*The article posed and solved the problem of viscous deformation of the body under the action of surface tension forces. We construct boundary integral equations, which are considered in conjunction with the kinematic boundary conditions. The method of time steps for the numerical analysis of liquid viscous deformation of the body under the action of surface tension forces.*

**Keywords:** ***hydrodynamic potentials kinematic ratio, surface tension, integral representation, integral equation***

УДК 372.851

# ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ВИКЛАДАННІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ІНЖЕНЕРНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

**О. Ю. ДЮЖЕНКОВА,** кандидат фізико-математичних наук, доцент
***Національний університет біоресурсів і природокористування України***
*E-mail: oduzen@yandex.ua*

**Анотація.** *Важливою складовою якісної підготовки майбутніх інженерів є підвищення їх рівня математичної освіти. Це передбачає розуміння суті основних понять і тверджень, що вивчаються в курсі вищої математики, їх тлумачення в різних науках, уміння будувати математичні моделі та застосовувати математичні методи за розв'язання прикладних задач. У статті розглянуто загальний підхід та особливості використання математичного моделювання у процесі викладання вищої математики студентам інженерних спеціальностей. Підкреслено важливість використання задач, які ілюструють необхідність введення основних математичних понять, що дає мотивацію та стимулює вивчення математики. Для реалізації професійного спрямування курсу вищої математики велику увагу слід приділити прикладним задачам, які сприяють розвитку дослідницьких навичок майбутніх фахівців. Крім того, математичне моделювання є важливим для встановлення міжпредметних зв'язків та формування науково–цілісного сприйняття світу.*

*У статті розглянуто приклади використання математичних моделей за вивчення похідної функції, визначеного інтеграла, диференціальних рівнянь. Підкреслено доцільність використання комбінованих задач, які пов'язують між собою різні розділи вищої математики. Зокрема, наведено приклади, у яких використовується матеріал з лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу.*

**Ключові слова:** ***математична модель, професійна спрямованість, прикладні задачі***

---

**Актуальність.** Підготовка фахівців в сучасних умовах вимагає нових підходів до викладання дисциплін у вищих навчальних закладах. Для студентів інженерних спеціальностей актуальним є питання про підвищення їх рівня математичної освіти. Майбутні фахівці повинні вміти аналізувати фізичні процеси, виділяти основне і вміти використовувати математичні методи для розв'язання прикладних задач. Моделювання є одним з найважливіших аспектів якісної математичної підготовки. Навчаючись моделювати реальні процеси, студенти отримують не тільки мотивацію вивчення математики, а й можливість застосовувати марематичні знання для розв'язання задач у своїй професійній діяльності, зокрема, у сфері енергетики.

**Аналіз останніх досліджень та публікацій.** Видатний сучасний математик Л. Д. Кудрявцев підкреслював: «Людство сьогодні як ніколи зрозуміло, що знання в галузі природничих наук стає точним тільки тоді, коли для його опису використовують математичну модель».

Математичне моделювання є одним з основних методів наукового пізнання світу, і його успішно застосовують у всіх сферах людської діяльності. Вагомий внесок у розробку математичних моделей в енергетиці зробили В. А. Веніков, В. С. Перхач, О. В. Кириленко, М. С.Сегеда [4] та інші. У своїх роботах вони розглядали математичні основи аналізу електроенергетичних систем, наводили численні приклади моделювання об'єктів і процесів при вирішенні задач електроенергетики. У цьому сенсі використання математичних моделей при викладанні вищої математики майбутнім енергетикам сприяє формуванню у них дослідницьких навичок, необхідних у подальшій роботі. Багато цікавих прикладних задач запропонував відомий математик І. І. Баврін [1], який за допомогою марематичного моделювання ілюстрував застосування основних математичних понять у природничих науках.

**Мета дослідження** – оптимізувати процес викладання вищої математики із врахуванням професійної спрямованості курсу для майбутніх фахівців–інженерів, зокрема, в енергетичній сфері. Більшість основних математичних понять можна ілюструвати завданнями практичного змісту, які навчають студентів будувати математичні моделі реальних фізичних процесів. Крім того, прикладні задачі є необхідними для мотивації і стимулювання вивчення вищої математики.

**Матеріали і методи дослідження.** Різні науки описують різні сторони оточуючого світу, а зв'язки між науками відображають його єдність, формуючи науково–цілісну картину світу. Викладаючи вищу математику студентам інженерних спеціальностей, слід особливу увагу звертати на професійну спрямованість курсу. Для висвітлення міжпредметних зв'язків з іншими дисциплінами доцільно використовувати математичні моделі при вивченні основних математичних понять.

Кожне нове поняття доцільно вводити лише після розгляду різноманітних задач, які й приводять до необхідності введення цього поняття. Зокрема, розглядаючи поняття функції, різні способи її задання та класифікацію функцій, можна навести такі приклади: лінійна функція

$s = v \cdot t$, яка описує шлях, пройдений тілом зі сталою швидкістю *v* за час *t*; квадратична $S = \pi R^2$ (площа круга); тригонометричні функції $y = \sin x$ та $y = \cos x$, які описують не лише механічні коливання, а й багато біологічних явищ (слух, зір, сприйняття ультразвуку тощо), пов'язаних з коливними процесами. Доцільно звернути увагу на роль експоненціальної функції, яка описує різноманітні закони неперервного (органічного) росту (розпад радіоактивної речовини, ріст грошових вкладів, розмноження бактерій, ріст народонаселення тощо).

Серед задач, які розглядаються перед введенням поняття похідної (крім класичних задач про миттєву швидкість та про дотичну до кривої) можна розглянути задачі про швидкість хімічної реакції, про швидкість зростання популяції, про продуктивність праці. Всі ці задачі після введення поняття похідної дають змогу характеризувати похідну як швидкість зміни певного процесу, що описується заданою функцією.

Математичне моделювання можна використовувати при вивченні всіх розділів вищої математики. Велику кількість задач практичного змісту для тлумачення суті основних математичних понять наведено в посібнику [2]. Для студентів інженерних спеціальностей є багато цікавих прикладних задач, у яких застосовуються диференціальні рівняння [3]. Наведемо одну з них.

Задача 1. Визначити залежність струму $I$ від часу $t$ в електричному колі, яке складається із послідовно ввімкнених джерела постійного струму, що має напругу $U$, опору $R$, самоіндукції $L$ та вимикача, якщо в початковий момент часу $I(0) = 0$.

Сила струму в електричному колі згідно заданих умов визначається рівнянням $L\frac{dI}{dt} + RI = U$ . Тому задача зводиться до розв'язання диференційного рівняння з відокремлюваними змінними. Враховуючи початкову умову $I(0) = 0$ , дістаємо, що сила струму в заданому електричному колі визначається функцією $I(t) = \frac{U}{R}\left(1 - e^{\frac{R}{L}t}\right)$.

Для формування дослідницьких навичок доцільно розглядати різні способи розв'язання задач. Розв'язуючи одну й ту саму задачу різними способами, студент вчиться аналізувати, моделювати та використовувати різні математичні методи для розв'язання побудованої моделі.

Задача 2. Знайти найменшу відстань від озера, берегова ліня якого описується функцією $y = x^2 - 4x + 6$, до шосе, яке визначається прямою $x + y - 2 = 0$.

Очевидно, що визначення відстані між кривою і прямою зводиться до знаходження відстані від точки кривої $M(x; y)$ до прямої $l$: $Ax + By + C = 0$, яку обчислюють за формулою $\rho(M; l) = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Таким чином, розв'язування задачі передбачає визначення мінімуму функції двох змінних $f(x,y)=\dfrac{x+y-2}{\sqrt{2}}$ за умови, що $y=x^2-4x+6$.

Можна розглянути три способи розв'язання цієї задачі.

1-й спосіб. Розв'яжемо задачу на умовний екстремум. Склавши функцію Лагранжа $F(x,y,\lambda)=\dfrac{x+y-2}{\sqrt{2}}+\lambda(y-x^2+4x-6)$, знайдемо єдину стаціонарну точку $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)$, у якій функція має мінімум $f_{\min}=\dfrac{7}{4\sqrt{2}}$. Це і є шукана відстань між кривою та прямою.

2-й спосіб. Якщо крива задається функцією в явному вигляді, то зручно застосувати такий спосіб. Підставивши у функцію $f(x,y)$ вираз $y=x^2-4x+6$, одержимо функцію однієї змінної $g(x)=f(x;x^2-4x+6)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x^2-3x+4)$. Досліджуючи функцію $g(x)$ на екстремум, знаходимо $g_{\min}=g\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$. Отже, $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)$ – шукана точка кривої, відстань якої до прямої дорівнює $\dfrac{7}{4\sqrt{2}}$.

3-й спосіб. На кривій $y=x^2-4x+6$ знаходимо точки, в яких дотичні паралельні заданій прямій $x+y-2=0$. Визначаємо відстань від цих точок до прямої, після чого вибираємо з них найменшу. Оскільки дана пряма має кутовий коефіцієнт $k_l=-1$, то паралельні їй дотичні мають той самий кутовий коефіцієнт $y'=2x-4=-1$, звідки маємо $x=\dfrac{3}{2}$, $y\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4}$. Маємо точку $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{4}\right)$, тому відстань $\rho(M;l)=\dfrac{7}{4\sqrt{2}}$ і буде шуканою відстанню між кривою та прямою.

Цей спосіб дає змогу знайти не тільки відстань між кривою і прямою, а й точку $K$ на прямій, для якої $MK=\rho(M;l)$. Для цього розв'язуємо систему, складену з рівняння нормалі до заданої кривої в точці $M$ і рівняння прямої $l$.

Для встановлення зв'язків між різними розділами курсу вищої математики доцільно розглядати комбіновані задачі, розв'язання яких передбачає володіння матеріалом з вищої алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу.

Задача 3. Знайти інтеграл $\int\dfrac{rx+p}{x^2+4x+5}dx$, де $r$ — ранг матриці $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 3 & -2 & 4\\ 4 & 7 & -4 & 7\end{pmatrix}$, $p$ — скалярний добуток векторів $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(3;-2;4)$.

**Результати дослідження та їх обговорення.** У статті розглянуто загальний підхід та особливості використання математичного моделювання при викладанні вищої математики студентам інженерних спеціальностей. Наведено приклади математичних моделей при вивченні основних математичних понять. Розглянуто різнотипні задачі, що встановлюють зв'язки з іншими дисциплінами, які вивчають студенти інженерних спеціальностей. Застосування прикладних задач за викладання вищої математики сприяють засвоєнню суті основних понять та формуванню навичок моделювання для подальшого використання їх у майбутній професійній діяльності фахівців-інженерів.

**Висновки і перспективи.** Математизація є характерною рисою розвитку сучасної науки і техніки. При цьому математичне моделювання заслуговує особливої уваги, оскільки воно є потужним засобом для проведення наукових досліджень. Тому використання математичних моделей за викладання вищої математики є необхідною складовою для підвищення рівня математичної освіти та якісної професійної підготовки майбутніх інженерів-енергетиків.

## Список використаних джерел


1. Баврин, И. И. Начала анализа и математические модели в естествознании и экономике. / И. И. Баврин – М.: Просвещение, 1999. – 80с.
2. Дюженкова, Л. І. Вища математика. Приклади і задачі. / Л. І. Дюженкова, О. Ю. Дюженкова, Г. О. Михалін. – К.: Академія, 2003. – 624 с.
3. Ковтун, І. І. Вища математика. Побудова математичних моделей фізичних процесів. / І. І. Ковтун, Т. А. Скороход. – К: Центр інформаційних технологій. – 2010. – 60 с.
4. Математичне моделювання в електроенергетиці: підручник. / О. В. Кириленко, М. С. Сегеда, О.Ф. Буткевич, Т А. Мазур; за ред. М.С. Сегеди; – Л.: Вид-во Львів. політехніки, 2013. – 608 с.


## References


1. Bavrin, I. I. (1999). Nachala analiza i matematicheskie modeli v estestvoznanii i ekonomike. [The beginnings of analysis and mathematical models in natural science and economics]. Moskva: Prosveschenie, 80.
2. Dyuzhenkova, L. I., Dyuzhenkova, O. Yu., & Mikhalin, G .O. (2003). Vyscha matematika. Priklady i zadachi. [Higher mathematics. Examples and problems]. Kyiv: Akademiya, 624.
3. Kovtun, I .I., Skorokhod, T. A., (2010). Vyscha matematyka. Pobudova matematichnih modeley fizichnih protsesiv [Higher mathematics. Construction of mathematical models of physical processes]. Kyiv: Tsentr informatsiynyh tehnologiy, 60.
4. Kirilenko, O. V., Segeda, M.S ., & Butkevich, T. A. (2013). Matematichne modelyuvannya v elektroenergetitsi: pidruchnik. [Mathematical modeling in power engineering. Textbook]. Segeda, M.S. (Ed.) Lviv: vyd. Lviv. politekhniki, 608.


# ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИ ПРЕПОДАВАНИИ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ИНЖЕНЕРНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ


**О. Ю. Дюженкова**

**Аннотация.** *Важной составляющей качественной подготовки будущих инженеров является повышение их уровня математического образования. Это предполагает понимание сути основных понятий и утверждений, изучаемых в курсе высшей математики, их толкование в различных науках, умение строить математические модели и применять математические методы при решении прикладных задач. В статье рассмотрен общий подход и особенности использования математического моделирования при преподавании высшей математики студентам инженерных специальностей. Подчеркнута важность использования задач, которые иллюстрируют необходимость введения основных математических понятий, дает мотивацию и стимулирует изучение математики. Для реализации профессионального направления курса высшей математики большое внимание следует уделить прикладным задачам, которые способствуют развитию исследовательских навыков будущих специалистов. Кроме того, математическое моделирование является важным для установления межпредметных связей и формирования научно-целостного восприятия мира.*

*В статье рассмотрены примеры использования математических моделей при изучении производной функции, определенного интеграла, дифференциальных уравнений. Подчеркнута целесообразность использования комбинированных задач, которые связывают между собой различные разделы высшей математики. В частности, приведены примеры, в которых используется материал по линейной алгебре, аналитической геометрии и математическому анализу.*

**Ключевые слова:** ***математическая модель, профессиональная направленность, прикладные задачи***

## MATHEMATICAL MODELING APPLYING IN TEACHING OF ENGINEERING SPECIALTIES STUDENTS

**O. Yu. Dyuzhenkova**

**Abstract.** *An important component of quality training of future engineers is to increase their level of mathematical education. This approach includes understanding of the basic concepts and statements that are studied in the course of higher mathematics, their interpretation in various sciences, the ability to construct mathematical models and apply mathematical methods for solving of applied problems. In the article we describe the general approach and features of mathematical modeling in teaching of higher mathematics for students of engineering specialties. It's emphasized the importance of the problems using which illustrates the need to introduce basic mathematical concepts for motivation and stimulating learning of mathematics. Great attention should be given to applied problems that contribute to the development of research skills of future specialists for the implementation of the professional direction of the course of higher mathematics. In addition,* *mathematical modeling is important to establish interdisciplinary connections and the formation of scientific and holistic perception of the world.*

*In the article we consider the examples of the use of mathematical models in the study of the derivative function, definite integral, differential equations. It emphasized the advisability of combined tasks, which connect different sections of higher mathematics. In particular, we consider the problems, which solving needs the material from linear algebra, analytical geometry and mathematical analysis.*

**Keywords:** ***mathematical model, professional orientation, applied problems***

УДК 535.3

# АНАЛІТИЧНИЙ ПІДХІД ДОСЛІДЖЕННЯ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ СИСТЕМИ СФЕРИЧНИХ ЧАСТИНОК

**С. В. СТЕЦЕНКО,** старший викладач
***Національний університет біоресурсів і природокористування України***
*E-mail*: sstetsenko@i.ua

**Анотація.** *Розглядається аналітичний підхід дослідження системи сферичних частинок, оточених певним діелектричним середовищем з різною діелектричною проникністю. Система знаходиться між двома паралельними пластинами – електродами, рознесеними на певну відстань, і на які подається змінна напруга низької частоти. Отримано крайову задачу для рівнянь Максвелла, яку розв'язано методом функцій Гріна. Ці функції є основою для точних мультипольних частинок і точного електричного поля, які виражаються через прикладене поле і матрицю, що залежить від конфігурації системи. Точне електричне поле має вклади від прикладеного поля, поля частинок і поля зображення частинок. Зовнішнє поле, яке є суперпозицією прикладеного поля за відсутності частинок та поля зображення частинок в загальному випадку, є неоднорідним та залежить від властивостей і конфігурації системи. Визначено середню діелектричну проникність шляхом прямого усереднення її величини по всьому образу. Ефективна діелектрична проникність залежить лише від індукованих дипольних моментів, які, в свою чергу, залежать від всіх мультипольних моментів частинок та їх зображень.*

**Ключові слова:** ***сферична частинка, діелектрична система, мультипольний момент***