t,\alpha),t)$ − скалярна функція, неперервна за своїми аргументами разом з частинними похідними по елементах вектора $u(t,\alpha)$, причому множина Ψ_t опукла, замкнена та містить внутрішню точку $u(t,\alpha)=0$ для будь-яких $t\in[t_0,T]$.

Для розв'язку задачі (14) скористаємося процедурою градієнтного спуску:

$$t_j^{(s+1)}=P_{[t_0,T]}\left\{t_j^{(s)}-\rho_s\cdot grad_x^*\Phi\left(x\left(T,t_1^{(s)},t_2^{(s)},...,t_N^{(s)}\right)\right)u^{(j)}\left(T,t_1^{(s)},t_2^{(s)},...,t_N^{(s)}\right)\right\},$$

$$j=1,2,...,N\,,\quad s=0,1,2,..., \tag{17}$$

де $P_{[t_0,T]}$ – операція упорядкування точок перемкнення на проміжку $[t_0,T]$, що встановлює співвідношення $t_0\le t_1^{(s+1)}\le t_2^{(s+1)}\le...\le t_N^{(s+1)}\le T$;

ρ_s – крок градієнтного спуску.

Вектори функцій чутливості $u^{(j)}(t,t_1,t_2,...,t_N)$, $j=1,2,...,N$ у точці T згідно з формулами (8) – (12) будуть визначатися як розв'язок задач Коші:

$$\frac{du^{(i)}(t)}{dt}=\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial g(x,t)}{\partial x}v\right)\Big|_{x=x(t,\bar t)}u^{(i)}(t),\ t\ne t_j\,, \tag{18}$$

$$u^{(i)}(t_i)=g\left(x(t_i),t_i\right)(v_i-v_{i+1}),\ i=1,2,...,N\,, \tag{19}$$

де $\bar t^*=(\bar t_1,\bar t_2,...,\bar t_N)$ – вектор розрахункових значень точок перемкнення; $u^{(i)}(t)=0$, $t<t_i$, $i=1,2,...,N$.

Слід зазначити, що система (18) має однакову форму для будь-яких точок перемкнення, а її розв'язок залежить лише від початкових умов. Так, якщо керування двопозиційне, тобто $v_i=(-1)^i c$, то початкова умова (19) буде такою:

$$u^{(i)}(t_i)=2g\left(x(t_i),t_i\right)\ (-1)^i c\ \ (i=1,2,...,N). \tag{20}$$

Згідно з формулами (18), (19) обчислення функцій чутливості за точками перемкнення буде зводитися до інтегрування системи диференціальних рівнянь розмірності $n\times N$. В обчислювальному плані це досить трудомісткий процес. Для розв'язку проблеми розмірності у роботі $[2]$ запропоновано конструктивний підхід, що полягає в заміні незалежної в системі (11): $t=T-\tau$, $\tau\in[0,T-t_0]$. У результаті вектор функцій чутливості в точці T визначатиметься за формулою

$$u^{(i)}(T)=Z^{-1}(T-t_i,0)\,u^{(i)}(t_i)\quad i=1,2,...,N\,, \tag{21}$$

де матриця $Z^{-1}(\tau,0)$ задовольняє рівняння:

$$\frac{dZ^{-1}(\tau,0)}{dt}=Z^{-1}(\tau,0)\left(\frac{\partial f(x,T-\tau)}{\partial x}+\frac{\partial g(x,T-\tau)}{\partial x}v\right)\Big|_{x=x(t,\bar t)}u^{(i)}(T-\tau) \tag{22}$$

з початковою умовою $Z^{-1}(0,0)=E$.

Щоб підпорядкувати функції чутливості умовам на розрахунковому режимі необхідно задати множину початкових умов для функцій чутливості G_0 у формі еліпсоїда $G_0=\left\{u(t_0):\ \sum_{i=1}^m u^{(i)*}B_i u^{(i)}\le c^2\right\}$ та застосувати для її оцінки алгоритми практичної стійкості $[2-4]$.

Для розв’язання задачі гарантованої чутливості систему (13) необхідно попередньо лінеаризувати в околі будь-якого розрахункового руху та оцінити область розкиду параметрів, що не порушують обмежень типу (15), (16).

Результати досліджень. Для релейних систем здійснено чисельне розв’язання задач оптимізації з обмеженою та гарантованої чутливістю методами практичної стійкості.

Висновки

За допомогою алгоритмів практичної стійкості здійснено чисельне розв’язання задач оптимізації з обмеженою та гарантованої чутливістю для релейних систем. Одержано оптимальні оцінки областей початкових умов для функцій чутливості у заданих структурах.

Список літератури

1. Розенвассер Е. Н. Чувствительность систем управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов.– М.: Наука , 1981. – 464 с.
2. Бублик Б. Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б. Н. Бублик, Ф. Г. Гаращенко, Н. Ф. Кириченко.– К.: Наук. думка, 1985. – 304 с.
3. Панталієнко Л.А. Дослідження задач обмеженої чутливості методами практичної стійкості / Л. А. Панталієнко // Науковий вісник НУБіП України. Серія «Техніка та енергетика АПК». – 2014. – Вип. 194, ч.2. – С. 243−248.
4. Гаращенко Ф. Г., Панталієнко Л. А. Исследование задач практической устойчивости систем с переменной структурой / Ф. Г. Гаращенко, Л. А. Панталієнко // Автоматика.– 1993. – №2. – С.3-8.

References

1. Rozenvasser, E. N., Yusupov, R. M. (1981). Chuvstvytelnost system upravlenyia [Sensitivity control systems]. Moscow, Russia: Science, 464.
2. Bublyk, B. N., Harashchenko, F. H., Kyrychenko, N. F. (1985). Strukturno-parametrycheskaia optymyzatsyia y ustoichyvost dynamyky puchkov [Structural-parametric optimization and stability of beam dynamics]. Kyiv, Ukraine: Scientific thought, 304.
3. Pantaliienko L. A. (2014). Doslidzhennia zadach obmezhenoi chutlyvosti metodamy praktychnoi stiikosti [Research problems of limited sensitivity methods practical stability]. Scientific Journal NUBaN Ukraine. A series of «Technology and Energy AIC», 194 (2), 243−248.
4. Harashchenko F. H., Pantalyienko L. A. (1993).Yssledovanye zadach praktycheskoi ustoichyvosty system s peremennoi strukturoi [Research of practical problems of stability of systems with variable structure]. Automation, 2, 3-8.

ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ И ИХ ОПТИМИЗАЦИЯ

Л. А. Панталиенко

Аннотация. *Приведены алгоритмы решения задач оптимизации с ограниченной и гарантированной чувствительностью для систем* *дифференциальных уравнений с переменной структурой, зависящих от параметров. Рассмотренны динамические ограничения на функции чувствительности линейного и нелинейного типов. Анализ и оценку начальной области для функций чувствительности осуществлено с помощью алгоритмов устойчивости.*

Ключевые слова: ***чувствительность, оптимизация, системы с переменной структурой, точки переключения, параметры, функции чувствительности.***

SENSITIVITY OF DYNAMIC SYSTEMS WITH VARIABLE STRUCTURE AND OPTIMIZATION

L. Pantaliyenko

Annotation. *The algorithms solve optimization problems and a guaranteed limited sensitivity for systems of differential equations with variable structure dependent parameters. Considered dynamic limits on sensitivity functions linear and nonlinear types. Analysis and evaluation of the initial area for sensitivity functions performed by using the algorithms stability.*

Keywords: ***sensitivity, optimization, systems with variable structure, the switching point settings, the sensitivity function***

УДК 535.3

ДІЕЛЕКТРИЧНІ ВТРАТИ В МАТРИЧНИХ ДИСПЕРСНИХ СИСТЕМ ІЗ ДВОШАРОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ В НАБЛИЖЕННІ МАКСВЕЛЛ-ГАРНЕТТА

С. В. ШОСТАК, *кандидат фізико-математичних наук, доцент*
Національний університет біоресурсів і природокористування України
e-mail: *shostakserg@ukr.net*

Анотація. *Розраховано діелектричні втрати в матричних дисперсних системах із двошаровими кульовими включеннями. В наближенні Максвелл-Гарнетта проведено детальний аналіз залежностей ефективної діелектричної проникності як від частоти зовнішнього поля, так і від параметрів системи.*

Ключові слова: ***діелектричні втрати, матричні дисперсні системи, ефективна діелектрична проникність***

Дослідженню діелектричних втрат (ДВ) в матричних дисперсних системах (МДС) присвячена значна кількість робіт [1-4]. В деяких з них